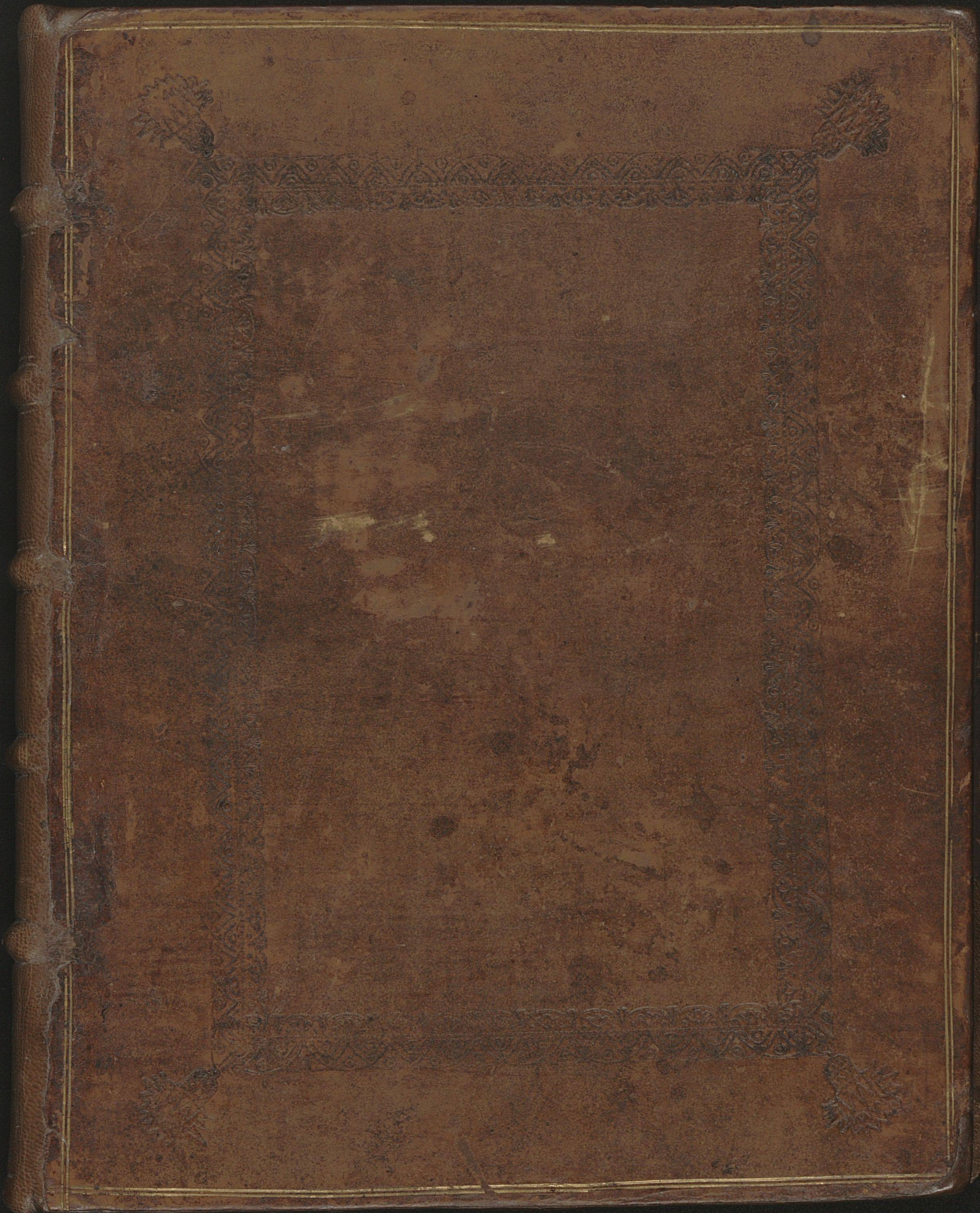
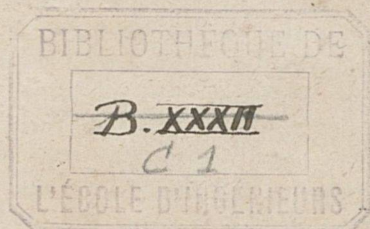


3062.

Ce vend 17 francs de ...

Schnetzler

Donné à la bibliothèque de l'Ecole d'ingénieurs par Madame Schnetzler 24 février 1897.



GEORGE R.

WHEREAS Our Trusty and well beloved *William Innys* and *John Innys* of Our City of *London*, Booksellers, have by their Petition represented unto Us, that they have at great Charge and Expence printed a new and correct Edition of a Book intituled, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, *Auctore Isaaco Newtono Eq. Aur. Editio tertia aucta & emendata*: And the sole Right and Title of the Copy of the same being vested in the said *William Innys* and *John Innys*, they have humbly besought Us to grant them Our Royal Privilege and Licence for the sole printing and publishing thereof for the Term of fourteen Years: We being willing to give all due Encouragement to Works of this Nature, which tend to the advancement of Learning, are graciously pleased to gratify them in their Request; and do by these Presents, agreeable to the Statutes in that Behalf made and provided, for Us, Our Heirs and Successors, give and grant unto them the said *William Innys* and *John Innys*, their Executors, Administrators and Assigns, Our Royal Licence for the sole printing and publishing the said Book intituled, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, *Auctore Isaaco Newtono Eq. Aur.* for the Term of fourteen Years from the Date hereof, strictly forbidding all Our Subjects within Our Kingdoms and Dominions to reprint the same, either in the like or in any other Volume or Volumes whatsoever, or to import, buy, Vend, Utter or Distribute any Copies thereof reprinted beyond the Seas, during the aforesaid term of fourteen Years, without the Consent or Approbation of the said *William Innys* and *John Innys*, their Heirs, Executors, and Assigns under their Hands and Seals first had and obtained, as they shall answer the contrary at their Perils. Whereof Our Commissioners and other Officers of Our Customs, the Master, Wardens and Company of Stationers, are to take Notice that due Obedience be rendered thereunto. Given at Our Court at St. *James's* the twenty fifth Day of *January*, 172[illegible] in the twelfth Year of Our Reign.

By His Majesty's Command,

TOWNSHEND.



GEORGE R.



WHEREAS Our Trusty and well beloved *William Innys* and *John Innys* of Our City of *London*, Booksellers, have by their Petition represented unto Us, that they have at great Charge and Expence printed a new and correct Edition of a Book intituled, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*; *Auctore Isaaco Newtono Eq. Aur. Editio tertia aucta & emendata:* And the sole Right and Title of the Copy of the same, being vested in the said *William Innys* and *John Innys*, they have humbly besought Us to grant them Our Royal Privilege and Licence, for the sole printing and publishing thereof for the Term of fourteen Years: We being willing to give all due Encouragement to Works of this Nature, which tend to the Advancement of Learning, are graciously pleased to gratify them in their Request, and do, by these Presents, agreeable to the Statutes in that Behalf made and provided, for Us, Our Heirs and Successors, give and grant unto them the said *William Innys* and *John Innys*, their Executors, Administrators and Assigns, Our Royal License for the sole printing and publishing the said Book intituled, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*; *Auctore Isaaco Newtono Eq. Aur.* for the Term of fourteen Years from the Date hereof, strictly forbidding all Our Subjects within Our Kingdoms and Dominions to reprint the same, either in the like or in any other Volume or Volumes whatsoever, or to Import, Buy, Vend, Utter or Distribute any Copies thereof reprinted beyond the Seas, during the aforesaid term of fourteen Years, without the Consent or Approbation of the said *William Innys* and *John Innys*, their Heirs, Executors, and Assigns under their Hands and Seals first had and obtained, as they shall answer the contrary at their Peril: Whereof Our Commissioners and other Officers of Our Customs, the Master Wardens and Company of Stationers, are to take Notice that due Obedience be rendered thereunto. Given at Our Court at St. *James's* the twenty fifth Day of *March*, 1726. in the twelfth Year of Our Reign.

By his Majesty's Command,

TOWNSHEND.

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.



AUCTORE
ISAACO NEWTONO, Eq. Aur.

Editio tertia aucta & emendata.

LONDINI:
Apud Guil. & Joh. Innys, Regiæ Societatis typographos.
MDCCXXVI.

Allamand. [1726]

482782

Axb 39

NEWTONI

PRINCIPIA

PHILOSOPHIÆ.

IN
VIRI PRÆSTANTISSIMI
ISAACI NEWTONI
OPUS HOCCE
MATHEMATICO-PHYSICUM
ſeculi gentiſque noſtræ decus egregium.

EN tibi norma poli, & divæ libramina molis,
Computus en Jovis; & quas, dum primordia rerum
Pangeret, omniparens leges violare creator
Noluit, atque operum quæ fundamenta locârit.
Intima panduntur victi penetralia cæli,
Nec latet extremos quæ vis circumrotat orbes.
Sol ſolio reſidens ad ſe jubet omnia prono
Tendere deſcenſu, nec recto tramite currus
Siderios patitur vaſtum per inane moveri;
Sed rapit immotis, ſe centro, ſingula gyris.
Jam patet horrificis quæ ſit via flexa cometis;
Jam non miramur barbati phænomena aſtri.
Diſcimus hinc tandem qua cauſa argentea Phœbe
Paſſibus haud æquis graditur; cur ſubdita nulli
Hactenus aſtronomo numerorum fræna recuſet:
Cur remeant nodi, curque auges progrediuntur.
Diſcimus & quantis refluum vaga Cynthia pontum
Viribus impellit, feſſis dum fluctibus ulvam
Deſerit, ac nautis ſuſpectas nudat arenas;
Alternis vicibus ſuprema ad littora pulſans.

Quæ

Quæ toties animos veterum torsere sophorum,
Quæque scholas frustra rauco certamine vexant,
Obvia conspicimus, nubem pellente mathesi.
Jam dubios nulla caligine prægravat error,
Queis superum penetrare domos atque ardua cæli
Scandere sublimis genii concessit acumen.
Surgite mortales, terrenas mittite curas;
Atque hinc cæligenæ vires dignoscite mentis,
A pecudum vita longe lateque remotæ.
Qui scriptis jussit tabulis compescere cædes,
Furta & adulteria, & perjuræ crimina fraudis;
Quive vagis populis circundare mœnibus urbes
Auctor erat; Cererisve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen pressit ab uva;
Vel qui Niliaca monstravit arundine pictos
Consociare sonos, oculisque exponere voces;
Humanam sortem minus extulit: utpote pauca
Respiciens miseræ tantum solamina vitæ.
Jam vero superis convivæ admittimur, alti
Jura poli tractare licet, jamque abdita cæcæ
Claustra patent terræ, rerumque immobilis ordo,
Et quæ præteriti latuerunt secula mundi.
Talia monstrantem mecum celebrate camænis,
Vos ô cælicolum gaudentes nectare vesci,
NEWTONUM clausi reserantem scrinia veri,
NEWTONUM Musis charum, cui pectore puro
Phœbus adest, totoque incessit numine mentem:
Nec fas est propius mortali attingere divos.

EDM. HALLEY

PRÆ-

ILLUSTRISSIMÆ

SOCIETATI REGALI

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

SERENISSIMI REGIS

GEORGII

FLORENTI

TRACTATUM HUNC D.D.D.

IS. NEWTON.

AUCTORIS PRÆFATIO AD LECTOREM.

CUM *veteres* mechanicam (*uti auctor est* Pappus) *in rerum naturalium investigatione maximi fecerint*; *& recentiores, missis formis substantialibus & qualitatibus occultis, phænomena naturæ ad leges mathematicas revocare aggressi sint: Visum est in hoc tractatu* mathesin *excolere, quatenus ea ad* philosophiam *spectat.* Mechanicam *vero duplicem veteres constituerunt:* rationalem, *quæ per demonstrationes accurate procedit, &* practicam. *Ad practicam spectant artes omnes manuales, a quibus utique* mechanica *nomen mutuata est. Cum autem artifices parum accurate operari soleant, fit ut* mechanica *omnis a* geometria *ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad* geometriam *referatur, quicquid minus accuratum ad* mechanicam. *Attamen errores non sunt artis, sed artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior est mechanicus, & si quis accuratissime operari posset, hic foret mechanicus omnium perfectissimus. Nam & linearum rectarum & circulorum descriptiones, in quibus* geometria *fundatur, ad* mechanicam *pertinent. Has lineas describere* geometria *non docet, sed postulat. Postulat enim ut tyro easdem accurate describere prius didiceret, quam limen attingat* geometriæ; *dein, quomodo per has operationes problemata solvantur, docet; rectas & circulos describere problemata sunt, sed non geometrica. Ex* mechanica *postulatur horum solutio, in* geometria *docetur solutorum usus. Ac gloriatur* geometria *quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præstet. Fundatur igitur* geometria *in praxi mechanica, & nihil aliud est quam* mechanicæ universalis *pars illa, quæ artem mensurandi accurate proponit ac demonstrat. Cum autem artes manuales in corporibus movendis præcipue versentur, fit ut* geometria *ad magnitudinem,* mechanica

ca *ad motum vulgo referatur. Quo ſenſu* mechanica rationalis *erit ſcientia motuum, qui ex viribus quibuſcunque reſultant, & virium quæ ad motus quoſcunque requiruntur, accurate propoſita ac demonſtrata. Pars hæc* mechanicæ *a veteribus in* potentiis quinque *ad artes manuales ſpectantibus exculta fuit, qui gravitatem (cum potentia manualis non ſit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis conſiderarunt. Nos autem non artibus ſed philoſophiæ conſulentes, deque potentiis non manualibus ſed naturalibus ſcribentes, ea maxime tractamus, quæ ad gravitatem, levitatem, vim elaſticam, reſiſtentiam fluidorum & ejuſmodi vires ſeu attractivas ſeu impulſivas ſpectant: Et ea propter, hæc noſtra tanquam philoſophiæ principia mathematica proponimus. Omnis enim philoſophiæ difficultas in eo verſari videtur, ut a phænomenis motuum inveſtigemus vires naturæ, deinde ab his viribus demonſtremus phænomena reliqua. Et huc ſpectant propoſitiones generales, quas libro primo & ſecundo pertractavimus. In libro autem tertio exemplum hujus rei propoſuimus per explicationem ſyſtematis mundani. Ibi enim, ex phænomenis cœleſtibus, per propoſitiones in libris prioribus mathematice demonſtratas, derivantur vires gravitatis, quibus corpora ad ſolem & planetas ſingulos tendunt. Deinde ex his viribus per propoſitiones etiam mathematicas, deducuntur motus planetarum, cometarum, lunæ & maris. Utinam cætera naturæ phænomena ex principiis mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent, ut nonnihil ſuſpicer ea omnia ex viribus quibuſdam pendere poſſe, quibus corporum particulæ per cauſas nondum cognitas vel in ſe mutuo impelluntur & ſecundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, philoſophi hactenus naturam fruſtra tentarunt. Spero autem quod vel huic philoſophandi modo, vel veriori alicui, principia hic poſita lucem aliquam præbebunt.*

In his edendis, vir acutiſſimus & in omni literarum genere eruditiſſimus Edmundus Halleius *operam navavit, nec ſolum typothetarum ſphalmata correxit & ſchemata incidi curavit, ſed etiam auctor fuit, ut horum editionem aggrederer. Quippe cum demonſtratam a me figuram orbium cœleſtium impetraverat, rogare non deſtitit, ut eandem cum* Societate Regali *communicarem, quæ deinde hortatibus & benignis ſuis auſpiciis effecit, ut de eadem in lucem emittenda cogitare inciperem. At poſtquam motuum lunarium inæqualitates aggreſſus*

eſſem,

essem, deinde etiam alia tentare cœpissem, quæ ad leges & mensuras gravitatis & aliarum virium, & figuras a corporibus secundum datas quascunque leges attractis describendas, ad motus corporum plurium inter se, ad motus corporum in mediis resistentibus, ad vires, densitates & motus mediorum, ad orbes cometarum & similia spectant, editionem in aliud tempus differendam esse putavi, ut cætera rimarer & una in publicum darem. Quæ ad motus lunares spectant (imperfecta cum sint) in corollariis propositionis LXVI *simul complexus sum, ne singula methodo prolixiore quam pro rei dignitate proponere, & sigillatim demonstrare tenerer, & seriem reliquarum propositionum interrumpere. Nonnulla sero inventa locis minus idoneis inserere malui, quam numerum propositionum & citationes mutare. Ut omnia candide legantur, & defectus in materia tam difficili non tam reprehendantur, quam novis lectorum conatibus investigentur, & benigne suppleantur, enixe rogo.*

Dabam *Cantabrigiæ*, e Collegio
S. Trinitatis, Maii 8. 1686.

IS. NEWTON.

AUCTORIS PRÆFATIO

IN

EDITIONEM SECUNDAM.

In hac secunda Principiorum editione multa sparsim emendantur, & nonnulla adjiciuntur. In libri primi sectione II *inventio virium, quibus corpora in orbibus datis revolvi possint, facilior redditur & amplior. In libri secundi sectione* VII *theoria resistentiæ fluidorum accuratius investigatur, & novis experimentis confirmatur. In libro tertio theoria lunæ & præcessio æquinoctiorum ex principiis suis plenius deducuntur, & theoria cometarum pluribus & accuratius computatis orbium exemplis confirmatur.*

Dabam *Londini*,
Mar. 28. 1713.

IS. NEWTON.

EDI-

EDITORIS PRÆFATIO

IN

EDITIONEM SECUNDAM.

NEWTONIANÆ philoſophiæ novam tibi, lector benevole, diuque deſideratam editionem, plurimum nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potiſſimum contineantur in hoc opere celeberrimo, intelligere potes ex indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipſa te fere docebit auctoris præfatio. Reliquum eſt, ut adjiciantur nonnulla de methodo hujus philoſophiæ.

Qui phyſicam tractandam ſuſceperunt, ad tres fere claſſes revocari poſſunt. Extiterunt enim, qui ſingulis rerum ſpeciebus qualitates ſpecificas & occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum ſingulorum operationes, ignota quadam ratione, pendere voluerunt. In hoc poſita eſt ſumma doctrinæ ſcholaſticæ, ab *Ariſtotele* & Peripateticis derivatæ: Affirmant utique ſingulos effectus ex corporum ſingularibus naturis oriri; at unde ſint illæ naturæ non docent; nihil itaque docent. Cumque toti ſint in rerum nominibus, non in ipſis rebus; ſermonem quendam philoſophicum cenſendi ſunt adinveniſſe, philoſophiam tradidiſſe non ſunt cenſendi.

Alii ergo melioris diligentiæ laudem conſequi ſperarunt rejecta vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque materiam univerſam homogeneam eſſe, omnem vero formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium ſimpliciſſimis quibuſdam & intellectu facillimis affectionibus oriri. Et recte quidem progreſſio inſtituitur a ſimplicioribus ad magis compoſita, ſi particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam

quos

quos ipſa tribuit natura. Verum ubi licentiam ſibi aſſumunt, ponendi quaſcunque libet ignotas partium figuras & magnitudines, incertoſque ſitus & motus; quin & fingendi fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrime permeent, omnipotente prædita ſubtilitate, motibuſque occultis agitata; jam ad ſomnia delabuntur, neglecta rerum conſtitutione vera: quæ ſane fruſtra petenda eſt ex fallacibus conjecturis, cum vix etiam per certiſſimas obſervationes inveſtigari poſſit. Qui ſpeculationum ſuarum fundamentum deſumunt ab hypotheſibus; etiamſi deinde ſecundum leges mechanicas accuratiſſime procedant; fabulam quidem elegantem forte & venuſtam, fabulam tamen concinnare dicendi ſunt.

Relinquitur adeo tertium genus, qui philoſophiam ſcilicet experimentalem profitentur. Hi quidem ex ſimpliciſſimis quibus poſſunt principiis rerum omnium cauſas derivandas eſſe volunt: nihil autem principii loco aſſumunt, quod nondum ex phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheſes non comminiſcuntur, neque in phyſicam recipiunt, niſi ut quæſtiones de quarum veritate diſputetur. Duplici itaque methodo incedunt, analytica & ſynthetica. Naturæ vires legeſque virium ſimpliciores ex ſelectis quibuſdam phænomenis per analyſin deducunt, ex quibus deinde per ſyntheſin reliquorum conſtitutionem tradunt. Hæc illa eſt philoſophandi ratio longe optima, quam præ cæteris merito amplectendam cenſuit celeberrimus auctor noſter. Hanc ſolam utique dignam judicavit, in qua excolenda atque adornanda operam ſuam collocaret. Hujus igitur illuſtriſſimum dedit exemplum, mundani nempe ſyſtematis explicationem e theoria gravitatis feliciſſime deductam. Gravitatis virtutem univerſis corporibus ineſſe, ſuſpicati ſunt vel finxerunt alii: primus ille & ſolus ex apparentiis demonſtrare potuit, & ſpeculationibus egregiis firmiſſimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis viros, præjudiciis quibuſdam plus æquo occupatos, huic novo principio ægre aſſentiri potuiſſe, & certis incerta identidem prætuliſſe. Horum famam vellicare non eſt animus: tibi potius, benevole lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus tute ipſe judicium non iniquum feras.

Igitur ut argumenti ſumatur exordium a ſimpliciſſimis & proximis; diſpiciamus pauliſper qualis ſit in terreſtribus natura gravitatis, ut deinde tutius progrediamur ubi ad corpora cæleſtia, longiſſime a ſedibus

dibus noſtris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes philoſophos, corpora univerſa circumterreſtria gravitare in terram. Nulla dari corpora vere levia, jamdudum confirmavit experientia multiplex. Quæ dicitur levitas relativa, non eſt vera levitas, ſed apparens ſolummodo; & oritur a præpollente gravitate corporum contiguorum.

Porro, ut corpora univerſa gravitent in terram, ita terra viciſſim in corpora æqualiter gravitat; gravitatis enim actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem, ſic oſtenditur. Diſtinguatur terræ totius moles in binas quaſcunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam ſi pondera partium non eſſent in ſe mutuo æqualia; cederet pondus minus majori, & partes conjunctæ pergerent recta moveri ad infinitum, verſus plagam in quam tendit pondus majus: omnino contra experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio eſſe conſtituta: hoc eſt, gravitatis actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter a centro terræ diſtantium, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, e quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent eſſe proportionales quantitatibus materiæ movendæ. Jam vero corpora univerſa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quod in vacuo *Boyliano* temporibus æqualibus æqualia ſpatia cadendo deſcribunt, ſublata ſcilicet aëris reſiſtentia: accuratius autem comprobatur per experimenta pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cum corpora in terram & terra viciſſim in corpora momentis æqualibus gravitent; terræ pondus in unumquodque corpus, ſeu vis qua corpus terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejuſdem in terram. Hoc autem pondus erat ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis qua corpus unumquodque terram attrahit, ſive corporis vis abſoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo & componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: ſiquidem aucta vel diminuta mole materiæ, oſtenſum eſt, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque telluris ex conjunctis partium actionibus conflari

ſtari cenſenda erit; atque adeo corpora omnia terreſtria ſe mutuo trahere oportet viribus abſolutis, quæ ſint in ratione materiæ trahentis. Hæc eſt natura gravitatis apud terram: videamus jam qualis ſit in cælis.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare; naturæ lex eſt ab omnibus recepta philoſophis. Inde vero ſequitur, corpora quæ in curvis moventur, atque adeo de lineis rectis orbitas ſuas tangentibus jugiter abeunt, vi aliqua perpetuo agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in orbibus curvis revolventibus neceſſario aderit vis aliqua, per cujus actiones repetitas indeſinenter a tangentibus deflectantur.

Jam illud concedi æquum eſt, quod mathematicis rationibus colligitur & certiſſime demonſtratur; corpora nempe omnia, quæ moventur in linea aliqua curva in plano deſcripta, quæque radio ducto ad punctum vel quieſcens vel utcunque motum deſcribunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri a viribus quæ ad idem punctum tendunt. Cum igitur in confeſſo ſit apud aſtronomos, planetas primarios circum ſolem, ſecundarios vero circum ſuos primarios, areas deſcribere temporibus proportionales; conſequens eſt ut vis illa, qua perpetuo detorquentur a tangentibus rectilineis & in orbitis curvilineis revolvi coguntur, verſus corpora dirigatur quæ ſita ſunt in orbitarum centris. Hæc itaque vis non inepte vocari poteſt, reſpectu quidem corporis revolventis, centripeta; reſpectu autem corporis centralis, attractiva; a quacunque demum cauſa oriri fingatur.

Quin & hæc quoque concedenda ſunt, & mathematice demonſtrantur: Si corpora plura motu æquabili revolvantur in circulis concentricis, & quadrata temporum periodicorum ſint ut cubi diſtantiarum a centro communi; vires centripetas revolventium fore reciproce ut quadrata diſtantiarum. Vel, ſi corpora revolvantur in orbitis quæ ſunt circulis finitimæ, & quieſcant orbitarum apſides; vires centripetas revolventium fore reciproce ut quadrata diſtantiarum. Obtinere caſum alterutrum in planetis univerſis conſentiunt aſtronomi. Itaque vires centripetæ planetarum omnium ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum ab orbium centris. Si quis objiciat planetarum, & lunæ præſertim, apſides non penitus quieſcere; ſed motu quodam

 lento

lento ferri in consequentia: responderi potest, etiamsi concedamus hunc motum tardissimum exinde profectum esse quod vis centripetæ proportio aberret aliquantum a duplicata, aberrationem illam per computum mathematicum inveniri posse & plane insensibilem esse. Ipsa enim ratio vis centripetæ lunaris, quæ omnium maxime turbari debet, paululum quidem duplicatam superabit; ad hanc vero sexaginta fere vicibus propius accedet quam ad triplicatam. Sed verior erit responsio, si dicamus hanc apsidum progressionem, non ex aberratione a duplicata proportione, sed ex alia prorsus diversa causa oriri, quemadmodum egregie commonstratur in hac philosophia. Restat ergo ut vires centripetæ, quibus planetæ primarii tendunt versus solem & secundarii versus primarios suos, sint accurate ut quadrata distantiarum reciproce.

Ex iis quæ hactenus dicta sunt, constat planetas in orbitis suis retineri per vim aliquam in ipsos perpetuo agentem: constat vim illam dirigi semper versus orbitarum centra: constat hujus efficaciam augeri in accessu ad centrum, diminui in recessu ab eodem: & augeri quidem in eadem proportione qua diminuitur quadratum distantiæ, diminui in eadem proportione qua distantiæ quadratum augetur. Videamus jam, comparatione instituta inter planetarum vires centripetas & vim gravitatis, annon ejusdem forte sint generis. Ejusdem vero generis erunt, si deprehendantur hinc & inde leges eædem, eædemque affectiones. Primo itaque lunæ, quæ nobis proxima est, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ a corporibus e quiete demissis dato tempore sub ipso motus initio describuntur, ubi a viribus quibuscunque urgentur, proportionalia sunt ipsis viribus: hoc utique consequitur ex ratiociniis mathematicis. Erit igitur vis centripeta lunæ in orbita sua revolventis, ad vim gravitatis in superficie terræ, ut spatium quod tempore quam minimo describeret luna descendendo per vim centripetam versus terram, si circulari omni motu privari fingeretur, ad spatium quod eodem tempore quam minimo describit grave corpus in vicinia terræ, per vim gravitatis suæ cadendo. Horum spatiorum prius æquale est arcûs a luna per idem tempus descripti sinui verso, quippe qui lunæ translationem de tangente, factam a vi centripeta, metitur; atque adeo computari potest ex datis tum lunæ

 tempore

tempore periodico, tum diſtantia ejus a centro terræ. Spatium poſterius invenitur per experimenta pendulorum, quemadmodum docuit *Hugenius*. Inito itaque calculo, ſpatium prius ad ſpatium poſterius, ſeu vis centripeta lunæ in orbita ſua revolventis ad vim gravitatis in ſuperficie terræ, erit ut quadratum ſemidiametri terræ ad orbitæ ſemidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ ſuperius oſtenduntur, vis centripeta lunæ in orbita ſua revolventis ad vim lunæ centripetam prope terræ ſuperficiem. Vis itaque centripeta prope terræ ſuperficiem æqualis eſt vi gravitatis. Non ergo diverſæ ſunt vires, ſed una atque eadem: ſi enim diverſæ eſſent, corpora viribus conjunctis duplo celerius in terram caderent quam ex vi ſola gravitatis. Conſtat igitur vim illam centripetam, qua luna perpetuo de tangente vel trahitur vel impellitur & in orbita retinetur, ipſam eſſe vim gravitatis terreſtris ad lunam uſque pertingentem. Et rationi quidem conſentaneum eſt ut ad ingentes diſtantias illa ſeſe virtus extendat, cum nullam ejus ſenſibilem imminutionem, vel in altiſſimis montium cacuminibus, obſervare licet. Gravitat itaque luna in terram: quin & actione mutua, terra viciſſim in lunam æqualiter gravitat: id quod abunde quidem confirmatur in hac philoſophia, ubi agitur de maris æſtu & æquinoctiorum præceſſione, ab actione tum lunæ tum ſolis in terram oriundus. Hinc & illud tandem edocemur, qua nimirum lege vis gravitatis decreſcat in majoribus a tellure diſtantiis. Nam cum gravitas non diverſa ſit a vi centripeta lunari, hæc vero ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ; diminuetur & gravitas in eadem ratione.

Progrediamur jam ad planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa ſolem & ſecundariorum circa jovem & ſaturnum ſunt phænomena generis ejuſdem ac revolutio lunæ circa terram, quoniam porro demonſtratum eſt vires centripetas primariorum dirigi verſus centrum ſolis, ſecundariorum verſus centra jovis & ſaturni, quemadmodum lunæ vis centripeta verſus terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a centris, quemadmodum vis lunæ eſt ut quadratum diſtantiæ a terra: concludendum erit eandem eſſe naturam univerſis. Itaque ut luna gravitat in terram, & terra viciſſim in lunam; ſic etiam gravitabunt omnes ſecundarii in primarios ſuos, & primarii viciſſim

in

in ſecundarios; ſic & omnes primarii in ſolem, & ſol viciſſim in primarios.

Igitur ſol in planetas univerſos gravitat & univerſi in ſolem. Nam ſecundarii dum primarios ſuos comitantur, revolvuntur interea circum ſolem una cum primariis. Eodem itaque argumento, utriuſque generis planetæ gravitant in ſolem, & ſol in ipſos. Secundarios vero planetas in ſolem gravitare abunde inſuper conſtat ex inæqualitatibus lunaribus; quarum accuratiſſimam theoriam, admiranda ſagacitate patefactam, in tertio hujus operis libro expoſitam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquoverſum propagari ad ingentes uſque diſtantias, & ſeſe diffundere ad ſingulas circumjecti ſpatii partes, apertiſſime colligi poteſt ex motu cometarum; qui ab immenſis intervallis profecti feruntur in viciniam ſolis, & nonnunquam adeo ad ipſum proxime accedunt ut globum ejus, in periheliis ſuis verſantes, tantum non contingere videantur. Horum theoriam ab aſtronomis antehac fruſtra quæſitam, noſtro tandem ſæculo feliciter inventam & per obſervationes certiſſime demonſtratam, præſtantiſſimo noſtro auctori debemus. Patet igitur cometas in ſectionibus conicis umbilicos in centro ſolis habentibus moveri, & radiis ad ſolem ductis areas temporibus proportionales deſcribere. Ex hiſce vero phænomenis manifeſtum eſt & mathematice comprobatur, vires illas, quibus cometæ retinentur in orbitis ſuis, reſpicere ſolem & eſſe reciproce ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro. Gravitant itaque cometæ in ſolem: atque adeo ſolis vis attractiva non tantum ad corpora planetarum in datis diſtantiis & in eodem fere plano collocata, ſed etiam ad cometas in diverſiſſimis cælorum regionibus & in diverſiſſimis diſtantiis poſitos pertingit. Hæc igitur eſt natura corporum gravitantium, ut vires ſuas edant ad omnes diſtantias in omnia corpora gravitantia. Inde vero ſequitur, planetas & cometas univerſos ſe mutuo trahere, & in ſe mutuo graves eſſe: quod etiam confirmatur ex perturbatione jovis & ſaturni, aſtronomis non incognita, & ab actionibus horum planetarum in ſe invicem orienda; quin & ex motu illo lentiſſimo apſidum, qui ſupra memoratus eſt, quique a cauſa conſimili proficiſcitur.

Eo demum pervenimus ut dicendum ſit, & terram & ſolem & corpora omnia cæleſtia, quæ ſolem comitantur, ſe mutuo attrahere. Sin-

gulorum ergo particulæ quæque minimæ vires suas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quemadmodum supra de terrestribus ostensum est. In diversis autem distantiis, erunt & harum vires in duplicata ratione distantiarum reciproce: nam ex particulis hac lege trahentibus componi debere globos eadem lege trahentes, mathematice demonstratur.

Conclusiones præcedentes huic innituntur Axiomati, quod a nullis non recipitur philosophis; effectuum scilicet ejusdem generis, quorum nempe quæ cognoscuntur proprietates eædem sunt, easdem esse causas & easdem esse proprietates quæ nondum cognoscuntur. Quis enim dubitat, si gravitas sit causa descensus lapidis in *Europa*, quin eadem sit causa descensus in *America*? Si gravitas mutua fuerit inter lapidem & terram in *Europa*; quis negabit mutuam esse in *America*? Si vis attractiva lapidis & terræ componatur, in *Europa*, ex viribus attractivis partium; quis negabit similem esse compositionem in *America*? Si attractio terræ ad omnia corporum genera & ad omnes distantias propagetur in *Europa*; quidni pariter propagari dicamus in *America*? In hac regula fundatur omnis philosophia: quippe qua sublata nihil affirmare possimus de universis. Constitutio rerum singularum innotescit per observationes & experimenta: inde vero non nisi per hanc regulam de rerum universarum natura judicamus.

Jam cum gravia sint omnia corpora, quæ apud terram vel in cælis reperiuntur, de quibus experimenta vel observationes instituere licet; omnino dicendum erit, gravitatem corporibus universis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non sint extensa, mobilia & impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non sint gravia. Corporum extensio, mobilitas, & impenetrabilitas non nisi per experimenta innotescunt: eodem plane modo gravitas innotescit. Corpora omnia de quibus observationes habemus, extensa sunt & mobilia & impenetrabilia: & inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, extensa esse & mobilia & impenetrabilia. Ita corpora omnia sunt gravia, de quibus observationes habemus: & inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, gravia esse. Si quis dicat corpora stellarum inerrantium non esse gravia, quandoquidem eorum gravitas nondum est observata; eodem argumento dicere licebit

Pace Viri acutissimi non eadem videtur gravitati, quæ Extensioni, Impenetrabilitati, aliarumve proprietatum ad Corporis essentiam pertinentium ratio. Cum enim sublatâ extensi ideâ, tollatur simul omnis idea Corporis; positâ verò, ponatur Impenetrabilitas, divisibilitas &c, omninò necessarium est ubicunque dantur Corpora, ea ibidem esse extensa &c. Sed Gravitatem, & gravitationem mutuam Corporum, vel ad naturæ corporeæ ideam pertinere, vel ex illa evidenter fluere, quis dixerit? Nisi autem dicatur & statuatur; omnia Corpora esse gravia, & in se mutuò gravitantia, etiam in regionibus ab hoc rerum Systemate maximè dissitis, nec cum eo quidquam commune habentibus, illud est quod tantâ fiduciâ affirmare Philosophi cautioni non [illegible] videtur.

cebit neque extensa esse, nec mobilia, nec impenetrabilia, cum hæ fixarum affectiones nondum sint observatæ. Quid opus est verbis? inter primarias qualitates corporum universorum vel gravitas habebit locum; vel extensio, mobilitas, & impenetrabilitas non habebunt. Et natura rerum vel recte explicabitur per corporum gravitatem, vel non recte explicabitur per corporum extensionem, mobilitatem, & impenetrabilitatem.

Audio nonnullos hanc improbare conclusionem, & de occultis qualitatibus nescio quid mussitare. Gravitatem scilicet occultum esse quid, perpetuo argutari solent; occultas vero causas procul esse ablegandas a philosophia. His autem facile respondetur; occultas esse causas, non illas quidem quarum existentia per observationes clarissime demonstratur, sed has solum quarum occulta est & ficta existentia nondum vero comprobata. Gravitas ergo non erit occulta causa motuum cælestium; siquidem ex phænomenis ostensum est, hanc virtutem revera existere. Hi potius ad occultas confugiunt causas; qui nescio quos vortices, materiæ cujusdam prorsus fictitiæ & sensibus omnino ignotæ, motibus iisdem regendis præficiunt.

Ideone autem gravitas occulta causa dicetur, eoque nomine rejicietur e philosophia, quod causa ipsius gravitatis occulta est & nondum inventa? Qui sic statuunt, videant nequid statuant absurdi, unde totius tandem philosophiæ fundamenta convellantur. Etenim causæ continuo nexu procedere solent a compositis ad simpliciora: ubi ad causam simplicissimam perveneris, jam non licebit ulterius progredi. Causæ igitur simplicissimæ nulla dari potest mechanica explicatio: si daretur enim, causa nondum esset simplicissima. Has tu proinde causas simplicissimas appellabis occultas, & exulare jubebis? Simul vero exulabunt & ab his proxime pendentes & quæ ab illis porro pendent, usque dum a causis omnibus vacua fuerit & probe purgata philosophia. ‖

Sunt qui gravitatem præter naturam esse dicunt, & miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam esse volunt, cum in physica præternaturales causæ locum non habeant. Huic ineptæ prorsus objectioni diluendæ, quæ & ipsa philosophiam subruit universam, vix operæ pretium est immorari. Vel enim gravitatem corporibus omnibus inditam esse negabunt, quod tamen dici non potest: vel eo

nomine

‖ Hic tamen nonnihil esse videtur minus accurate dictum. Alia enim est ratio proprietatum s. affectionum Corporis in ipso Corpore veluti terminatarum; alia vero affectionum, s. actionum, quae in actione, aut effectu extra Corpus sita sunt. Priores causae dici possunt, aut proprietates dici possunt, posteriores non item, sunt s. potius, Effectus + Operationes: Jam autem hujus generis est omnino Gravitatio mutua Corporum, quae ideo non tam Causa, quam Effectus, factum, phaenomenon dici debet, cujus causa est vera adhucdum Occulta. Et utinam ad hunc modum semper loquerentur Newtoniani, a quo non abludit ipse omni Elogio + Epitheto major NEWTON hujus operis eximii pag. ultima.

nomine præter naturam eſſe affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque adeo ex cauſis mechanicis originem non habeat. Dantur certe primariæ corporum affectiones; quæ, quoniam ſunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon & hæ omnes ſint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint vero qualis ſit deinde futura philoſophia.

Nonnulli ſunt quibus hæc tota phyſica cæleſtis vel ideo minus placet, quod cum *Carteſii* dogmatibus pugnare & vix conciliari poſſe videatur. His ſua licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam ſibi concedi poſtulant. Newtonianam itaque philoſophiam, quæ nobis verior habetur, retinere & amplecti licebit, & cauſas ſequi per phænomena comprobatas, potius quam fictas & nondum comprobatas. Ad veram philoſophiam pertinet, rerum naturas ex cauſis vere exiſtentibus derivare: eas vero leges quærere, quibus voluit ſummus opifex hunc mundi pulcherrimum ordinem ſtabilire; non eas quibus potuit, ſi ita viſum fuiſſet. Rationi enim conſonum eſt, ut a pluribus cauſis, ab invicem nonnihil diverſis, idem poſſit effectus proficiſci: hæc autem vera erit cauſa, ex qua vere atque actu proficiſcitur; reliquæ locum non habent in philoſophia vera. In horologiis automatis idem indicis horarii motus vel ab appenſo pondere vel ab intus concluſo elatere oriri poteſt. Quod ſi oblatum horologium revera ſit inſtructum pondere; ridebitur qui finget elaterem, & ex hypotheſi ſic præpropere conficta motum indicis explicare ſuſcipiet: oportuit enim internam machinæ fabricam penitius perſcrutari, ut ita motus propoſiti principium verum exploratum habere poſſet. Idem vel non abſimile feretur judicium de philoſophis illis, qui materia quadam ſubtiliſſima cælos eſſe repletos, hanc autem in vortices indeſinenter agi voluerunt. Nam ſi phænomenis vel accuratiſſime ſatisfacere poſſent ex hypotheſibus ſuis; veram tamen philoſophiam tradidiſſe, & veras cauſas motuum cæleſtium inveniſſe nondum dicendi ſunt; niſi vel has revera exiſtere, vel ſaltem alias non exiſtere demonſtraverint. Igitur ſi oſtenſum fuerit, univerſorum corporum attractionem habere verum locum in rerum natura; quinetiam oſtenſum fuerit, qua ratione motus omnes cæleſtes abinde ſolutionem recipiant; vana fuerit & merito deridenda

objectio,

objectio, si quis dixerit eosdem motus per vortices explicari debere: etiamsi id fieri posse vel maxime concesserimus. Non autem concedimus: nequeunt enim ullo pacto phænomena per vortices explicari; quod ab auctore nostro abunde quidem & clarissimis rationibus evincitur; ut somnis plus æquo indulgeant oporteat, qui ineptissimo figmento resarciendo, novisque porro commentis ornando infelicem operam addicunt.

Si corpora planetarum & cometarum circa solem deferantur a vorticibus; oportet corpora delata & vorticum partes proxime ambientes eadem velocitate eademque cursus determinatione moveri, & eandem habere densitatem, vel eandem vim inertiæ pro mole materiæ. Constat vero planetas & cometas, dum versantur in iisdem regionibus cælorum, velocitatibus variis variaque cursus determinatione moveri. Necessario itaque sequitur, ut fluidi cælestis partes illæ, quæ sunt ad easdem distantias a sole, revolvantur eodem tempore in plagas diversas cum diversis velocitatibus: etenim alia opus erit directione & velocitate, ut transire possint planetæ; alia, ut transire possint cometæ. Quod cum explicari nequeat; vel fatendum erit, universa corpora cælestia non deferri a materia vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos esse non ab uno eodemque vortice, sed a pluribus qui ab invicem diversi sint, idemque spatium soli circumjectum pervadant.

Si plures vortices in eodem spatio contineri, & sese mutuo penetrare motibusque diversis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent esse conformes delatorum corporum motibus, qui sunt summe regulares, & peraguntur in sectionibus conicis nunc valde eccentricis, nunc ad circulorum proxime formam accedentibus; jure quærendum erit, qui fieri possit, ut iidem integri conserventur nec ab actionibus materiæ occursantis per tot sæcula quicquam perturbentur. Sane si motus hi fictitii sunt magis compositi & difficilius explicantur, quam veri illi motus planetarum & cometarum; frustra mihi videntur in philosophiam recipi: omnis enim causa debet esse effectu suo simplicior. Concessa fabularum licentia, affirmaverit aliquis planetas omnes & cometas circumcingi atmosphæris, adinstar telluris nostræ; quæ quidem hypothesis rationi magis consentanea videbitur quam hypothesis vorticum. Affirmaverit deinde has at-

mosphæras, ex natura sua, circa solem moveri & sectiones conicas describere; qui sane motus multo facilius concipi potest, quam consimilis motus vorticum se invicem permeantium. Denique planetas ipsos & cometas circa solem deferri ab atmosphæris suis credendum esse statuat, & ob repertas motuum cælestium causas triumphum agat. Quisquis autem hanc fabulam rejiciendam esse putet, idem & alteram fabulam rejiciet: nam ovum non est ovo similius, quam hypothesis atmosphærarum hypothesi vorticum.

Docuit *Galilæus*, lapidis projecti & in parabola moti deflexionem a cursu rectilineo oriri a gravitate lapidis in terram, ab occulta scilicet qualitate. Fieri tamen potest ut alius aliquis, nasi acutioris, philosophus causam aliam comminiscatur. Finget igitur ille materiam quandam subtilem, quæ nec visu, nec tactu, neque ullo sensu percipitur, versari in regionibus quæ proxime contingunt telluris superficiem. Hanc autem materiam, in diversas plagas, variis & plerumque contrariis motibus ferri, & lineas parabolicas describere contendet. Deinde vero lapidis deflexionem pulchre sic expediet, & vulgi plausum merebitur. Lapis, inquiet, in fluido illo subtili natat & cursui ejus obsequendo, non potest non eandem una semitam describere. Fluidum vero movetur in lineis parabolicis; ergo lapidem in parabola moveri necesse est. Quis nunc non mirabitur acutissimum hujusce philosophi ingenium, ex causis mechanicis, materia scilicet & motu, phænomena naturæ ad vulgi etiam captum præclare deducentis? Quis vero non subsannabit bonum illum *Galilæum*, qui magno molimine mathematico qualitates occultas, e philosophia feliciter exclusas, denuo revocare sustinuerit? Sed pudet nugis diutius immorari.

Summa rei huc tandem redit: cometarum ingens est numerus; motus eorum sunt summe regulares, & easdem leges cum planetarum motibus observant. Moventur in orbibus conicis, hi orbes sunt valde admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes cælorum partes, & planetarum regiones liberrime pertranseunt, & sæpe contra signorum ordinem incedunt. Hæc phænomena certissime confirmantur ex observationibus astronomicis: & per vortices nequeunt explicari. Imo, ne quidem cum vorticibus planetarum consistere possunt. Cometarum

metarum motibus omnino locus non erit; nisi materia illa fictitia penitus e cælis amoveatur.

Si enim planetæ circum solem a vorticibus devehuntur; vorticum partes, quæ proxime ambiunt unumquemque planetam, ejusdem densitatis erunt ac planeta; uti supra dictum est. Itaque materia illa omnis quæ contigua est orbis magni perimetro, parem habebit ac tellus densitatem: quæ vero jacet intra orbem magnum atque orbem saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut constitutio vorticis permanere possit, debent partes minus densæ centrum occupare, magis densæ longius a centro abire. Cum enim planetarum tempora periodica sint in ratione sesquiplicata distantiarum a sole, oportet partium vorticis periodos eandem rationem servare. Inde vero sequitur, vires centrifugas harum partium fore reciproce ut quadrata distantiarum. Quæ igitur majore intervallo distant a centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde si minus densæ fuerint, necesse est ut cedant vi majori, qua partes centro propiores ascendere conantur. Ascendent ergo densiores, descendent minus densæ, & locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit disposita atque ordinata materia fluida totius vorticis, ut conquiescere jam possit in æquilibrio constituta. Si bina fluida, quorum diversa est densitas, in eodem vase continentur; utique futurum est ut fluidum, cujus major est densitas, majore vi gravitatis infimum petat locum: & ratione non absimili omnino dicendum est, densiores vorticis partes majore vi centrifuga petere supremum locum. Tota igitur illa & multo maxima pars vorticis, quæ jacet extra telluris orbem, densitatem habebit atque adeo vim inertiæ pro mole materiæ, quæ non minor erit quam densitas & vis inertiæ telluris: inde vero cometis trajectis orietur ingens resistentia, & valde admodum sensibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitus sistere atque absorbere posse merito videatur. Constat autem ex motu cometarum prorsus regulari, nullam ipsos resistentiam pati quæ vel minimum sentiri potest; atque adeo neutiquam in materiam ullam incursare, cujus aliqua sit vis resistendi, vel proinde cujus aliqua sit densitas seu vis inertiæ. Nam resistentia mediorum oritur vel ab inertia materiæ fluidæ, vel a defectu lubricitatis. Quæ oritur a defectu lubricitatis, admodum exigua est; & sane vix observari potest in fluidis vulgo notis, nisi valde

tenacia fuerint adinstar olei & mellis. Resistentia quæ sentitur in aëre, aqua, hydrargyro, & hujusmodi fluidis non tenacibus fere tota est prioris generis; & minui non potest per ulteriorem quemcunque gradum subtilitatis, manente fluidi densitate vel vi inertiæ, cui semper proportionalis est hæc resistentia; quemadmodum clarissime demonstratum est ab auctore nostro in peregregia resistentiarum theoria, quæ paulo nunc accuratius exponitur, hac secunda vice, & per experimenta corporum cadentium plenius confirmatur.

Corpora progrediendo motum suum fluido ambienti paulatim communicant, & communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Est itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus vero communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, est ut fluidi densitas; ergo retardatio seu resistentia erit ut eadem fluidi densitas; neque ullo pacto tolli potest, nisi a fluido ad partes corporis posticas recurrente restituatur motus amissus. Hoc autem dici non poterit, nisi impressio fluidi in corpus ad partes posticas æqualis fuerit impressioni corporis in fluidum ad partes anticas, hoc est, nisi velocitas relativa qua fluidum irruit in corpus a tergo, æqualis fuerit velocitati qua corpus irruit in fluidum, id est, nisi velocitas absoluta fluidi recurrentis duplo major fuerit quam velocitas absoluta fluidi propulsi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli potest fluidorum resistentia, quæ oritur ab eorundem densitate & vi inertiæ. Itaque concludendum erit; fluidi cælestis nullam esse vim inertiæ, cum nulla sit vis resistendi: nullam esse vim qua motus communicetur, cum nulla sit vis inertiæ: nullam esse vim qua mutatio quælibet vel corporibus singulis vel pluribus inducatur, cum nulla sit vis qua motus communicetur; nullam esse omnino efficaciam, cum nulla sit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc hypothesin, quæ fundamento plane destituitur, quæque naturæ rerum explicandæ ne minimum quidem inservit, ineptissimam vocare liceat & philosopho prorsus indignam. Qui cælos materia fluida repletos esse volunt, hanc vero non inertem esse statuunt; hi verbis tollunt vacuum, re ponunt. Nam cum hujusmodi materia fluida ratione nulla secerni possit ab inani spatio; disputatio tota fit de rerum nominibus, non de naturis. Quod si aliqui sint adeo usque dediti materiæ, ut spatium a corporibus vacuum nullo pacto admit-

admittendum credere velint; videamus quo tandem oporteat illo pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, mundi per omnia pleni constitutionem ex voluntate dei profectam esse, propter eum finem, ut operationibus naturæ subsidium præsens haberi posset ab æthere subtilissimo cuncta permeante & implente; quod tamen dici non potest, siquidem jam ostensum est ex cometarum phænomenis, nullam esse hujus ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate dei profectam esse, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, siquidem diversa mundi constitutio eodem argumento pariter stabiliri posset: vel denique non dicent ex voluntate dei profectam esse, sed ex necessitate quadam naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces sordidas gregis impurissimi. Hi sunt qui somniant fato universa regi, non providentia; materiam ex necessitate sua semper & ubique extitisse, infinitam esse & æternam. Quibus positis, erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum necessitate omnino pugnat. Erit etiam immota: nam si necessario moveatur in plagam aliquam determinatam, cum determinata aliqua velocitate; pari necessitate movebitur in plagam diversam cum diversa velocitate; in plagas autem diversas, cum diversis velocitatibus, moveri non potest; oportet igitur immotam esse. Neutiquam profecto potuit oriri mundus, pulcherrima formarum & motuum varietate distinctus, nisi ex liberrima voluntate cuncta providentis & gubernantis dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illæ omnes quæ dicuntur naturæ leges: in quibus multa sane sapientissimi consilii, nulla necessitatis apparent vestigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, sed observando atque experiendo addiscere debemus. Qui vere physicæ principia legesque rerum, sola mentis vi & interno rationis lumine fretum, invenire se posse confidit; hunc oportet vel statuere mundum ex necessitate fuisse, legesque propositas ex eadem necessitate sequi; vel si per voluntatem dei constitutus sit ordo naturæ, se tamen, homuncionem misellum, quid optimum factu sit perspectum habere. Sana omnis & vera philosophia fundatur in phænomenis rerum: quæ si nos vel invitos & reluctantes ad hujusmodi principia deducunt, in quibus clarissime cernuntur consilium optimum & dominium summum sapientissimi & potentissimi entis; non erunt hæc ideo non admittenda principia, quod quibusdam forsan hominibus minus grata sint futura.

 tura.

tura. His vel miracula vel qualitates occultæ dicantur, quæ displicent: verum nomina malitiose indita non sunt ipsis rebus vitio vertenda; nisi illud fateri tandem velint, utique debere philosophiam in atheismo fundari. Horum hominum gratia non erit labefactanda philosophia, siquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos & æquos judices præstantissima philosophandi ratio, quæ fundatur in experimentis & observationibus. Huic vero, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc opere præclaro illustrissimi nostri auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque problemata enodantis, & ad ea porro pertingentis ad quæ nec spes erat humanam mentem assurgere potuisse, merito admirantur & suspiciunt quicunque paulo profundius in hisce rebus versati sunt. Claustris ergo reseratis, aditum nobis aperuit ad pulcherrima rerum mysteria. Systematis mundani compagem elegantissimam ita tandem patefecit & penitius perspectandam dedit; ut nec ipse, si nunc revivisceret, rex *Alphonsus* vel simplicitatem vel harmoniæ gratiam in ea desideraret. Itaque naturæ majestatem propius jam licet intueri, & dulcissima contemplatione frui, conditorem vero ac dominum universorum impensius colere & venerari, qui fructus est philosophiæ multo uberrimus. Cæcum esse oportet, qui ex optimis & sapientissimis rerum structuris non statim videat fabricatoris omnipotentis infinitam sapientiam & bonitatem: insanum, qui profiteri nolit.

Extabit igitur eximium NEWTONI opus adversus atheorum impetus munitissimum præsidium: neque enim alicunde felicius, quam ex hac pharetra, contra impiam catervam tela depromperis. Hoc sensit pridem, & in pereruditis concionibus anglice latineque editis, primus egregie demonstravit vir in omni literarum genere præclarus idemque bonarum artium fautor eximius RICHARDUS BENTLEIUS, seculi sui & academiæ nostræ magnum ornamentum, collegii nostri *S. Trinitatis* magister dignissimus & integerrimus. Huic ego me pluribus nominibus obstrictum fateri debeo: huic & tuas quæ debentur gratias, lector benevole, non denegabis. Is enim, cum a longo tempore celeberrimi auctoris amicitia intima frueretur, (qua etiam apud posteros censeri non minoris æstimat, quam propriis scriptis quæ literato orbi in deliciis sunt inclarescere) amici simul famæ & scien-

tiarum incremento consuluit. Itaque cum exemplaria prioris editionis rarissima admodum & immani pretio coëmenda superessent; suasit ille crebris efflagitationibus, & tantum non objurgando perpulit denique virum præstantissimum, nec modestia minus quam eruditione summa insignem, ut novam hanc operis editionem, per omnia elimatam denuo & egregiis insuper accessionibus ditatam, suis sumptibus & auspiciis prodire pateretur: mihi vero, pro jure suo, pensum non ingratum demandavit, ut quam posset emendate id fieri curarem.

Cantabrigiæ,
Maii 12. 1713.

ROGERUS COTES collegii *S. Trinitatis* socius,
astronomiæ & philosophiæ experimentalis
professor *Plumianus*.

AUCTORIS

AUCTORIS PRÆFATIO IN EDITIONEM TERTIAM.

IN *editione hacce tertia, quam* Henricus Pemberton M. D. *vir harum rerum peritissimus curavit, nonnulla in libro secundo de resistentia mediorum paulo fusius explicantur quam antea, & adduntur experimenta nova de resistentia gravium quæ cadunt in aëre. In libro tertio argumentum quo lunam in orbe suo per gravitatem retineri probatur, paulo fusius exponitur: & novæ adduntur observationes de proportione diametrorum Jovis ad invicem a D.* Poundio *factæ. Adduntur etiam observationes aliquot cometæ illius qui anno 1680 apparuit, a D.* Kirk *mense Novembri in* Germania *habitæ, quæ nuper ad manus nostras venerunt, & quarum ope constet quam prope orbes parabolici motibus cometarum respondent. Et orbita cometæ illius, computante* Halleio, *paulo accuratius determinatur quam antea, idque in ellipsi. Et ostenditur cometam in hac orbita elliptica, per novem cælorum signa, non minus accurate cursum peregisse, quam solent planetæ in orbitis ellipticis per astronomiam definitis moveri. Orbis etiam cometæ qui anno 1723 apparuit, a D.* Bradleio *astronomiæ apud* Oxonienses *professore computatus adjicitur.*

IS. NEWTON

Dabam *Londini*
Jan. 12. 1725-6.

INDEX CAPITUM
TOTIUS OPERIS.

DE

DE MOTU CORPORUM LIBER SECUNDUS.

DE MUNDI SYSTEMATE LIBER TERTIUS

CORRIGENDA.

IN carmine Halleii *vers.* 9. *leg.* Sidereos.

PAG. 115. *l.* 21. *leg.* xxxiv. *P.* 124. *l. antepenult. leg.* $\sqrt{P^n - A^n}$. *P.* 144. *l.* 5. *a fine leg.* descendendo currant. *P.* 145. *l.* 15, 16. *leg.* eundum. *P.* 151. *l.* 16. *leg.* singulis. *P.* 181. *l.* 9. *leg.* LM. *P.* 246. *l.* 3. *pone comma post* $-2A$. P. 259. l. 9. *dele inferius comma* P. 268 l. 7. *dele* in *P.* *P.* 283. *l.* 8. *leg Cas.* *P.* 291. *l* 3. *leg.* in progressione. P. 302. *l.* 11. *leg. Ca.* *P.* 371. *l.* 10. *leg.* ad *PO×A*. *P.* 391. *l.* 11. *leg.* perfectioribus. *P.* 416 l 2. *post* 9 *pone punctum.* P. 427. l. 8. *leg.* luminarium. *Ibid. l.* 11. *leg.* fit. *P.* 446. *l.* 18. *leg.* 3^{iv}. P. 448. l. 13, 17. *leg.* 9. 0827646. *P.* 469. *l.* 13. *leg.* semidiametris. *P.* 487. *l.* 7. *leg.* divisas. *P.* 488. *in figura secunda jungantur* S, B *recta.* *P.* 498. *l.* 5. *leg.* $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ *sine commate. Ibid.* l. 7. *a fine leg.* $\frac{1}{10}BF$. *P.* 500. *l.* 25. *leg.* 84021. *P.* 502. *in columna prima tabulæ leg.* d. h. ′ *P.* 503. *l.* 23, 28. *leg.* ♍. *P.* 510. *l.* 6. *leg.* comatas. *P.* 520. *l. penult. in columna loc. observ. leg.* ♉. *P.* 523. *in secunda columna tabulæ superioris l.* 4. *leg.* 2. 53. 12. *in quarta columna l.* 19. *leg.* 5. 16. 53. *in sexta columna l.* 19. *leg.* 5. 16. 50.

PHILO-

Philoſophiæ Naturalis
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

Quantitas materiæ eſt menſura ejuſdem orta ex illius denſitate et magnitudine conjunctim.

AER denſitate duplicata, in ſpatio etiam duplicato, fit quadruplus; in triplicato ſextuplus. Idem intellige de nive & pulveribus per compreſſionem vel liquefactionem condenſatis. Et par eſt ratio corporum omnium, quæ per cauſas quaſcunque diverſimode condenſantur. Medii interea, ſi quod fuerit, interſtitia partium libere pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem quantitatem ſub nomine corporis vel maſſæ in ſequentibus paſſim intelligo. Innoteſcit ea per corporis cujuſque pondus: Nam ponderi proportionalem eſſe reperi per experimenta pendulorum accuratiſſime inſtituta, uti poſthac docebitur.

DEFINITIO II.

Quantitas motus eſt menſura ejuſdem orta ex velocitate et quantitate materiæ conjunctim.

Motus totius eſt ſumma motuum in partibus ſingulis; ideoque in corpore duplo majore, æquali cum velocitate, duplus eſt, & dupla cum velocitate quadruplus.

DEFINITIONES.

DEFINITIO III.

Materiæ vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neque differt quicquam ab inertia massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ fit, ut corpus omne de statu suo vel quiescendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine significantissimo vis inertiæ dici possit. Exercet vero corpus hanc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam facta; estque exercitium illud sub diverso respectu & resistentia & impetus: Resistentia, quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; impetus, quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficulter cedendo, conatur statum obstaculi illius mutare. Vulgus resistentiam quiescentibus & impetum moventibus tribuit: sed motus & quies, uti vulgo concipiuntur, respectu solo distinguuntur ab invicem; neque semper vere quiescunt, quæ vulgo tanquam quiescentia spectantur.

DEFINITIO IV.

Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Consistit hæc vis in actione sola, neque post actionem permanet in corpore. Perseverat enim corpus in statu omni novo per solam vim inertiæ. Est autem vis impressa diversarum originum, ut ex ictu, ex pressione, ex vi centripeta.

Vis

DEFINITIO V.

Vis centripeta est, qua corpora versus punctum aliquod, tanquam ad centrum, undique trahuntur, impelluntur, vel utcunque tendunt.

Hujus generis est gravitas, qua corpora tendunt ad centrum terræ; vis magnetica, qua ferrum petit magnetem; & vis illa, quæcunque sit, qua planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in lineis curvis revolvi coguntur. Lapis, in funda circumactus, a circumagente manu abire conatur; & conatu suo fundam distendit, eoque fortius quo celerius revolvitur; &, quamprimum dimittitur, avolat. Vim conatui illi contrariam, qua funda lapidem in manum perpetuo retrahit & in orbe retinet, quoniam in manum ceu orbis centrum dirigitur, centripetam appello. Et par est ratio corporum omnium, quæ in gyrum aguntur. Conantur ea omnia a centris orbium recedere; & nisi adsit vis aliqua conatui isti contraria, qua cohibeantur & in orbibus retineantur, quamque ideo centripetam appello, abibunt in rectis lineis uniformi cum motu. Projectile, si vi gravitatis destitueretur, non deflecteretur in terram, sed in linea recta abiret in cœlos; idque uniformi cum motu, si modo aëris resistentia tolleretur. Per gravitatem suam retrahitur a cursu rectilineo & in terram perpetuo flectitur, idque magis vel minus pro gravitate sua & velocitate motus. Quo minor fuerit ejus gravitas pro quantitate materiæ, vel major velocitas quacum projicitur, eo minus deviabit a cursu rectilineo & longius perget. Si globus plumbeus, data cum velocitate secundum lineam horizontalem a montis alicujus vertice vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in linea curva ad distantiam duorum milliarium, priusquam in terram decideret: hic dupla cum velocitate quasi duplo longius pergeret, & decupla cum velocitate quasi decuplo longius: si modo aëris resistentia tolleretur. Et augendo velocitatem augeri posset pro lubitu distantia in quam projiceretur, & minui curvatura lineæ quam describeret, ita ut tandem caderet ad distantiam graduum decem vel triginta vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circuiret vel de-

nique ut in cœlos abiret, & motu abeundi pergeret in infinitum. Et eadem ratione, qua projectile vi gravitatis in orbem flecti posset & terram totam circuire, potest & luna vel vi gravitatis, si modo gravis sit, vel alia quacunque vi, qua in terram urgeatur, retrahi semper a cursu rectilineo terram versus, & in orbem suum flecti: & sine tali vi luna in orbe suo retineri non potest. Hæc vis, si justo minor esset, non satis flecteret lunam de cursu rectilineo: si justo major, plus satis flecteret, ac de orbe terram versus deduceret. Requiritur quippe, ut sit justæ magnitudinis: & Mathematicorum est invenire vim, qua corpus in dato quovis orbe data cum velocitate accurate retineri possit; & vicissim invenire viam curvilineam, in quam corpus e dato quovis loco data cum velocitate egressum a data vi flectatur. Est autem vis hujus centripetæ quantitas trium generum, absoluta, acceleratrix, & motrix.

DEFINITIO VI.

Vis centripetæ quantitas absoluta est mensura ejusdem major vel minor pro efficacia causæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.

Ut vis magnetica pro mole magnetis vel intensione virtutis major in uno magnete, minor in alio.

DEFINITIO VII.

Vis centripetæ quantitas acceleratrix est ipsius mensura velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti virtus magnetis ejusdem major in minori distantia, minor in majori: vel vis gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus altorum montium, atque adhuc minor (ut posthac patebit) in majoribus distantiis a globo terræ; in æqualibus autem distantiis eadem undique, propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) sublata aëris resistentia, æqualiter accelerat.

DEFINI-

DEFINITIO VIII.

Vis centripetæ quantitas motrix est ipsius mensura proportionalis motui, quem dato tempore generat.

Uti pondus majus in majore corpore, minus in minore; & in corpore eodem majus prope terram, minus in cœlis. Hæc quantitas est corporis totius centripetentia seu propensio in centrum, & (ut ita dicam) pondus; & innotescit semper per vim ipsi contrariam & æqualem, qua descensus corporis impediri potest.

Hasce virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires motrices, acceleratrices, & absolutas; & distinctionis gratia referre ad corpora centrum petentia, ad corporum loca, & ad centrum virium: nimirum vim motricem ad corpus, tanquam conatum totius in centrum ex conatibus omnium partium compositum; & vim acceleratricem ad locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca singula in circuitu diffusam, ad movenda corpora quæ in ipsis sunt; vim autem absolutam ad centrum, tanquam causa aliqua præditum, sine qua vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; sive causa illa sit corpus aliquod centrale (quale est magnes in centro vis magneticæ, vel terra in centro vis gravitantis) sive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat est hic conceptus: Nam virium causas & sedes physicas jam non expendo.

Est igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate & ex quantitate materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice & ex quantitate ejusdem materiæ conjunctim. Nam summa actionum vis acceleratricis in singulas corporis particulas est vis motrix totius. Unde juxta superficiem terræ, ubi gravitas acceleratrix seu vis gravitans in corporibus universis eadem est, gravitas motrix seu pondus est ut corpus: at si in regiones ascendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque semper ut corpus & gravitas acceleratrix conjunctim. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor est, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel sextuplo minus.

DEFINITIONES.

Porro attractiones & impulsus eodem sensu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem attractionis, impulsus, vel propensionis cujuscunque in centrum, indifferenter & pro se mutuo promiscue usurpo; has vires non physice sed mathematice tantum considerando. Unde caveat lector, ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem physicam alicubi definire, vel centris (quæ sunt puncta mathematica) vires vere & physice tribuere; si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixero.

Scholium.

Hactenus voces minus notas, quo sensu in sequentibus accipiendæ sint, explicare visum est. Tempus, spatium, locus & motus, sunt omnibus notissima. Notandum tamen, quod vulgus quantitates hasce non aliter quam ex relatione ad sensibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit easdem in absolutas & relativas, veras & apparentes, mathematicas & vulgares distingui.

I. Tempus absolutum, verum, & mathematicum, in se & natura sua sine relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur duratio: Relativum, apparens, & vulgare est sensibilis & externa quævis durationis per motum mensura (seu accurata seu inæquabilis) qua vulgus vice veri temporis utitur; ut hora, dies, mensis, annus.

II. Spatium absolutum, natura sua sine relatione ad externum quodvis, semper manet similare & immobile: Relativum est spatii hujus mensura seu dimensio quælibet mobilis, quæ a sensibus nostris per situm suum ad corpora definitur, & a vulgo pro spatio immobili usurpatur: uti dimensio spatii subterranei, aërii vel cœlestis definita per situm suum ad terram. Idem sunt spatium absolutum & relativum, specie & magnitudine; sed non permanent idem semper numero. Nam si terra, verbi gratia, moveatur, spatium aëris nostri, quod relative & respectu terræ semper manet idem, nunc erit una pars spatii absoluti in quam aër transit, nunc alia pars ejus; & sic absolute mutabitur perpetuo.

III. Locus

III. Locus eſt pars ſpatii quam corpus occupat, eſtque pro ratione ſpatii vel abſolutus vel relativus. Pars, inquam, ſpatii; non ſitus corporis, vel ſuperficies ambiens. Nam ſolidorum æqualium æquales ſemper ſunt loci; Superficies autem ob diſſimilitudinem figurarum ut plurimum inæquales ſunt; Situs vero proprie loquendo quantitatem non habent, neque tam ſunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem eſt cum ſumma motuum partium; hoc eſt, tranſlatio totius de ſuo loco eadem eſt cum ſumma tranſlationum partium de locis ſuis; ideoque locus totius idem eſt cum ſumma locorum partium, & propterea internus & in corpore toto.

IV. Motus abſolutus eſt tranſlatio corporis de loco abſoluto in locum abſolutum, relativus de relativo in relativum. Sic in navi quæ velis paſſis fertur, relativus corporis locus eſt navigii regio illa in qua corpus verſatur, ſeu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæque adeo movetur una cum navi: & quies relativa eſt permanſio corporis in eadem illa navis regione vel parte cavitatis. At quies vera eſt permanſio corporis in eadem parte ſpatii illius immoti, in qua navis ipſa una cum cavitate ſua & contentis univerſis movetur. Unde ſi terra vere quieſcat, corpus, quod relative quieſcit in navi, movebitur vere & abſolute ea cum velocitate, qua navis movetur in terra. Sin terra etiam moveatur; orietur verus & abſolutus corporis motus, partim ex terræ motu vero in ſpatio immoto, partim ex navis motu relativo in terra. Et ſi corpus etiam moveatur relative in navi; orietur verus ejus motus, partim ex vero motu terræ in ſpatio immoto, partim ex relativis motibus tum navis in terra tum corporis in navi: & ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in terra. Ut ſi terræ pars illa, ubi navis verſatur, moveatur vere in orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoque feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; nauta autem ambulet in navi orientem verſus cum velocitatis parte una: movebitur nauta vere & abſolute in ſpatio immoto cum velocitatis partibus 10001 in orientem, & relative in terra occidentem verſus cum velocitatis partibus novem.

Tempus abſolutum a relativo diſtinguitur in Aſtronomia per æquationem temporis vulgi. Inæquales enim ſunt dies naturales, qui vulgo tanquam æquales pro menſura temporis habentur. Hanc inæqua-

DEFINITIONES. inæqualitatem corrigunt Astronomi, ut ex veriore tempore mensurent motus cœlestes. Possibile est, ut nullus sit motus æquabilis, quo tempus accurate mensuretur. Accelerari & retardari possunt motus omnes, sed fluxus temporis absoluti mutari nequit. Eadem est duratio seu perseverantia existentiæ rerum, sive motus sint celeres, sive tardi, sive nulli: proinde hæc a mensuris suis sensibilibus merito distinguitur, & ex iisdem colligitur per æquationem astronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis phænomenis necessitas, tum per experimentum horologii oscillatorii, tum etiam per eclipses satellitum Jovis evincitur.

Ut ordo partium temporis est immutabilis, sic etiam ordo partium spatii. Moveantur hæ de locis suis, & movebuntur (ut ita dicam) de seipsis. Nam tempora & spatia sunt sui ipsorum & rerum omnium quasi loca. In tempore quoad ordinem successionis, in spatio quoad ordinem situs, locantur universa. De illorum essentia est ut sint loca: & loca primaria moveri absurdum est. Hæc sunt igitur absoluta loca; & solæ translationes de his locis sunt absoluti motus.

Verum quoniam hæ spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per sensus nostros distingui; earum vice adhibemus mensuras sensibiles. Ex positionibus enim & distantiis rerum a corpore aliquo, quod spectamus ut immobile, definimus loca universa: deinde etiam & omnes motus æstimamus cum respectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iisdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum absolutorum relativis utimur; nec incommode in rebus humanis: in philosophicis autem abstrahendum est a sensibus. Fieri etenim potest, ut nullum revera quiescat corpus, ad quod loca motusque referantur.

Distinguuntur autem quies & motus absoluti & relativi ab invicem per proprietates suas & causas & effectus. Quietis proprietas est, quod corpora vere quiescentia quiescunt inter se. Ideoque cum possibile sit, ut corpus aliquod in regionibus fixarum, aut longe ultra, quiescat absolute; sciri autem non possit ex situ corporum ad invicem in regionibus nostris, horumne aliquod ad longinquum illud datam positionem servet necne; quies vera ex horum situ inter se definiri nequit.

Motus proprietas est, quod partes, quæ datas servant positiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam gyrantium partes omnes conantur recedere ab axe motus, & progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium singularum. Motis igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relative quiescunt. Et propterea motus verus & absolutus definiri nequit per translationem e vicinia corporum, quæ tanquam quiescentia spectantur. Debent enim corpora externa non solum tanquam quiescentia spectari, sed etiam vere quiescere. Alioquin inclusa omnia, præter translationem e vicinia ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; & sublata illa translatione non vere quiescent, sed tanquam quiescentia solummodo spectabuntur. Sunt enim ambientia ad inclusa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, sine translatione de vicinia corticis, ceu pars totius, movetur.

Præcedenti proprietati affinis est, quod moto loco movetur una locatum: ideoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci sui motum. Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, sunt partes solummodo motuum integrorum & absolutorum: & motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco suo primo, & motu loci hujus de loco suo, & sic deinceps; usque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo nautæ supra memorato. Unde motus integri & absoluti non nisi per loca immota definiri possunt: & propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia supra retuli. Loca autem immota non sunt, nisi quæ omnia ab infinito in infinitum datas servant positiones ad invicem; atque adeo semper manent immota, spatiumque constituunt quod immobile appello.

Causæ, quibus motus veri & relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur, nisi per vires in ipsum corpus motum impressas: at motus relativus generari & mutari potest sine viribus impressis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimantur in alia solum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa, in qua hujus quies vel motus relativus consistit. Rursum motus verus a viribus in corpus motum impressis semper muta-

DEFINITIONES.

tur; at motus relativus ab his viribus non mutatur neceſſario. Nam ſi eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, ſic imprimantur, ut ſitus relativus conſervetur, conſervabitur relatio in qua motus relativus conſiſtit. Mutari igitur poteſt motus omnis relativus, ubi verus conſervatur, & conſervari ubi verus mutatur; & propterea motus verus in ejuſmodi relationibus minime conſiſtit.

Effectus, quibus motus abſoluti & relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt vires recedendi ab axe motus circularis. Nam in motu circulari nude relativo hæ vires nullæ ſunt, in vero autem & abſoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si pendeat ſitula a filo prælongo, agaturque perpetuo in orbem, donec filum a contorſione admodum rigeſcat, dein impleatur aqua, & una cum aqua quieſcat; tum vi aliqua ſubitanea agatur motu contrario in orbem, & filo ſe relaxante, diutius perſeveret in hoc motu; ſuperficies aquæ ſub initio plana erit, quemadmodum ante motum vaſis: At poſtquam vas, vi in aquam paulatim impreſſa, effecit ut hæc quoque ſenſibiliter revolvi incipiat; recedet ipſa paulatim a medio, aſcendetque ad latera vaſis, figuram concavam induens, (ut ipſe expertus ſum) & incitatiore ſemper motu aſcendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vaſe temporibus peragendo, quieſcat in eodem relative. Indicat hic aſcenſus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum innoteſcit & menſuratur motus aquæ circularis verus & abſolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vaſe, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam aſcendendo ad latera vaſis, ſed plana manebat, & propterea illius verus motus circularis nondum inceperat. Poſtea vero, ubi aquæ motus relativus decrevit, aſcenſus ejus ad latera vaſis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monſtrabat motum illius circularem verum perpetuo creſcentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quieſcebat in vaſe relative. Quare conatus iſte non pendet a tranſlatione aquæ reſpectu corporum ambientium, & propterea motus circularis verus per tales tranſlationes definiri nequit. Unicus eſt corporis cujuſque revolventis motus vere circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui reſpondens: motus autem relativi pro variis relationibus ad externa innumeri ſunt; & relationum

inſtar,

instar, effectibus veris omnino destituuntur, nisi quatenus verum illum & unicum motum participant. Unde & in systemate eorum, qui cœlos nostros infra cœlos fixarum in orbem revolvi volunt, & planetas secum deferre; singulæ cœlorum partes, & planetæ qui relative quidem in cœlis suis proximis quiescunt, moventur vere. Mutant enim positiones suas ad invicem (secus quam fit in vere quiescentibus) unaque cum cœlis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur. DEFINITIONES.

Quantitates relativæ non sunt igitur eæ ipsæ quantitates, quarum nomina præ se ferunt, sed sunt earum mensuræ illæ sensibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco quantitatum mensuratarum utitur. At si ex usu definiendæ sunt verborum significationes; per nomina illa temporis, spatii, loci & motus proprie intelligendæ erunt hæ mensuræ sensibiles; & sermo erit insolens & pure mathematicus, si quantitates mensuratæ hic intelligantur. Proinde vim inferunt sacris literis, qui voces hasce de quantitatibus mensuratis ibi interpretantur. Neque minus contaminant mathesin & philosophiam, qui quantitates veras cum ipsarum relationibus & vulgaribus mensuris confundunt.

Motus quidem veros corporum singulorum cognoscere, & ab apparentibus actu discriminare, difficillimum est; propterea quod partes spatii illius immobilis, in quo corpora vere moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata. Nam argumenta desumi possunt, partim ex motibus apparentibus qui sunt motuum verorum differentiæ, partim ex viribus quæ sunt motuum verorum causæ & effectus. Ut si globi duo, ad datam ab invicem distantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innotesceret ex tensione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari posset. Deinde si vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum simul imprimerentur, innotesceret ex aucta vel diminuta fili tensione augmentum vel decrementum motus; & inde tandem inveniri possent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augeretur; id est, facies posticæ, sive quæ in motu circulari sequuntur. Cognitis autem faciebus quæ sequuntur,

DEFINITIONES. & faciebus oppositis quæ præcedunt, cognosceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri posset & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret externum & sensibile quocum globi conferri possent. Si jam constituerentur in spatio illo corpora aliqua longinqua datam inter se positionem servantia, qualia sunt stellæ fixæ in regionibus cœlorum: sciri quidem non posset ex relativa globorum translatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus esset motus. At si attenderetur ad filum, & deprehenderetur tensionem ejus illam ipsam esse quam motus globorum requireret; concludere liceret motum esse globorum, & corpora quiescere; & tum demum ex translatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum causis, effectibus, & apparentibus differentiis colligere, & contra ex motibus seu veris seu apparentibus eorum causas & effectus, docebitur fusius in sequentibus. Hunc enim in finem tractatum sequentem composui.

AXIOMATA,

SIVE

LEGES MOTUS.

LEX I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

PRojectilia perseverant in motibus suis, nisi quatenus a resistentia aëris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari, nisi quatenus ab aëre retardatur. Majora autem planetarum & cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

LEX II.

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successive impressa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur) si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel oblique oblique adjicitur, & cum eo secundum utriusque determinationem componitur.

LEX

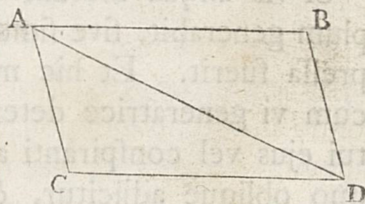
LEX III.

Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam funis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem, ac lapidem versus equum; tantumque impediet progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi sua quomodocunque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutuæ) subibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, sed motuum; scilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciproce proportionales. Obtinet etiam hæc lex in attractionibus, ut in scholio proximo probabitur.

COROLLARIUM I.

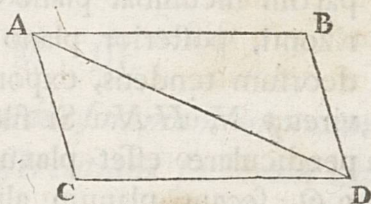
Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.



Si corpus dato tempore, vi sola *M* in loco *A* impressa, ferretur uniformi cum motu ab *A* ad *B*; & vi sola *N* in eodem loco impressa, ferretur ab *A* ad *C*: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraque feretur corpus illud eodem tempore in diagonali ab *A* ad *D*. Nam quoniam vis *N* agit secundum lineam *AC* ipsi *BD* parallelam, hæc vis per legem II nihil mutabit

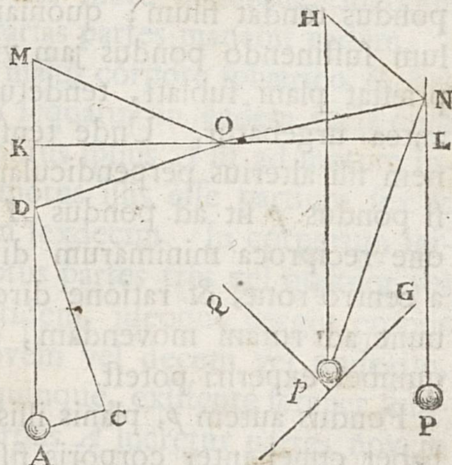
mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *BD* a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *BD*, sive vis *N* imprimatur, sive non; atque ideo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa *BD*. Eodem argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in linea *CD*, & idcirco in utriusque lineæ concursu *D* reperiri necesse est. Perget autem motu rectilineo ab *A* ad *D* per legem I.

COROLLARIUM II.



Et hinc patet compositio vis directæ AD *ex viribus quibusvis obliquis* AB *&* BD, *& vicissim resolutio vis cujusvis directæ* AD *in obliquas quascunque* AB *&* BD. *Quæ quidem compositio & resolutio abunde confirmatur ex mechanica.*

Ut si de rotæ alicujus centro *O* exeuntes radii inæquales *OM*, *ON* filis *MA*, *NP* sustineant pondera *A* & *P*, & quærantur vires ponderum ad movendam rotam: Per centrum *O* agatur recta *KOL* filis perpendiculariter occurrens in *K* & *L*, centroque *O* & intervallorum *OK*, *OL* majore *OL* describatur circulus occurrens filo *MA* in *D*: & actæ rectæ *OD* parallella sit *AC*, & perpendicularis *DC*. Quoniam nihil refert, utrum filorum puncta *K*, *L*, *D* affixa sint an non affixa ad planum rotæ; pondera idem valebunt, ac si suspenderentur a punctis *K* & *L* vel *D* & *L*. Ponderis autem *A* exponatur vis tota per lineam *AD*, & hæc resolvetur in vires *AC*, *CD*, quarum *AC* trahendo radium *OD* directe a centro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera *DC*, trahendo radium *DO* perpendiculariter,



idem

idem valet, ac si perpendiculariter traheret radium *OL* ipsi *OD* æqualem; hoc est, idem atque pondus *P*, si modo pondus illud sit ad pondus *A* ut vis *DC* ad vim *DA*, id est (ob similia triangula *ADC*, *DOK*,) ut *OK* ad *OD* seu *OL*. Pondera igitur *A* & *P*, quæ sunt reciproce ut radii in directum positi *OK* & *OL*, idem pollebunt, & sic consistent in æquilibrio: quæ est proprietas notissima libræ, vectis, & axis in peritrochio. Sin pondus alterutrum sit majus quam in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major.

Quod si pondus *p* ponderi *P* æquale partim suspendatur filo *Np*, partim incumbat plano obliquo *pG*: agantur *pH*, *NH*, prior horizonti, posterior plano *pG* perpendicularis; & si vis ponderis *p* deorsum tendens, exponatur per lineam *pH*, resolvi potest hæc in vires *pN*, *HN*. Si filo *pN* perpendiculare esset planum aliquod *pQ*, secans planum alterum *pG* in linea ad horizontem parallela; & pondus *p* his planis *pQ*, *pG* solummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus *pN*, *HN*, perpendiculariter nimirum planum *pQ* vi *pN*, & planum *pG* vi *HN*. Ideoque si tollatur planum *pQ*, ut pondus tendat filum; quoniam filum sustinendo pondus jam vicem præstat plani sublati, tendetur illud eadem vi *pN*, qua planum antea urgebatur. Unde tensio fili hujus obliqui erit ad tensionem fili alterius perpendicularis *PN*, ut *pN* ad *pH*. Ideoque si pondus *p* sit ad pondus *A* in ratione, quæ componitur ex ratione reciproca minimarum distantiarum filorum suorum *pN*, *AM* a centro rotæ, & ratione directa *pH* ad *pN*; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque ideo se mutuo sustinebunt, ut quilibet experiri potest.

Pondus autem *p*, planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fissi facies internas: & inde vires cunei & mallei innotescunt: utpote cum vis qua pondus *p* urget planum *pQ* sit ad vim, qua idem vel gravitate sua vel ictu mallei impellitur

secundum

ſecundum lineam *p H* in plana, ut *p N* ad *p H*; atque ad vim, qua urget planum alterum *p G*, ut *p N* ad *NH*. Sed & vis cochleæ per ſimilem virium diviſionem colligitur; quippe quæ cuneus eſt a vecte impulſus. Uſus igitur corollarii hujus latiſſime patet, & late patendo veritatem ejus evincit; cum pendeat ex jam dictis mechanica tota ab auctoribus diverſimode demonſtrata. Ex hiſce enim facile derivantur vires machinarum, quæ ex rotis, tympanis, trochleis, vectibus, nervis tenſis & ponderibus directe vel oblique aſcendentibus, cæteriſque potentiis mechanicis componi ſolent, ut & vires tendinum ad animalium oſſa movenda.

COROLLARIUM III.

Quantitas motus quæ colligitur capiendo ſummam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter ſe.

Etenim actio eique contraria reactio æquales ſunt per legem III, ideoque per legem II æquales in motibus efficiunt mutationes verſus contrarias partes. Ergo ſi motus fiunt ad eandem partem; quicquid additur motui corporis fugientis, ſubducetur motui corporis inſequentis ſic, ut ſumma maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant; æqualis erit ſubductio de motu utriuſque, ideoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem.

Ut ſi corpus ſphæricum *A* ſit triplo majus corpore ſphærico *B*, habeatque duas velocitatis partes; & *B* ſequatur in eadem recta cum velocitatis partibus decem, ideoque motus ipſius *A* ſit ad motum ipſius *B*, ut ſex ad decem: ponantur motus illis eſſe partium ſex & partium decem, & ſumma erit partium ſexdecim. In corporum igitur concurſu, ſi corpus *A* lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinque, corpus *B* amittet partes totidem, ideoque perget corpus *A* poſt reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & *B* cum partibus ſeptem vel ſex vel quinque, exiſtente ſemper ſumma partium ſexdecim ut prius. Si corpus *A* lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, ideoque progrediatur poſt concurſum cum partibus quindecim vel ſexdecim vel ſeptendecim vel octodecim; corpus *B*, amittendo tot partes quot *A* lucratur,

AXIOMATA, SIVE

vel cum una parte progredietur amiſſis partibus novem, vel quieſcet amiſſo motu ſuo progreſſivo partium decem, vel cum una parte regredietur amiſſo motu ſuo & (ut ita dicam) una parte amplius, vel regredietur cum partibus duabus ob detractum motum progreſſivum partium duodecim. Atque ita ſummæ motuum conſpirantium 15+1 vel 16+0, & differentiæ contrariorum 17—1 & 18—2 ſemper erunt partium ſexdecim, ut ante concurſum & reflexionem. Cognitis autem motibus quibuſcum corpora poſt reflexionem pergent, invenietur cujuſque velocitas, ponendo eam eſſe ad velocitatem ante reflexionem, ut motus poſt eſt ad motum ante. Ut in caſu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium ſex ante reflexionem & partium octodecim poſtea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium ſex poſt reflexionem, dicendo, ut motus partes ſex ante reflexionem ad motus partes octodecim poſtea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes ſex poſtea.

Quod ſi corpora vel non ſphærica vel diverſis in rectis moventia incidant in ſe mutuo oblique, & requirantur eorum motus poſt reflexionem; cognoſcendus eſt ſitus plani a quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concurſus: dein corporis utriuſque motus (per Corol. II.) diſtinguendus eſt in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in ſe invicem ſecundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi ſunt iidem poſt reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ ſunt ſic, ut ſumma conſpirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex hujuſmodi reflexionibus oriri etiam ſolent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos caſus in ſequentibus non conſidero, & nimis longum eſſet omnia huc ſpectantia demonſtrare.

COROL-

COROLLARIUM IV.

Commune gravitatis centrum corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter se, non mutat statum suum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus & impedimentis externis) commune centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

Nam si puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & distantia eorum dividatur in ratione data, punctum dividens vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta. Hoc postea in lemmate XXIII ejusque corollario demonstratur, si punctorum motus fiant in eodem plano; & eadem ratione demonstrari potest, si motus illi non fiant in eodem plano. Ergo si corpora quotcunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod linea, horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione data. Similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur distantia centri communis corporum duorum & centri corporis tertii in data ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum commune trium & centrum quarti in data ratione, & sic in infinitum. Igitur in systemate corporum, quæ actionibus in se invicem aliisque omnibus in se extrinsecus impressis omnino vacant, ideoque moventur singula uniformiter in rectis singulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

Porro in systemate duorum corporum in se invicem agentium, cum distantiæ centrorum utriusque a communi gravitatis centro sint reciproce ut corpora; erunt motus relativi corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud vel ab eodem recedendi, æquales inter

ſe. Proinde centrum illud a motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque ideo ab actionibus horum corporum inter ſe, nec promovetur nec retardatur nec mutationem patitur in ſtatu ſuo quoad motum vel quietem. In ſyſtemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in ſe mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat ſtatum ſuum; & reliquorum, quibuſcum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; diſtantia autem horum duorum centrorum dividitur a communi corporum omnium centro in partes ſummis totalibus corporum quorum ſunt centra reciproce proportionales; ideoque centris illis duobus ſtatum ſuum movendi vel quieſcendi ſervantibus, commune omnium centrum ſervat etiam ſtatum ſuum: manifeſtum eſt quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter ſe nunquam mutat ſtatum ſuum quoad motum & quietem. In tali autem ſyſtemate actiones omnes corporum inter ſe, vel inter bina ſunt corpora, vel ab actionibus inter bina compoſitæ; & propterea communi omnium centro mutationem in ſtatu motus ejus vel quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in ſe invicem, vel quieſcit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter; perget idem, non obſtantibus corporum actionibus inter ſe, vel ſemper quieſcere, vel ſemper progredi uniformiter in directum; niſi a viribus in ſyſtema extrinſecus impreſſis deturbetur de hoc ſtatu. Eſt igitur ſyſtematis corporum plurium lex eadem, quæ corporis ſolitarii, quoad perſeverantiam in ſtatu motus vel quietis. Motus enim progreſſivus ſeu corporis ſolitarii ſeu ſyſtematis corporum ex motu centri gravitatis æſtimari ſemper debet.

COROLLARIUM V.

Corporum dato ſpatio incluſorum iidem ſunt motus inter ſe, ſive ſpatium illud quieſcat, ſive moveatur idem uniformiter in directum ſine motu circulari.

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & ſummæ tendentium ad contrarias, eædem ſunt ſub initio in utroque caſu (ex hypotheſi) & ex his ſummis vel differentiis oriuntur congreſſus

greſſus & impetus quibus corpora ſe mutuo feriunt. Ergo per legem II æquales erunt congreſſuum effectus in utroque caſu; & propterea manebunt motus inter ſe in uno caſu æquales motibus inter ſe in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo ſe habent in navi, ſive ea quieſcat, ſive moveatur uniformiter in directum.

COROLLARIUM VI.

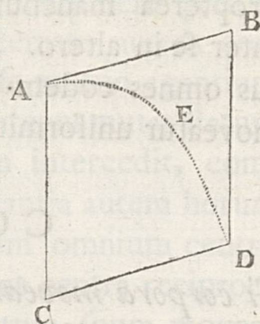
Si corpora moveantur quomodocunque inter ſe, & a viribus acceleratricibus æqualibus ſecundum lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter ſe, ac ſi viribus illis non eſſent incitata.

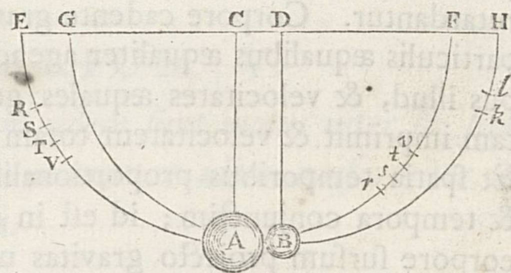
Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatibus movendorum corporum) & ſecundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per legem II. ideoque nunquam mutabunt poſitiones & motus eorum inter ſe.

Scholium.

Hactenus principia tradidi a mathematicis recepta & experientia multiplici confirmata. Per leges duas primas & corollaria duo prima *Galilæus* invenit deſcenſum gravium eſſe in duplicata ratione temporis, & motum projectilium fieri in parabola; conſpirante experientia, niſi quatenus motus illi per aëris reſiſtentiam aliquantulum retardantur. Corpore cadente gravitas uniformis, ſingulis temporis particulis æqualibus æqualiter agendo imprimit vires æquales in corpus illud, & velocitates æquales generat: & tempore toto vim totam imprimit & velocitatem totam generat tempori proportionalem. Et ſpatia temporibus proportionalibus deſcripta, ſunt ut velocitates & tempora conjunctim; id eſt in duplicata ratione temporum. Et corpore ſurſum projecto gravitas uniformis vires imprimit & velocitates aufert temporibus proportionales; ac tempora aſcendendi ad altitudines ſummas ſunt ut velocitates auferendæ, & altitudines illæ ſunt ut velocitates ac tempora conjunctim, ſeu in duplicata ratione velocitatum.

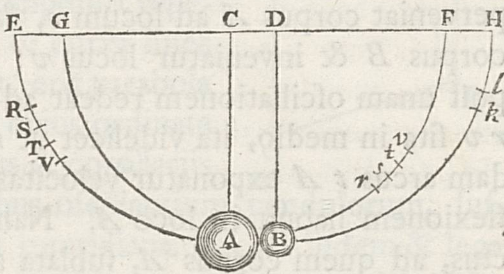
AXIOMATA, SIVE velocitatum. Et corporis secundum rectam quamvis projecti motus a projectione oriundus cum motu a gravitate oriundo componitur. Ut si corpus *A* motu solo projectionis dato tempore describere posset rectam *AB* & motu solo cadendi eodem tempore describere posset altitudinem *AC*: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & corpus illud motu composito reperietur in fine temporis in loco *D*; & curva linea *AED*, quam corpus illud describet, erit parabola quam recta *AB* tangit in *A*, & cujus ordinata *BD* est ut *ABq*. Ab iisdem legibus & corollariis pendent demonstrata de temporibus oscillantium pendulorum, suffragante horologiorum experientia quotidiana. Ex his iisdem & lege tertia *Christophorus Wrennus* eques auratus, *Johannes Wallisius S. T. D.* & *Christianus Hugenius*, ætatis superioris geometrarum facile principes, regulas congressuum & reflexionum durorum corporum seorsim invenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Regia* communicarunt, inter se (quoad has leges) omnino conspirantes: & primus quidem *Wallisius*, deinde *Wrennus* & *Hugenius* inventum prodiderunt. Sed & veritas comprobata est a *Wrenno* coram *Regia Societate* per experimentum pendulorum: quod etiam *Clarissimus Mariottus* libro integro exponere mox dignatus est. Verum, ut hoc experimentum cum theoriis ad amussim congruat, habenda est ratio, cum resistentiæ aëris, tum etiam vis elasticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora sphærica *A*, *B* filis parallelis & æqualibus *AC*, *BD*, a centris *C*, *D*. His centris & intervallis describantur semicirculi *EAF*, *GBH* radiis *CA*, *DB* bisecti. Trahatur corpus *A* ad arcûs *EAF* punctum quodvis *R*, & (subducto corpore *B*) demittatur inde, redeatque post unam oscillationem ad punctum *V*. Est *RV* retardatio ex resistentia aeris. Hujus *RV* fiat *ST* pars quarta sita in medio, ita scilicet ut *RS* & *TV* æquentur, sitque *RS* ad *ST* ut 3 ad 2. Et ista *ST* exhibebit retardationem in descensu ab *S* ad *A* quam





A quam proxime. Restituatur corpus *B* in locum suum. Cadat corpus *A* de puncto *S*, & velocitas ejus in loco reflexionis *A* sine errore sensibili tanta erit, ac si in vacuo cecidisset de loco *T*. Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcus *TA*. Nam velocitatem penduli in puncto infimo esse ut chordam arcus, quem cadendo descripsit, propositio est geometris notissima. Post reflexionem perveniat corpus *A* ad locum *s*, & corpus *B* ad locum *k*. Tollatur corpus *B* & inveniatur locus *v*; a quo si corpus *A* demittatur & post unam oscillationem redeat ad locum *r*, sit *st* pars quarta ipsius *rv* sita in medio, ita videlicet ut *rs* & *tv* æquentur; & per chordam arcus *tA* exponatur velocitas, quam corpus *A* proxime post reflexionem habuit in loco *A*. Nam *t* erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus *A*, sublata aeris resistentia, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus *k*, ad quem corpus *B* ascendit, & inveniendus locus *l*, ad quem corpus illud ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia, perinde ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus *A* (ut ita dicam) in chordam arcus *TA*, quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime ante reflexionem; deinde in chordam arcus *tA*, ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime post reflexionem. Et sic corpus *B* ducendum erit in chordam arcus *Bl*, ut habeatur motus ejus proxime post reflexionem. Et simili methodo, ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusque tam ante, quam post reflexionem; & tum demum conferendi sunt motus inter se & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, puta pedum octo vel duodecim vel sexdecim, concurrerent; reperi semper sine errore trium digitorum in mensuris, ubi corpora sibi mutuo directe occurrebant, æquales esse mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque ideo actionem & reactionem semper esse æquales. Ut si corpus *A* incidebat in corpus *B* quiescens cum novem partibus motus, & amissis septem partibus pergebat post reflexionem cum duabus; corpus *B* resiliebat cum partibus istis septem. Si corpora obviam ibant, *A* cum duodecim partibus & *B* cum sex, & redibat *A* cum duabus; redibat *B* cum octo, facta detractione partium quatuordecim utrinque. De motu ipsius *A* subducantur partes duodecim

decim & reſtabit nihil: ſubducantur aliæ partes duæ, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam: & ſic de motu corporis *B* partium ſex ſubducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quod ſi corpora ibant ad eandem plagam, *A* velocius cum partibus quatuordecim, & *B* tardius cum partibus quinque, & poſt reflexionem pergebat *A* cum quinque partibus; pergebat *B* cum quatuordecim, facta tranſlatione partium novem de *A* in *B*. Et ſic in reliquis. A congreſſu & colliſione corporum nunquam mutabatur quantitas motus, quæ ex ſumma motuum conſpirantium & differentia contrariorum colligebatur. Nam errorem digiti unius & alterius in menſuris tribuerim difficultati peragendi ſingula ſatis accurate. Difficile erat, tum pendula ſimul demittere ſic, ut corpora in ſe mutuo impingerent in loco infimo *AB*; tum loca *s*, *k* notare, ad quæ corpora aſcendebant poſt concurſum. Sed & in ipſis corporibus pendulis inæqualis partium denſitas, & textura aliis de cauſis irregularis, errores inducebant.



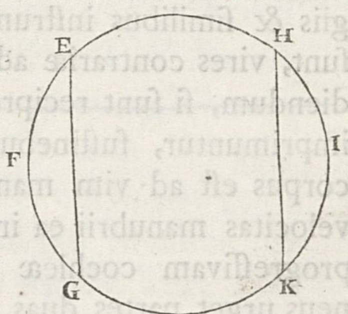
Porro nequis objiciat regulam, ad quam probandam inventum eſt hoc experimentum, præſupponere corpora vel abſolute dura eſſe, vel ſaltem perfecte elaſtica, cujuſmodi nulla reperiuntur in compoſitionibus naturalibus; addo quod experimenta jam deſcripta ſuccedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum a conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam ſi regula illa in corporibus non perfecte duris tentanda eſt, debebit ſolummodo reflexio minui in certa proportione pro quantitate vis elaſticæ. In theoria *Wrenni* & *Hugenii* corpora abſolute dura redeunt ab invicem cum velocitate congreſſus. Certius id affirmabitur de perfecte elaſticis. In imperfecte elaſticis velocitas reditus minuenda eſt ſimul cum vi elaſtica; propterea quod vis illa, (niſi ubi partes corporum ex congreſſu læduntur, vel extenſionem aliqualem quaſi ſub malleo patiuntur,) certa ac determinata ſit (quantum ſentio) faciatque ut corpora redeant ab invicem cum velocitate relativa, quæ ſit ad relativam velocitatem concurſus in data ratione. Id in pilis ex

lana

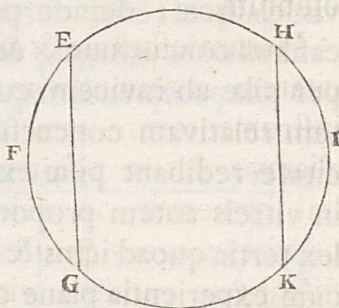
lana arcte conglomerata & fortiter constricta sic tentavi. Primum demittendo pendula & mensurando reflexionem, inveni quantitatem vis elasticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis casibus concursuum, & respondebant experimenta. Redibant semper pilæ ab invicem cum velocitate relativa, quæ esset ad velocitatem relativam concursus ut 5 ad 9 circiter. Eadem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex subere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto lex tertia quoad ictus & reflexiones per theoriam comprobata est, quæ cum experientia plane congruit.

In attractionibus rem sic breviter ostendo. Corporibus duobus quibusvis *A*, *B* se mutuo trahentibus, concipe obstaculum quodvis interponi, quo congressus eorum impediatur. Si corpus alterutrum *A* magis trahitur versus corpus alterum *B*, quam illud alterum *B* in prius *A*, obstaculum magis urgebitur pressione corporis *A* quam pressione corporis *B*; proindeque non manebit in æquilibrio. Prævalebit pressio fortior, facietque ut systema corporum duorum & obstaculi moveatur in directum in partes versus *B*, motuque in spatiis liberis semper accelerato abeat in infinitum. Quod est absurdum & legi primæ contrarium. Nam per legem primam debebit systema perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, proindeque corpora æqualiter urgebunt obstaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. Tentavi hoc in magnete & ferro. Si hæc in vasculis propriis sese contingentibus seorsim posita, in aqua stagnante juxta fluitent; neutrum propellet alterum, sed æqualitate attractionis utrinque sustinebunt conatus in se mutuos, ac tandem in æquilibrio constituta quiescent.

Sic etiam gravitas inter terram & ejus partes mutua est. Secetur terra *FI* plano quovis *EG* in partes duas *EGF* & *EGI*: & æqualia erunt harum pondera in se mutuo. Nam si plano alio *HK* quod priori *EG* parallelum sit, pars major *EGI* secetur in partes duas *EGKH* & *HKI*, quarum *HKI* æqualis sit parti prius abscissæ *EFG*: manifestum est quod pars media *EGKH* pondere proprio in neutram partium extremarum propendebit, sed inter utramque in



æquilibrio, ut ita dicam, ſuſpendetur, & quieſcet. Pars autem extrema *HKI* toto ſuo pondere incumbet in partem mediam, & urgebit illam in partem alteram extremam *EGF*; ideoque vis qua partium *HKI* & *EGKH* ſumma *EGI* tendit verſus partem tertiam *EGF*, æqualis eſt ponderi partis *HKI*, id eſt ponderi partis tertiæ *EGF*. Et propterea pondera partium duarum *EGI*, *EGF* in ſe mutuo ſunt æqualia, uti volui oſtendere. Et niſi pondera illa æqualia eſſent, terra tota in libero æthere fluitans ponderi majori cederet, & ab eo fugiendo abiret in infinitum.



Ut corpora in concurſu & reflexione idem pollent, quorum velocitates ſunt reciproce ut vires inſitæ: ſic in movendis inſtrumentis mechanicis agentia idem pollent & conatibus contrariis ſe mutuo ſuſtinent, quorum velocitates ſecundum determinationem virium æſtimatæ, ſunt reciproce ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia libræ, quæ oſcillante libra ſunt reciproce ut eorum velocitates ſurſum & deorſum: hoc eſt, pondera, ſi recta aſcendunt & deſcendunt, æquipollent, quæ ſunt reciproce ut punctorum a quibus ſuſpenduntur diſtantiæ ab axe libræ; ſin planis obliquis aliiſve admotis obſtaculis impedita aſcendunt vel deſcendunt oblique, æquipollent, quæ ſunt reciproce ut aſcenſus & deſcenſus, quatenus facti ſecundum perpendiculum: idque ob determinationem gravitatis deorſum. Similiter in trochlea ſeu polyſpaſto vis manus funem directe trahentis, quæ ſit ad pondus vel directe vel oblique aſcendens ut velocitas aſcenſus perpendicularis ad velocitatem manus funem trahentis, ſuſtinebit pondus. In horologiis & ſimilibus inſtrumentis, quæ ex rotulis commiſſis conſtructa ſunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum & impediendum, ſi ſunt reciproce ut velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, ſuſtinebunt ſe mutuo. Vis cochleæ ad premendum corpus eſt ad vim manus manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii ea in parte ubi a manu urgetur, ad velocitatem progreſſivam cochleæ verſus corpus preſſum. Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fiſſi ſunt ad vim mallei in cuneum, ut progreſſus cunei ſecundum determinationem vis a malleo in ipſum impreſſæ,

impressæ, ad velocitatem qua partes ligni cedunt cuneo, secundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par est ratio machinarum omnium. LEGES MOTUS.

Harum efficacia & usus in eo solo consistit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: Unde solvitur in omni aptorum instrumentorum genere problema, *Datum pondus data vi movendi*, aliamve datam resistentiam vi data superandi. Nam si machinæ ita formentur, ut velocitates agentis & resistentis sint reciproce ut vires; agens resistentiam sustinebit: & majori cum velocitatum disparitate eandem vincet. Certe si tanta sit velocitatum disparitas, ut vincatur etiam resistentia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter se labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem separandorum cohæsione & elevandorum ponderibus oriri solet; superata omni ea resistentia, vis redundans accelerationem motus sibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore resistente producet. Cæterum mechanicam tractare non est hujus instituti. Hisce volui tantum ostendere, quam late pateat quamque certa sit lex tertia motus. Nam si æstimetur agentis actio ex ejus vi & velocitate conjunctim; & similiter resistentis reactio æstimetur conjunctim ex ejus partium singularum velocitatibus & viribus resistendi ab earum attritione, cohæsione, pondere, & acceleratione oriundis; erunt actio & reactio, in omni instrumentorum usu, sibi invicem semper æquales. Et quatenus actio propagatur per instrumentum & ultimo imprimitur in corpus omne resistens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis semper erit contraria.

DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.

SECTIO I.

De methodo rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur.

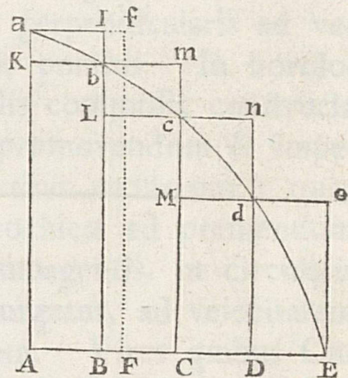
LEMMA I.

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito constanter tendunt, & ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quam pro data quavis differentia, fiunt ultimo æquales.

Si negas; fiant ultimo inæquales, & sit earum ultima differentia *D*. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro data differentia *D*: contra hypothesin.

LEMMA II.

Si in figura quavis AacE, *rectis* Aa, AE *& curva* acE *comprehensa, inscribantur parallelogramma quotcunque* Ab, Bc, Cd, &c. *sub basibus* AB, BC, CD, &c. *æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd, &c. *figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* aKbl, bLcm, cMdn, &c. *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes quas habent ad se invicem figura inscripta* AKbLcMdD, *circumscripta*



ſcripta AalbmcndoE, *&* *curvilinea* AabcdE, *ſunt rationes æqualitatis.*

Nam figuræ inſcriptæ & circumſcriptæ differentia eſt ſumma parallelogrammorum *Kl*, *Lm*, *Mn*, *Do*, hoc eſt (ob æquales omnium baſes) rectangulum ſub unius baſi *Kb* & altitudinum ſumma *Aa*, id eſt, rectangulum *ABla*. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus *AB* in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per lemma 1) figura inſcripta & circumſcripta & multo magis figura curvilinea intermedia fiunt ultimo æquales. *Q. E. D.*

LEMMA III.

Eædem rationes ultimæ ſunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB, BC, CD, &c. *ſunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim *AF* æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum *FAaf*. Hoc erit majus quam differentia figuræ inſcriptæ & figuræ circumſcriptæ; at latitudine ſua *AF* in infinitum diminuta, minus fiet dato quovis rectangulo. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſumma ultima parallelogrammorum evaneſcentium coincidit omni ex parte cum figura curvilinea.

Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evaneſcentium arcuum *ab*, *bc*, *cd*, &c. comprehenditur, coincidit ultimo cum figura curvilinea.

Corol. 3. Ut & figura rectilinea circumſcripta quæ tangentibus eorundem arcuum comprehenditur.

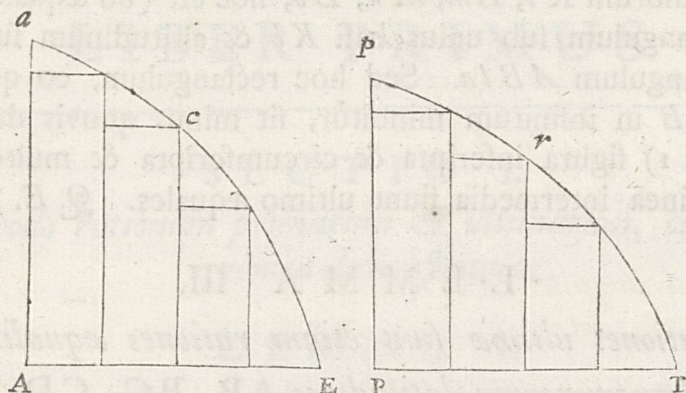
Corol. 4. Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros *acE*,) non ſunt rectilineæ, ſed rectilinearum limites curvilinei.

LEMMA IV.

Si in duabus figuris AacE, PprT, *inſcribantur (ut ſupra) duæ parallelogrammorum ſeries, ſitque idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una figura ad parallelo-*

gramma

gramma in altera, singulorum ad singula, sint eædem; dico quod figuræ duæ AacE, PprT, *sunt ad invicem in eadem illa ratione.*



Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (componendo) fit summa omnium ad summam omnium, & ita figura ad figuram; existente nimirum figura priore (per lemma III) ad summam priorem, & figura posteriore ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si duæ cujuscunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque suo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione. Nam si in lemmatis hujus figuris sumantur parallelogramma inter se ut partes, summæ partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atque ideo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultima ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est (per hypothesin) in ultima ratione partis ad partem.

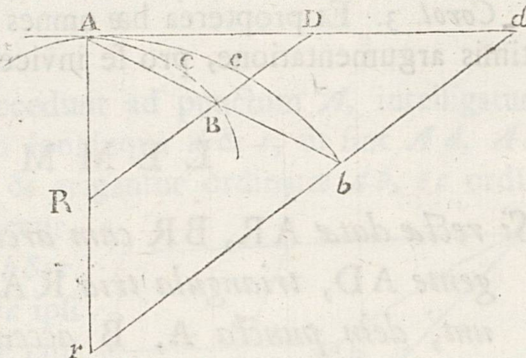
LEMMA V.

Similium figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea; & areæ sunt in duplicata ratione laterum.

LEMMA

LEMMA VI.

Si arcus quilibet positione datus ACB *subtendatur chorda* AB, *& in puncto aliquo* A, *in medio curvaturæ continuæ, tangatur a recta utrinque producta* AD; *dein puncta* A, B *ad invicem accedant & coëant; dico quod angulus* BAD, *sub chorda & tangente contentus, minuetur in infinitum & ultimo evanescet.*



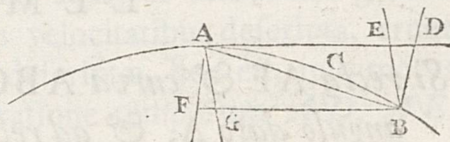
Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus *ACB* cum tangente *AD* angulum rectilineo æqualem, & propterea curvatura ad punctum *A* non erit continua, contra hypothesin.

LEMMA VII.

Iisdem positis; dico quod ultima ratio arcus, chordæ, & tangentis ad invicem est ratio æqualitatis.

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur semper *AB* & *AD* ad puncta longinqua *b* ac *d* produci, & secanti *BD* parallela agatur *bd*. Sitque arcus *Acb* semper similis arcui *ACB*. Et punctis *A*, *B* coeuntibus, angulus *dAb*, per lemma superius, evanescet; ideoque rectæ semper finitæ *Ab*, *Ad*, & arcus intermedius *Acb* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hisce semper proportionales rectæ *AB*, *AD*, & arcus intermedius *ACB* evanescent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde si per *B* ducatur tangenti parallela *BF*, rectam quamvis *AF* per *A* transeuntem perpetuo secans in *F*, hæc *BF* ultimo ad arcum evanescentem *ACB* rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo *AFBD* rationem semper habet æqualitatis ad *AD*.



Corol.

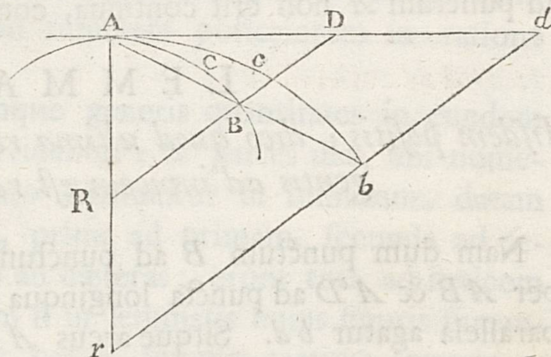
Corol. 2. Et si per *B* & *A* ducantur plures rectæ *BE*, *BD*, *AF*, *AG*, secantes tangentem *AD* & ipsius parallelam *BF*; ratio ultima abscissarum omnium *AD*, *AE*, *BF*, *BG*, chordæque & arcus *AB* ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA VIII.

Si rectæ datæ AR, BR *cum arcu* ACB, *chorda* AB *& tangente* AD, *triangula tria* RAB, RACB, RAD *constituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, & ultima ratio æqualitatis.*

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur semper *AB*, *AD*, *AR* ad puncta longinqua *b*, *d* & *r* produci, ipsique *RD* parallela agi *rbd*, & arcui *ACB* similis semper sit arcus *Acb*. Et coeuntibus punctis *A*, *B*, angulus *bAd* evanescet, & propterea triangula tria semper finita *rAb*, *rAcb*, *rAd* coincident, suntque eo nomine similia & æqualia. Unde & hisce semper similia & proportionalia *RAB*, *RACB*, *RAD* fient ultimo sibi invicem similia & æqualia. *Q. E. D.*



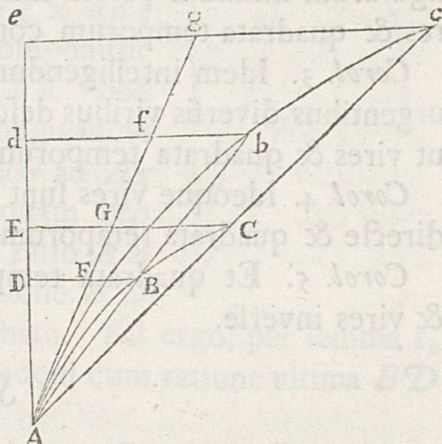
Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA IX.

Si recta AE *& curva* ABC *positione datæ se mutuo secent in angulo dato* A, *& ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim*

natim applicentur BD, CE, *curvæ occurrentes in* B, C, *dein puncta* B, C *simul accedant ad punctum* A: *dico quod areæ triangulorum* ABD, ACE *erunt ultimo ad invicem in duplicata ratione laterum.*

Etenim dum puncta *B, C* accedunt ad punctum *A*, intelligatur semper *AD* produci ad puncta longinqua *d* & *e*, ut sint *Ad*, *Ae* ipsis *AD*, *AE* proportionales, & erigantur ordinatæ *db*, *ec* ordinatis *DB*, *EC* parallelæ quæ occurrant ipsis *AB*, *AC* productis in *b* & *c*. Duci intelligatur, tum curva *Abc* ipsi *ABC* similis, tum recta *Ag*, quæ tangat curvam utramque in *A*, & secet ordinatim applicatas *DB*, *EC*, *db*, *ec* in *F*, *G*, *f*, *g*. Tum manente longitudine *Ae* coeant puncta *B*, *C* cum puncto *A*; & angulo *cAg* evanescente, coincident areæ curvilineæ *Abd*, *Ace* cum rectilineis *Afd*, *Age*; ideoque (per lemma v.) erunt in duplicata ratione laterum *Ad*, *Ae*: Sed his areis proportionales semper sunt areæ *ABD*, *ACE*, & his lateribus latera *AD*, *AE*. Ergo & areæ *ABD*, *ACE* sunt ultimo in duplicata ratione laterum *AD*, *AE*. *Q. E. D.*



LEMMA X.

Spatia quæ corpus urgente quacunque vi finita describit, sive vis illa determinata & immutabilis sit, sive eadem continuo augeatur vel continuo diminuatur, sunt ipso motus initio in duplicata ratione temporum.

Exponantur tempora per lineas *AD*, *AE*, & velocitates genitæ per ordinatas *DB*, *EC*; & spatia his velocitatibus descripta, erunt ut areæ *ABD*, *ACE* his ordinatis descriptæ, hoc est, ipso motus initio (per lemma IX) in duplicata ratione temporum *AD*, *AE*. *Q. E. D.*

Corol.

DE MOTU CORPORUM

Corol. 1. Et hinc facile colligitur, quod corporum ſimiles ſimilium figurarum partes temporibus proportionalibus deſcribentium errores, qui viribus quibuſvis æqualibus ad corpora ſimiliter applicatis generantur, & menſurantur per diſtantias corporum a figurarum ſimilium locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iiſdem proportionalibus ſine viribus iſtis pervenirent, ſunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proxime.

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus ad ſimiles figurarum ſimilium partes ſimiliter applicatis generantur, ſunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. Idem intelligendum eſt de ſpatiis quibuſvis quæ corpora urgentibus diverſis viribus deſcribunt. Hæc ſunt, ipſo motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires ſunt ut ſpatia, ipſo motus initio, deſcripta directe & quadrata temporum inverſe.

Corol. 5. Et quadrata temporum ſunt ut deſcripta ſpatia directe & vires inverſe.

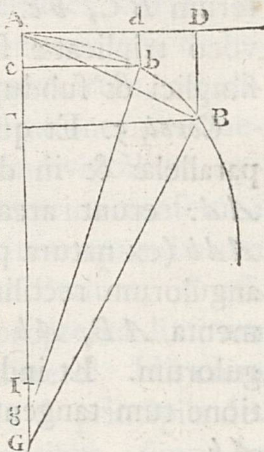
Scholium.

Si quantitates indeterminatæ diverſorum generum conferantur inter ſe, & earum aliqua dicatur eſſe ut eſt alia quævis directe vel inverſe: ſenſus eſt, quod prior augetur vel diminuitur in eadem ratione cum poſteriore, vel cum ejus reciproca. Et ſi earum aliqua dicatur eſſe ut ſunt aliæ duæ vel plures directe vel inverſe: ſenſus eſt, quod prima augetur vel diminuitur in ratione quæ componitur ex rationibus in quibus aliæ vel aliarum reciprocæ augentur vel diminuuntur. Ut ſi A dicatur eſſe ut B directe & C directe & D inverſe: ſenſus eſt, quod A augetur vel diminuitur in eadem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$ hoc eſt, quod A & $\frac{BC}{D}$ ſunt ad invicem in ratione data.

LEMMA XI.

Subtenſa evaneſcens anguli contactus, in curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactus habentibus, eſt ultimo in ratione duplicata ſubtenſæ arcus contermini.

Cas. 1. Sit arcus ille *AB*, tangens ejus *AD*, subtensa anguli contactus ad tangentem perpendicularis *BD*, subtensa arcus *AB*. Huic subtensæ *AB* & tangenti *AD* perpendiculares erigantur *AG*, *BG*, concurrentes in *G*; dein accedant puncta *D*, *B*, *G*, ad puncta *d*, *b*, *g*, sitque *J* intersectio linearum *BG*, *AG* ultimo facta ubi puncta *D*, *B* accedunt usque ad *A*. Manifestum est quod distantia *GJ* minor esse potest quam assignata quævis. Est autem (ex natura circulorum per puncta *ABG*, *Abg* transeuntium) *AB quad.* æquale *AG* x *BD*, & *Ab quad.* æquale *Ag* x *bd*; ideoque ratio *AB quad.* ad *Ab quad.* componitur ex rationibus *AG* ad *Ag* & *BD* ad *bd*. Sed quoniam *GJ* assumi potest minor longitudine quavis assignata, fieri potest ut ratio *AG* ad *Ag* minus differat a ratione æqualitatis quam pro differentia quavis assignata, ideoque ut ratio *AB quad.* ad *Ab quad.* minus differat a ratione *BD* ad *bd* quam pro differentia quavis assignata. Est ergo, per lemma 1, ratio ultima *AB quad.* ad *Ab quad.* eadem cum ratione ultima *BD* ad *bd*. *Q. E. D.*



Cas. 2. Inclinetur jam *BD* ad *AD* in angulo quovis dato, & eadem semper erit ratio ultima *BD* ad *bd* quæ prius, ideoque eadem ac *AB quad.* ad *Ab quad.* *Q. E. D.*

Cas. 3. Et quamvis angulus *D* non detur, sed recta *BD* ad datum punctum convergat, vel alia quacunque lege constituatur; tamen anguli *D*, *d* communi lege constituti ad æqualitatem semper vergent & propius accedent ad invicem quam pro differentia quavis assignata, ideoque ultimo æquales erunt, per lem. 1, & propterea lineæ *BD*, *bd* sunt in eadem ratione ad invicem ac prius. *Q. E. D.*

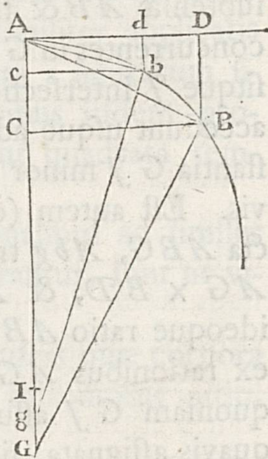
Corol. 1. Unde cum tangentes *AD*, *Ad*, arcus *AB*, *Ab*, & eorum sinus *BC*, *bc* fiant ultimo chordis *AB*, *Ab* æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut subtensæ *BD*, *bd*.

Corol. 2. Eorundem quadrata sunt etiam ultimo ut sunt arcuum sagittæ, quæ chordas bisecant & ad datum punctum convergunt. Nam sagittæ illæ sunt ut subtensæ *BD*, *bd*.

Corol. 3. Ideoque sagitta est in duplicata ratione temporis quo corpus data velocitate describit arcum.

DE MOTU CORPORUM

Corol. 4. Triangula rectilinea *AD B*, *Adb* ſunt ultimo in triplicata ratione laterum *AD*, *A d*, inque ſeſquiplicata laterum *D B*, *db*; utpote in compoſita ratione laterum *AD* & *D B*, *Ad* & *db* exiſtentia. Sic & triangula *ABC*, *Abc* ſunt ultimo in triplicata ratione laterum *B C*, *b c*. Rationem vero ſeſquiplicatam voco triplicatæ ſubduplicatam, quæ nempe ex ſimplici & ſubduplicata componitur.



Corol. 5. Et quoniam *D B*, *d b* ſunt ultimo parallelæ & in duplicata ratione ipſarum *AD*, *A d*: erunt areæ ultimæ curvilineæ *A D B*, *A d b* (ex natura parabolæ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum *A D B*, *A d b*; & ſegmenta *A B*, *A b* partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ & hæc ſegmenta erunt in triplicata ratione tum tangentium *A D*, *A d*; tum chordarum & arcuum *AB*, *A b*.

Scholium.

Cæterum in his omnibus ſupponimus angulum contactus nec infinite majorem eſſe angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus ſuis, nec iiſdem infinite minorem; hoc eſt, curvaturam ad punctum *A*, nec infinite parvam eſſe nec infinite magnam, ſeu intervallum *A J* finitæ eſſe magnitudinis. Capi enim poteſt *D B* ut AD^3: quo in caſu circulus nullus per punctum *A* inter tangentem *AD* & curvam *AB* duci poteſt, proindeque angulus contactus erit infinite minor circularibus. Et ſimili argumento ſi fiat *D B* ſucceſſive ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c. habebitur ſeries angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet poſterior eſt infinite minor priore. Et ſi fiat *DB* ſucceſſive ut AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia ſeries infinita angulorum contactus, quorum primus eſt ejuſdem generis cum circularibus, ſecundus infinite major, & quilibet poſterior infinite major priore. Sed & inter duos quoſvis ex his angulis poteſt ſeries utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inſeri, quorum quilibet poſterior erit infinite major minorve priore. Ut ſi inter terminos AD^2 & AD^3 inſeratur ſeries $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$,

$AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rurſus inter binos quoſvis angulos hujus ſeriei inſeri poteſt ſeries nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem.

Quæ de curvis lineis deque ſuperficiebus comprehenſis demonſtrata ſunt, facile applicantur ad ſolidorum ſuperficies curvas & contenta. Præmiſi vero hæc lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonſtrationes, more veterum geometrarum, ad abſurdum. Contractiores enim redduntur demonſtrationes per methodum indiviſibilium. Sed quoniam durior eſt indiviſibilium hypotheſis, & propterea methodus illa minus geometrica cenſetur; malui demonſtrationes rerum ſequentium ad ultimas quantitatum evaneſcentium ſummas & rationes, primaſque naſcentium, id eſt, ad limites ſummarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonſtrationes qua potui brevitate præmittere. His enim idem præſtatur quod per methodum indiviſibilium; & principiis demonſtratis jam tutius utemur. Proinde in ſequentibus, ſiquando quantitates tanquam ex particulis conſtantes conſideravero, vel ſi pro rectis uſurpavero lineolas curvas; nolim indiviſibilia, ſed evaneſcentia diviſibilia, non ſummas & rationes partium determinatarum, ſed ſummarum & rationum limites ſemper intelligi; vimque talium demonſtrationum ad methodum præcedentium lemmatum ſemper revocari.

Objectio eſt, quod quantitatum evaneſcentium nulla ſit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non eſt ultima, ubi evanuerunt, nulla eſt. Sed & eodem argumento æque contendi poſſet nullam eſſe corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non eſſe ultimam, ubi attingit, nullam eſſe. Et reſponſio facilis eſt: Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum & motus ceſſat, neque poſtea, ſed tunc cum attingit; id eſt, illam ipſam velocitatem quacum corpus attingit locum ultimum & quacum motus ceſſat. Et ſimiliter per ultimam rationem quantitatum evaneſcentium, intelligendam eſſe rationem quantitatum, non antequam evaneſcunt, non poſtea, ſed quacum evaneſcunt. Pariter & ratio prima naſcentium eſt ratio quacum naſcuntur. Et ſumma prima & ultima

est quacum esse (vel augeri aut minui) incipiunt & cessant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & cessantium. Cumque hic limes sit certus & definitus, problema est vere geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis geometricis determinandis ac demonstrandis legitime usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus, contra quam *Euclides* de incommensurabilibus, in libro decimo elementorum, demonstravit. Verum hæc objectio falsæ innititur hypothesi. Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant; & quas propius assequi possunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero transgredi, neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clarius intelligetur in infinite magnis. Si quantitates duæ quarum data est differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ seu maximæ quarum ista est ratio. In sequentibus, igitur siquando facili rerum conceptui consulens dixero quantitates quam minimas, vel evanescentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite.

SECTIO II.

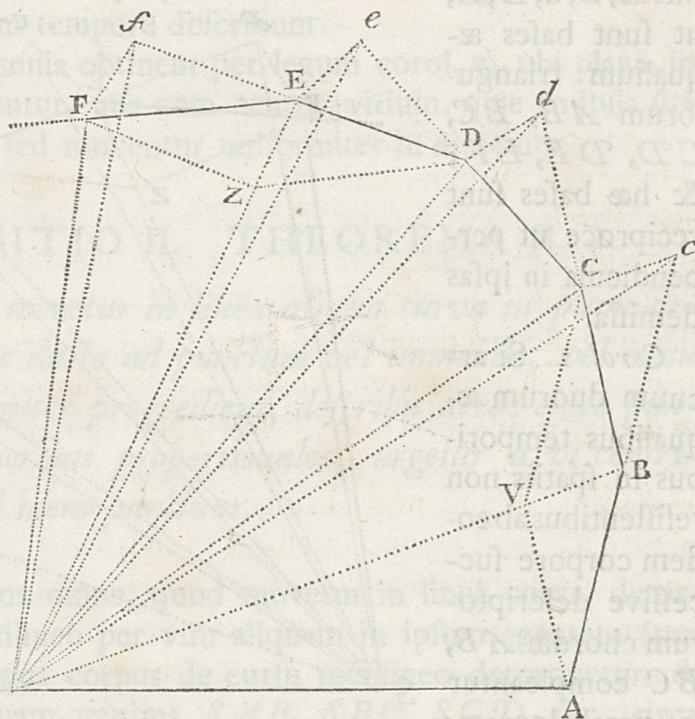
De inventione virium centripetarum.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.

Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte describat corpus vi insita rectam *AB*. Idem secunda temporis parte, si nil

nil impediret, recta pergeret ad *c*, (per leg. I.) describens lineam *Bc* æqualem ipsi *AB*; adeo ut radiis *AS*, *BS*, *cS* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *ASB*, *BSc*. Verum ubi corpus venit ad *B*, agat vis centripeta impulsu unico sed magno, efficiatque ut corpus de recta *Bc* declinet & pergat in recta *BC*. Ipsi *BS* parallela agatur *cC*, occurrens *BC* in *C*; & completa secunda temporis parte, corpus (per legum corol. I.) reperietur in *C*, in eodem plano cum triangulo *ASB*. Junge *SC*; & triangulum *SBC*, ob

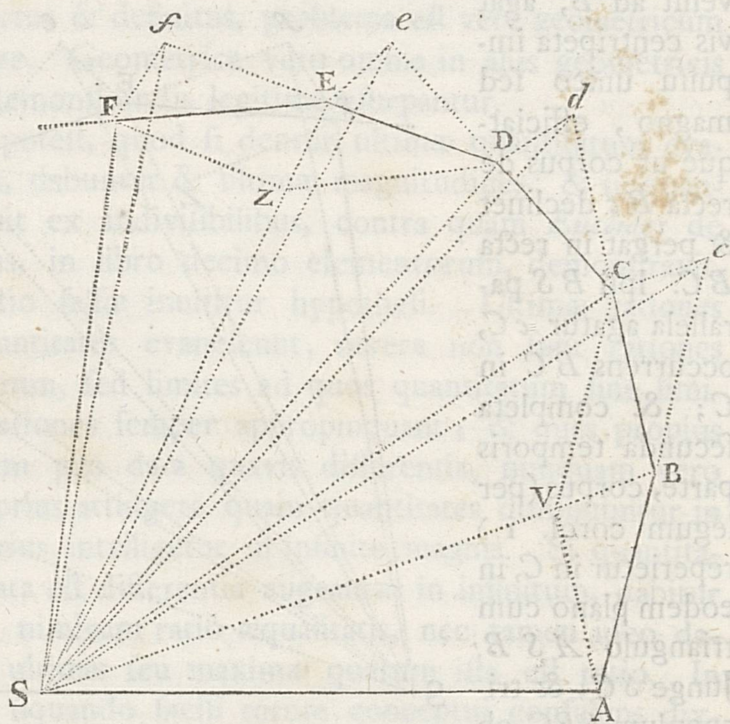


parallelas *SB*, *Cc*, æquale erit triangulo *SBc*, atque ideo etiam triangulo *SAB*. Simili argumento si vis centripeta successive agat in *C*, *D*, *E*, &c. faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas *CD*, *DE*, *EF*, &c. jacebunt hæ omnes in eodem plano; & triangulum *SCD* triangulo *SBC*, & *SDE* ipsi *SCD*, & *SEF* ipsi *SDE* æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto describuntur: & componendo, sunt arearum summæ quævis *SADS*, *SAFS* inter se, ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum; & eorum ultima perimeter *ADF*, (per corollarium quartum lemmatis tertii) erit linea curva: ideoque vis centripeta, qua corpus a tangente hujus curvæ perpetuo retrahitur, aget indesinenter; areæ vero quævis descriptæ *SADS*, *SAFS* temporibus descriptionum semper proportionales, erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales. *Q. E. D.*

Corol.

De Motu Corporum

Corol. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti est in spatiis non resistentibus reciproce ut perpendiculum a centro illo in orbis tangentem rectilineam demissum. Est enim velocitas in locis illis *A, B, C, D, E*, ut sunt bases æqualium triangulorum *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*; & hæ bases sunt reciproce ut perpendicula in ipsas demissa.



Corol. 2. Si arcuum duorum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus ab eodem corpore successive descriptorum chordæ *AB*, *BC* compleantur in parallelogrammum *ABCV*, & hujus diagonalis *BV* in ea positione quam ultimo habet ubi arcus illi in infinitum diminuuntur, producatur utrinque; transibit eadem per centrum virium.

Corol. 3. Si arcuum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus descriptorum chordæ *AB*, *BC* ac *DE*, *EF* compleantur in parallelogramma *ABCV*, *DEFZ*; vires in *B* & *E* sunt ad invicem in ultima ratione diagonalium *BV*, *EZ*, ubi arcus isti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus *BC* & *EF* componuntur (per legum corol. 1.) ex motibus *Bc*, *BV* & *Ef*, *EZ*: atqui *BV* & *EZ*, ipsis *Cc* & *Ff* æquales, in demonstratione propositionis hujus generabantur ab impulsibus vis centripetæ in *B* & *E*, ideoque sunt his impulsibus proportionales.

Corol. 4. Vires quibus corpora quælibet in spatiis non resistentibus a motibus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbes curvos sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus descriptorum sagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, & chordas bisecant ubi

ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. Nam hæ ſagittæ ſunt ſemiſſes diagonalium, de quibus egimus in corollario tertio. Liber Primus.

Corol. 5. Ideoque vires eædem ſunt ad vim gravitatis, ut hæ ſagittæ ad ſagittas horizonti perpendiculares arcuum parabolicorum, quos projectilia eodem tempore deſcribunt.

Corol. 6. Eadem omnia obtinent per legum corol. v. ubi plana, in quibus corpora moventur, una cum centris virium, quæ in ipſis ſita ſunt, non quieſcunt, ſed moventur uniformiter in directum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Corpus omne, quod movetur in linea aliqua curva in plano deſcripta, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, deſcribit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur a vi centripeta tendente ad idem punctum.

Caſ. 1. Nam corpus omne, quod movetur in linea curva, detorquetur de curſu rectilineo per vim aliquam in ipſum agentem (per leg. 1.) Et vis illa, qua corpus de curſu rectilineo detorquetur, & cogitur triangula quam minima *SAB*, *SBC*, *SCD*, &c. circa punctum immobile *S* temporibus æqualibus æqualia deſcribere, agit in loco *B* ſecundum lineam parallelam ipſi *cC* (per prop. xl. lib. 1. elem. & leg. 11.) hoc eſt, ſecundum lineam *BS*; & in loco *C* ſecundum lineam ipſi *dD* parallelam, hoc eſt, ſecundum lineam *SC*, &c. Agit ergo ſemper ſecundum lineas tendentes ad punctum illud immobile *S*. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Et, per legum corollarium quintum, perinde eſt, ſive quieſcat ſuperficies, in qua corpus deſcribit figuram curvilineam, ſive moveatur eadem una cum corpore, figura deſcripta, & puncto ſuo *S* uniformiter in directum.

Corol. 1. In ſpatiis vel mediis non reſiſtentibus, ſi areæ non ſunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concurſum radiorum; ſed inde declinant in conſequentia, ſeu verſus plagam in quam fit motus, ſi modo arearum deſcriptio acceleratur: ſin retardatur, declinant in antecedentia.

Corol. 2. In mediis etiam resistentibus, si arearum descriptio acceleratur, virium directiones declinant a concursu radiorum versus plagam, in quam fit motus.

Scholium.

Urgeri potest corpus a vi centripeta composita ex pluribus viribus. In hoc casu sensus propositionis est, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum *S*. Porro si vis aliqua agat perpetuo secundum lineam superficiei descriptæ perpendicularem; hæc faciet ut corpus deflectatur a plano sui motus: sed quantitatem superficiei descriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compositione virium negligenda est.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius utcunque moti ducto describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi composita ex vi centripeta tendente ad corpus illud alterum, & ex vi omni acceleratrice qua corpus illud alterum urgetur.

Sit corpus primum *L*, & corpus alterum *T*: & (per legum corol. vi.) si vi nova, quæ æqualis & contraria sit illi, qua corpus alterum *T* urgetur, urgeatur corpus utrumque secundum lineas parallelas; perget corpus primum *L* describere circa corpus alterum *T* areas easdem ac prius: vis autem, qua corpus alterum *T* urgebatur, jam destruetur per vim sibi æqualem & contrariam; & propterea (per leg. I.) corpus illud alterum *T* sibimet ipsi jam relictum vel quiescet, vel movebitur uniformiter in directum: & corpus primum *L* urgente differentia virium, id est, urgente vi reliqua perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum *T* describere. Tendit igitur (per theor. II.) differentia virium ad corpus illud alterum *T* ut centrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpus unum *L* radio ad alterum *T* ducto describit areas temporibus proportionales; atque de vi tota (sive simplici, sive ex viribus pluribus juxta legum corollarium secundum

composita,)

composita) qua corpus prius *L* urgetur, subducatur (per idem legum corollarium) vis tota acceleratrix, qua corpus alterum urgetur: vis omnis reliqua, qua corpus prius urgetur, tendet ad corpus alterum *T* ut centrum.

Corol. 2. Et, si areæ illæ sunt temporibus quamproxime proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum *T* quamproxime.

Corol. 3. Et vice versa, si vis reliqua tendit quamproxime ad corpus alterum *T*, erunt areæ illæ temporibus quamproxime proportionales.

Corol. 4. Si corpus *L* radio ad alterum corpus *T* ducto describit areas, quæ cum temporibus collatæ sunt valde inæquales; & corpus illud alterum *T* vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum: actio vis centripetæ ad corpus illud alterum *T* tendentis vel nulla est, vel miscetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: visque tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita ad aliud (sive immobile sive mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; si modo vis centripeta sumatur, quæ restat post subductionem vis totius in corpus illud alterum *T* agentis.

Scholium.

Quoniam æquabilis arearum descriptio index est centri, quod vis illa respicit, qua corpus maxime afficitur, quaque retrahitur a motu rectilineo, & in orbita sua retinetur; quidni usurpemus in sequentibus æquabilem arearum descriptionem ut indicem centri, circum quod motus omnis circularis in spatiis liberis peragitur?

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Corporum, quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere; & esse inter se, ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.

Tendunt hæ vires ad centra circulorum per prop. II. & corol. 2. prop. I. & sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus quam minimis

De Motu Corporum

nimis descriptorum sinus versi per corol. 4. prop. I. hoc est, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circulorum applicata per lem. vii. & propterea, cum hi arcus sint ut arcus temporibus quibusvis æqualibus descripti, & diametri sint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis simul descriptorum quadrata applicata ad radios circulorum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Cum arcus illi sint ut velocitates corporum, vires centripetæ erunt in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum directe, & ratione simplici radiorum inverse.

Corol. 2. Et, cum tempora periodica sint in ratione composita ex ratione radiorum directe, & ratione velocitatum inverse; vires centripetæ sunt in ratione composita ex ratione radiorum directe, & ratione duplicata temporum periodicorum inverse.

Corol. 3. Unde si tempora periodica æquentur, & propterea velocitates sint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: & contra.

Corol. 4. Si & tempora periodica, & velocitates sint in ratione subduplicata radiorum; æquales erunt vires centripetæ inter se: & contra.

Corol. 5. Si tempora periodica sint ut radii, & propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciproce ut radii: & contra.

Corol. 6. Si tempora periodica sint in ratione sesquiplicata radiorum, & propterea velocitates reciproce in radiorum ratione subduplicata; vires centripetæ erunt reciproce ut quadrata radiorum: & contra.

Corol. 7. Et universaliter, si tempus periodicum sit ut radii R potestas quælibet R^n, & propterea velocitas reciproce ut radii potestas R^{n-1}; erit vis centripeta reciproce ut radii potestas R^{2n-1}: & contra.

Corol. 8. Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcunque similium, centraque in figuris illis similiter posita habentium, partes describunt, consequuntur ex demonstratione præcedentium ad hosce casus applicata. Applicatur autem substituendo æquabilem arearum descriptionem pro æquabili motu, & distantias corporum a centris pro radiis usurpando.

Corol. 9. Ex eadem demonstratione consequitur etiam; quod arcus, quem corpus in circulo data vi centripeta uniformiter revolvendo

vendo tempore quovis describit, medius est proportionalis inter diametrum circuli, & descensum corporis eadem data vi eodemque tempore cadendo confectum.

Scholium.

Casus corollarii sexti obtinet in corporibus cœlestibus, (ut seorsum collegerunt etiam nostrates *Wrennus*, *Hookius* & *Hallæus*) & propterea quæ spectant ad vim centripetam decrescentem in duplicata ratione distantiarum a centris, decrevi fusius in sequentibus exponere.

Porro præcedentis propositionis & corollariorum ejus beneficio, colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis est ea gravitatis. Nam si corpus in circulo terræ concentrico vi gravitatis suæ revolvatur, hæc gravitas est ipsius vis centripeta. Datur autem ex descensu gravium & tempus revolutionis unius, & arcus dato quovis tempore descriptus, per hujus corol. ix. Et hujusmodi propositionibus *Hugenius* in eximio suo tractatu *de Horologio Oscillatorio* vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

Demonstrari etiam possunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis describi intelligatur polygonum laterum quotcunque. Et si corpus in polygoni lateribus data cum velocitate movendo ad ejus angulos singulos a circulo reflectatur; vis, qua singulis reflexionibus impingit in circulum, erit ut ejus velocitas: ideoque summa virium in dato tempore erit ut velocitas illa, & numerus reflexionum conjunctim: hoc est (si polygonum detur specie) ut longitudo dato illo tempore descripta, & aucta vel diminuta in ratione longitudinis ejusdem ad circuli prædicti radium; id est, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad radium: ideoque, si polygonum lateribus infinite diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore descripti applicatum ad radium. Hæc est vis centrifuga, qua corpus urget circulum; & huic æqualis est vis contraria, qua circulus continuo repellit corpus centrum versus.

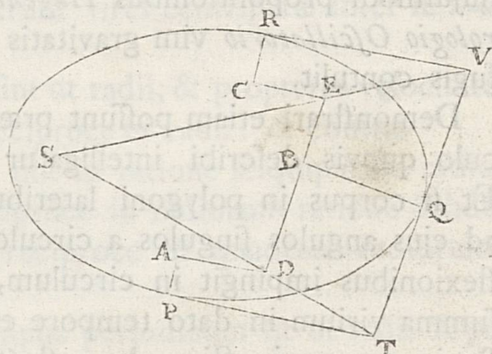
PROPOSITIO

PROPOSITIO V. PROBLEMA I.

Data quibuscunque in locis velocitate, qua corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus describit, centrum illud invenire.

Figuram descriptam tangant rectæ tres *PT*, *TQV*, *VR* in punctis totidem *P*, *Q*, *R*, concurrentes in *T* & *V*. Ad tangentes erigantur perpendicula *PA*, *QB*, *RC* velocitatibus corporis in punctis illis *P*, *Q*, *R*, a quibus eriguntur, reciproce proportionalia; id est, ita ut sit *PA* ad *QB* ut velocitas in *Q* ad velocitatem in *P*, & *QB* ad *RC* ut velocitas in *R* ad velocitatem in *Q*. Per perpendiculorum terminos *A*, *B*, *C* ad angulos rectos ducantur *AD*, *DBE*, *EC* concurrentes in *D* & *E*: Et actæ *TD*, *VE* concurrent in centro quæsito *S*.

Nam perpendicula a centro *S* in tangentes *PT*, *QT* demissa (per corol. 1. prop. 1.) sunt reciproce ut velocitates corporis in punctis *P* & *Q*; ideoque per constructionem ut perpendicula *AP*, *BQ* directe, id est ut perpendicula a puncto *D* in tangentes demissa. Unde facile colligitur quod puncta *S*, *D*, *T* sunt in una recta. Et simili argumento puncta *S*, *E*, *V* sunt etiam in una recta; & propterea centrum *S* in concursu rectarum *TD*, *VE* versatur. *Q. E. D.*



PROPOSITIO VI. THEOREMA V.

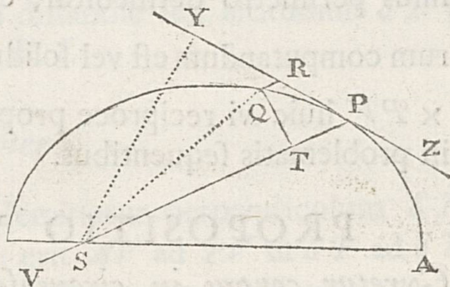
Si corpus in spatio non resistente circa centrum immobile in orbe quocunque revolvatur, & arcum quemvis jamjam nascentem tempore quam minimo describat, & sagitta arcus duci intelligatur, quæ chordam bisecet, & producta transeat per

per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcus, ut *sagitta directe & tempus bis inverse.*

Nam sagitta dato tempore est ut vis (per corol. 4. prop. I.) & augendo tempus in ratione quavis, ob auctum arcum in eadem ratione sagitta augetur in ratione illa duplicata (per corol. 2 & 3, lem. XI.) ideoque est ut vis semel & tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, & fiet vis ut sagitta directe & tempus bis inverse. *Q. E. D.*

Idem facile demonstratur etiam per corol. 4. lem. X.

Corol. 1. Si corpus *P* revolvendo circa centrum *S* describat lineam curvam *APQ*; tangat vero recta *ZPR* curvam illam in puncto quovis *P*, & ad tangentem ab alio quovis curvæ puncto *Q* agatur *QR* distantiæ *SP* parallela, ac demittatur *QT* perpendicularis ad distantiam illam *SP*: vis centripeta erit reciproce ut solidum $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$; si modo solidi illius ea semper sumatur quantitas, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta *P* & *Q*. Nam *QR* æqualis est sagittæ dupli arcus *QP*, in cujus medio est *P*, & duplum trianguli *SQP* sive *SP* × *QT*, tempori, quo arcus iste duplus describitur, proportionale est; ideoque pro temporis exponente scribi potest.

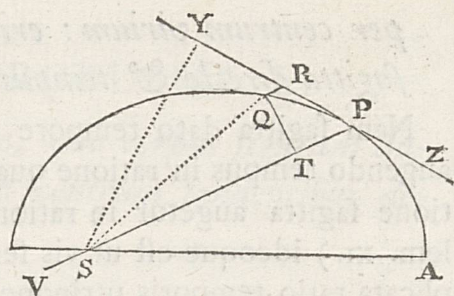


Corol. 2. Eodem argumento vis centripeta est reciproce ut solidum $\frac{SYq \times QPq}{QR}$, si modo *SY* perpendiculum sit a centro virium in orbis tangentem *PR* demissum. Nam rectangula *SY* × *QP* & *SP* × *QT* æquantur.

Corol. 3. Si orbis vel circulus est, vel circulum concentrice tangit, aut concentrice secat, id est, angulum contactus aut sectionis cum circulo quam minimum continet, eandem habens curvaturam eundemque radium curvaturæ ad punctum *P*; & si *PV* chorda sit circuli hujus a corpore per centrum virium acta: erit vis centripeta reciproce ut solidum *SYq* × *PV*. Nam *PV* est $\frac{QPq}{QR}$.

Corol.

De Motu Corporum.

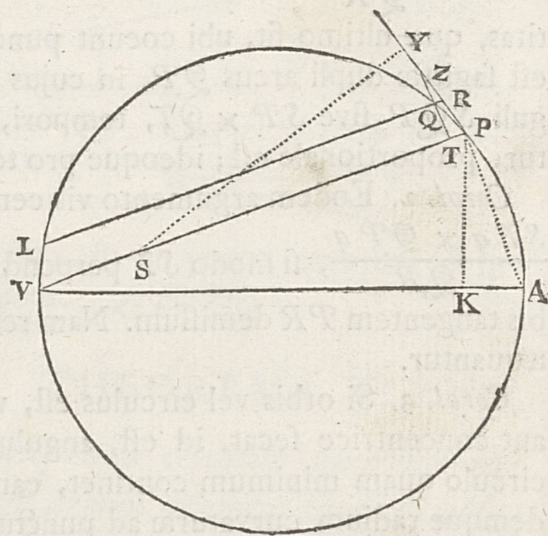


Corol. 4. Iisdem positis, est vis centripeta ut velocitas bis directe, & chorda illa inverse. Nam velocitas est reciproce ut perpendiculum *SY* per corol. 1. prop. 1.

Corol. 5. Hinc si detur figura quævis curvilinea *APQ*, & in ea detur etiam punctum *S*, ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur, inveniri potest lex vis centripetæ, qua corpus quodvis *P* a cursu rectilineo perpetuo retractum in figuræ illius perimetro detinebitur, eamque revolvendo describet. Nimirum computandum est vel solidum $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ vel solidum $SYq \times PV$ huic vi reciproce proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis sequentibus.

PROPOSITIO VII. PROBLEMA II.

Gyretur corpus in circumferentia circuli, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.



Esto circuli circumferentia *VQPA*; punctum datum, ad quod vis ceu ad centrum suum tendit, *S*; corpus in circumferentia latum *P*; locus proximus, in quem movebitur *Q*; & circuli tangens ad locum priorem *PRZ*. Per punctum *S* ducatur chorda *PV*; & acta circuli diametro *VA*, jungatur *AP*; & ad *SP* demittatur perpendiculum *QT*, quod productum occurrat tangenti *PR* in *Z*; ac denique per punctum *Q* agatur *LR*, quæ ipsi *SP* parallella sit, & occurrat tum circulo in *L*, tum tangenti *PZ* in *R*. Et ob similia triangula *ZQR*, *ZTP*, *VPA*; erit *RP quad.* hoc est *QRL* ad *QT quad.*

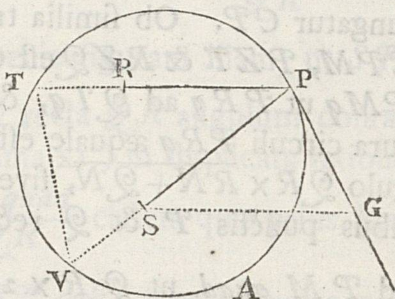
QT *quad.* ut AV *quad.* ad PV *quad.* Ideoque $\frac{QRL \times PV \; quad.}{AV \; quad.}$ æquatur QT *quad.* Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP \; quad.}{QR}$, & punctis P & Q coeuntibus scribatur PV pro RL. Sic fiet $\frac{SP quad. \times PV cub.}{AV \; quad.}$ æquale $\frac{SP \; quad \times QT \; quad.}{QR}$. Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta est reciproce ut $\frac{SPq \times PV \; cub.}{AV \; quad.}$; id est (ob datum AV *quad.*) reciproce ut quadratum distantiæ seu altitudinis SP & cubus chordæ PV conjunctim. *Q. E. I.*

Idem aliter.

Ad tangentem PR productam demittatur perpendiculum SY: & ob similia triangula SYP, VPA; erit AV ad PV ut SP ad SY: ideoque $\frac{SP \times PV}{AV}$ æquale SY, & $\frac{SP \; quad. \times PV \; cub.}{AV \; quad.}$ æquale SY *quad.* $\times PV$. Et propterea (per. corol. 3. & 5. prop. VI.) vis centripeta est reciproce ut $\frac{SPq \times PV \; cub.}{AVq}$, hoc est, ob datam AV reciproce ut $SPq \times PV$ *cub.* *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc si punctum datum S, ad quod vis centripeta semper tendit, locetur in circumferentia hujus circuli, puta ad V; erit vis centripeta reciproce ut quadrato-cubus altitudinis SP.

Corol. 2. Vis, qua corpus P in circulo $APTV$ circum virium centrum S revolvitur, est ad vim, qua corpus idem P in eodem circulo & eodem tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi potest, ut RP *quad.* $\times SP$ ad cubum rectæ SG, quæ a primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & distantiæ corporis à secundo virium centro parallela est. Nam per constructionem hujus propositionis vis prior est ad vim posteriorem ut $RPq \times PT$ *cub.* ad $SPq \times PV$ *cub.*



id eſt, ut $SP \times RPq$ ad $\frac{SP\ cub. \times PV\ cub.}{PT\ cub.}$, ſive (ob ſimilia triangula PSG, TPV) ad $SG\ cub.$

Corol. 3. Vis, qua corpus P in orbe quocunque circum virium centrum S revolvitur, eſt ad vim, qua corpus idem P in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi poteſt, ut $SP \times RPq$, contentum utique ſub diſtantia corporis a primo virium centro S & quadrato diſtantiæ ejus a ſecundo virium centro R, ad cubum rectæ SG, quæ a primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & corporis a ſecundo virium centro diſtantiæ RP parallela eſt. Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis P eædem ſunt ac in circulo ejuſdem curvaturæ.

PROPOSITIO VIII. PROBLEMA III.

Moveatur corpus in ſemicirculo PQA : *ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum* S, *ut lineæ omnes* PS, RS *ad id ductæ, pro parallelis haberi poſſint.*

A ſemicirculi centro C agatur ſemidiameter CA parallelas iſtas perpendiculariter ſecans in M & N, & jungatur CP. Ob ſimilia triangula CPM, PZT & RZQ eſt CPq ad PMq ut PRq ad QTq, & ex natura circuli PRq æquale eſt rectangulo $QR \times \overline{RN+QN}$, ſive coeuntibus punctis P & Q rectangulo $QR \times 2PM$. Ergo eſt CPq ad $PM\ quad.$ ut $QR \times 2PM$ ad $QT\ quad.$ ideoque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2PM\ cub.}{CP\ quad.}$, & $\frac{QT\ quad. \times SP\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$

Eſt

Eſt ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2PM\,cub. \times SP\,quad.}{CP\,quad.}$, hoc eſt (neglecta ratione determinata $\frac{2SP\,quad.}{CP\,quad.}$) reciproce ut $PM\,cub.$ Q. E. I.

Idem facile colligitur etiam ex propoſitione præcedente.

Scholium.

Et argumento haud multum diſſimili corpus invenietur moveri in ellipſi, vel etiam in hyperbola vel parabola, vi centripeta, quæ ſit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

PROPOSITIO IX. PROBLEMA IV.

Gyretur corpus in ſpirali PQS *ſecante radios omnes* SP, SQ, *&c. in angulo dato: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ſpiralis.*

Detur angulus indefinite parvus PSQ, & ob datos omnes angulos dabitur ſpecie figura $SPRQT$. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$, eſtque $\frac{QT\,quad.}{QR}$ ut QT, hoc eſt (ob datam ſpecie figuram illam) ut SP. Mutetur jam utcunque angulus PSQ, & recta QR angulum contactus QPR ſubtendens mutabitur (per lemma XI.) in duplicata ratione ipſius PR vel QT. Ergo manebit $\frac{QT\,quad.}{QR}$ eadem quæ prius, hoc eſt ut SP. Quare $\frac{QTq \times SPq}{QR}$ eſt ut $SP\,cub.$ ideoque (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta eſt reciproce ut cubus diſtantiæ SP. Q. E. I.

De Motu Corporum

Idem aliter.

Perpendiculum ST in tangentem demiſſum, & circuli ſpiralem concentrice ſecantis chorda PV ſunt ad altitudinem SP in datis rationibus; ideoque SP *cub.* eſt ut $STq \times PV$, hoc eſt (per corol. 3. & 5. prop. VI.) reciproce ut vis centripeta.

LEMMA XII.

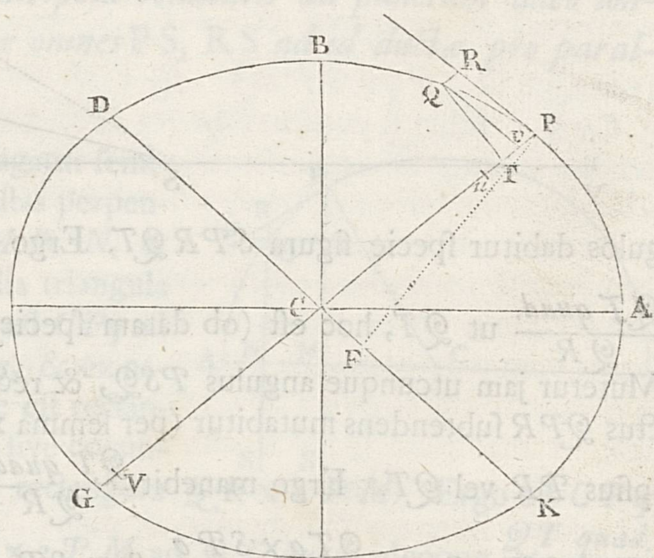
Parallelogramma omnia circa datæ ellipſeos vel hyperbolæ diametros quaſvis conjugatas deſcripta eſſe inter ſe æqualia.

Conſtat ex conicis.

PROPOSITIO X. PROBLEMA V.

Gyretur corpus in ellipſi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ellipſeos.

Sunto CA, CB ſemiaxes ellipſeos; GP, DK diametri aliæ conjugatæ; PF, QT perpendicula ad diametros; Qv ordinatim applicata ad diametrum GP; & ſi compleatur parallelogrammum $QvPR$, erit (ex conicis) rectangulum PvG ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (ob ſimilia triangula QvT, PCF) Qv *quad.* eſt ad QT *quad.* ut PC *quad.* ad PF *quad.* & conjunctis rationibus, rectangulum PvG ad QT *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & PC *quad.* ad PF *quad.* id eſt, vG ad $\frac{QT\ quad.}{Pv}$ ut PC *quad.* ad $\frac{CDq \times PFq}{PCq}$. Scribe QR pro



Pv,

Pv, & (per lemma XII.) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non (punctis *P* & *Q* coeuntibus) $2PC$ pro vG, & ductis extremis & mediis in se mutuo fiet $\frac{QT\ quad. \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2\,BCq \times CAq}{PC}$. Est ergo (per corol. 5. prop. VI.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2\,BCq \times CAq}{PC}$; id est (ob datum $2\,BCq \times CAq$) reciproce ut $\frac{1}{PC}$; hoc est, directe ut distantia *PC*. *Q. E. I.*

Idem aliter.

In recta *PG* ab altera parte puncti *T* sumatur punctum *u* ut *Tu* sit æqualis ipsi *Tv*; deinde cape *uV*, quæ sit ad *vG* ut est *DC quad.* ad *PC quad.* Et quoniam ex conicis est *Qv quad.* ad *PvG* ut *DC quad.* ad *PC quad.* erit *Qv quad.* æquale $Pv \times uV$. Adde rectangulum *uPv* utrinque, & prodibit quadratum chordæ arcus *PQ* æquale rectangulo *VPv*; ideoque circulus, qui tangit sectionem conicam in *P* & transit per punctum *Q*, transibit etiam per punctum *V*. Coeant puncta *P* & *Q*, & ratio *uV* ad *vG*, quæ eadem est cum ratione *DCq* ad *PCq*, fiet ratio *PV* ad *PG* seu *PV* ad $2PC$; ideoque *PV* æqualis erit $\frac{2DCq}{PC}$. Proinde vis, qua corpus *P* in ellipsi revolvitur, erit reciproce ut $\frac{2DCq}{PC}$ in *PFq* (per corol. 3. prop. VI.) hoc est (ob datum $2DCq$ in *PFq*) directe ut *PC*. *Q. E. I.*

Corol. 1. Est igitur vis ut distantia corporis a centro ellipseos: & vicissim, si vis sit ut distantia, movebitur corpus in ellipsi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem utique ellipsis migrare potest.

Corol. 2. Et æqualia erunt revolutionum in ellipsibus universis circum centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in ellipsibus similibus æqualia sunt (per corol. 3. & 8. prop. IV.) in ellipsibus autem communem habentibus axem majorem sunt ad invicem ut ellipseon areæ totæ directe, & arearum particulæ simul descriptæ inverse; id est, ut axes minores directe, & corporum velocitates in verticibus principalibus inverse; hoc est, ut axes illi

minores

minores directe, & ordinatim applicatæ ad idem punctum axis communis inverse; & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inversarum) in ratione æqualitatis.

Scholium.

Si ellipsis centro in infinitum abeunte vertatur in parabolam, corpus movebitur in hac parabola; & vis ad centrum infinite distans jam tendens evadet æquabilis. Hoc est theorema *Galilæi*. Et si coni sectio parabolica (inclinatione plani ad conum sectum mutata) vertatur in hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro vi centripeta in centrifugam versa. Et quemadmodum in circulo vel ellipsi si vires tendunt ad centrum figuræ in abscissa positum; hæ vires augendo vel diminuendo ordinatas in ratione quacunque data, vel etiam mutando angulum inclinationis ordinatarum ad abscissam, semper augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum a centro, si modo tempora periodica maneant æqualia; sic etiam in figuris universis si ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione quacunque data, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodico; vires ad centrum quodcunque in abscissa positum tendentes in singulis ordinatis augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum a centro.

SECTIO III.

De motu corporum in conicis sectionibus excentricis.

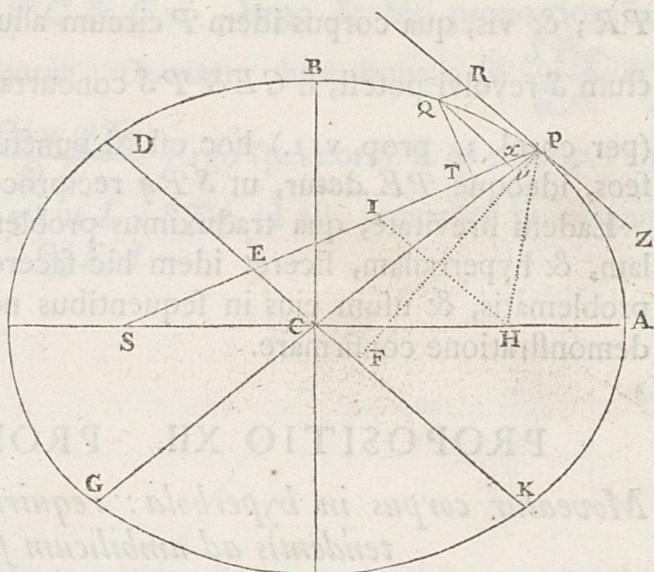
PROPOSITIO XI. PROBLEMA VI.

Revolvatur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum ellipseos.

Esto ellipseos umbilicus S. Agatur SP secans ellipseos tum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, & compleatur parallelogrammum $QxPR$. Patet EP æqualem esse semiaxi majori AC, eo quod, acta ab altero ellipseos umbilico H linea HI ipsi EC parallela, ob æquales CS, CH æquentur ES, EI,

adeo

adeo ut EP semisumma sit ipsarum PS, PI, id est (ob parallelas HI, PR, & angulos æquales IPR, HPZ) ipsarum PS, PH, quæ conjunctim axem totum $2\,AC$ adæquant. Ad SP demittatur perpendicularis QT, & ellipseos latere recto principali (seu $\frac{2\,BC\ quad.}{AC}$)



dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv, id est, ut PE seu AC ad PC; & $L \times Pv$ ad GvP ut L ad Gv; & GvP ad $Qv\ quad.$ ut $PC\ quad.$ ad $CD\ quad.$ & (per corol. 2. lem. VII.) $Qv\ quad.$ ad $Qx\ quad.$ punctis Q & P coeuntibus est ratio æqualitatis; & $Qx\ quad.$ seu $Qv\ quad.$ est ad $QT\ quad.$ ut $EP\ quad.$ ad $PF\ quad.$ id est, ut $CA\ quad.$ ad $PF\ quad.$ sive (per lem. XII.) ut $CD\ quad.$ ad $CB\ quad.$ Et conjunctis his omnibus rationibus, $L \times QR$ fit ad $QT\ quad.$ ut $AC \times L \times PCq \times CDq$, seu $2\,CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CBq$, sive ut $2\,PC$ ad Gv. Sed punctis Q & P coeuntibus æquantur $2\,PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & $QT\ quad.$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $L \times SPq$ æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SPq$, id est, reciproce in ratione duplicata distantiæ SP. *Q. E. I.*

Idem aliter.

Cum vis ad centrum ellipseos tendens, qua corpus P in ellipsi illa revolvi potest, sit (per corol. 1. prop. X.) ut CP distantia corporis ab ellipseos centro C; ducatur CE parallela ellipseos tangenti

PR

PR; & vis, qua corpus idem P circum aliud quodvis ellipſeos punctum S revolvi poteſt, ſi CE & PS concurrant in E, erit ut $\frac{PE\, cub.}{SPq}$ (per corol. 3. prop. VII.) hoc eſt, ſi punctum S ſit umbilicus ellipſeos, ideoque PE detur, ut SPq reciproce. *Q. E. I.*

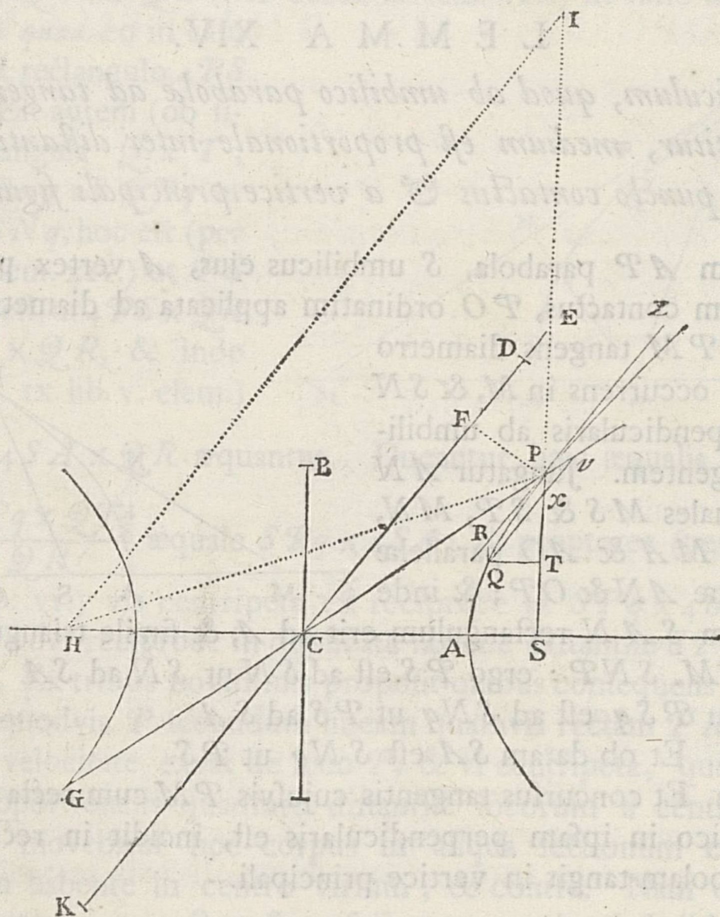
Eadem brevitate, qua traduximus problema quintum ad parabolam, & hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem problematis, & uſum ejus in ſequentibus non pigebit caſus cæteros demonſtratione confirmare.

PROPOSITIO XII. PROBLEMA VII.

Moveatur corpus in hyperbola: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

Sunto CA, CB ſemiaxes hyperbolæ; PG, KD diametri aliæ conjugatæ; PF perpendiculum ad diametrum KD; & Qv ordinatim applicata ad diametrum GP. Agatur SP ſecans cum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, & compleatur parallelogrammum $QRPx$. Patet EP æqualem eſſe ſemiaxi tranſverſo AC, eo quod, acta ab altero hyperbolæ umbilico H linea HI ipſi EC parallela, ob æquales CS, CH æquentur ES, EI; adeo ut EP ſemidifferentia ſit ipſarum PS, PI, id eſt (ob parallelas IH, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipſarum PS, PH, quarum differentia axem totum $2AC$ adæquat. Ad SP demittatur perpendicularis QT. Et hyperbolæ latere recto principali (ſeu $\frac{2BCq}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv, ſeu Px ad Pv, id eſt (ob ſimilia triangula Pxv, PEC) ut PE ad PC, ſeu AC ad PC. Erit etiam $L \times Pv$ ad $Gv \times Pv$ ut L ad Gv; & (ex natura conicorum) rectangulum GvP ad Qv *quad.* ut PCq ad CDq; & (per corol. 2. lem. VII.) Qv *quad.* ad Qx *quad.* punctis Q & P coeuntibus fit ratio æqualitatis; & Qx *quad.* ſeu Qv *quad.* eſt ad QTq ut EPq ad PFq, id eſt, ut CAq ad PFq, ſive (per lem. XII.) ut CDq ad CBq: & conjunctis his omnibus rationibus $L \times QR$ fit ad QTq ut $AC \times L \times PCq \times CDq$, ſeu $2CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CBq$, ſive ut $2PC$ ad Gv. Sed punctis P & Q coeuntibus

coeuntibus æquantur $2PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & QTq æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $L \times SPq$ æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SPq$, id est, reciproce in ratione duplicata distantiæ SP. *Q. E. I.*



Idem aliter.

Inveniatur vis, quæ tendit ab hyperbolæ centro C. Prodibit hæc distantiæ CP proportionalis. Inde vero (per corol. 3. prop. VII.) vis ad umbilicum S tendens erit ut $\frac{PE\ cub.}{SPq}$, hoc est, ob datam PE reciproce ut SPq. *Q. E. I.*

Eodem modo demonstratur, quod corpus hac vi centripeta in centrifugam versa movebitur in hyperbola opposita.

LEMMA XIII.

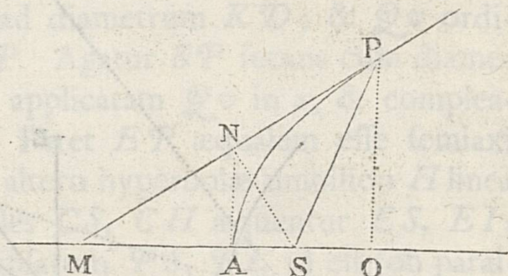
Latus rectum parabolæ ad verticem quemvis pertinens est quadruplum distantiæ verticis illius ab umbilico figuræ.

Patet ex conicis.

LEMMA XIV.

Perpendiculum, quod ab umbilico parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium est proportionale inter distantias umbilici a puncto contactus & a vertice principali figuræ.

Sit enim AP parabola, S umbilicus ejus, A vertex principalis, P punctum contactus, PO ordinatim applicata ad diametrum principalem, PM tangens diametro principali occurrens in M, & SN linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur AN & ob æquales MS & SP, MN, & NP, MA & AO parallelæ erunt rectæ AN & OP; & inde triangulum SAN rectangulum erit ad A, & simile triangulis æqualibus SNM, SNP: ergo PS est ad SN ut SN ad SA. *Q. E. D.*



Corol. 1. PSq est ad SNq ut PS ad SA.

Corol. 2. Et ob datam SA est SNq ut PS.

Corol. 3. Et concursus tangentis cujusvis PM cum recta SN, quæ ab umbilico in ipsam perpendicularis est, incidit in rectam AN, quæ parabolam tangit in vertice principali.

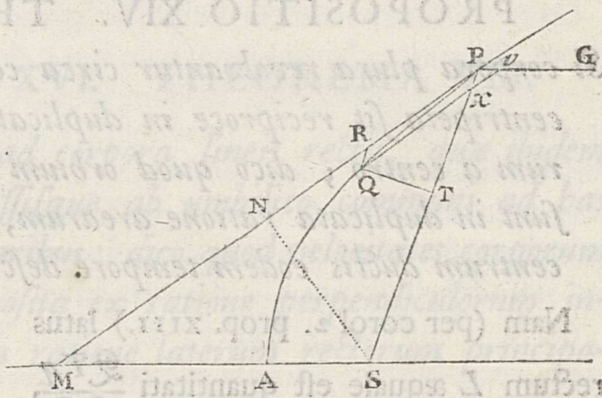
PROPOSITIO XIII. PROBLEMA VIII.

Moveatur corpus in perimetro parabolæ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.

Maneat constructio lemmatis, sitque P corpus in perimetro parabolæ, & a loco Q, in quem corpus proxime movetur, age ipsi SP

parallelam

parallelam QR & perpendicularem QT, necnon Qv tangenti parallelam, & occurrentem tum diametro PG in v, tum distantiæ SP in x. Jam ob similia triangula Pxv, SPM, & æqualia unius latera SM, SP, æqualia sunt alterius latera Px seu QR & Pv. Sed ex conicis quadratum ordinatæ Qv æquale est rectangulo sub latere recto & segmento diametri Pv, id est (per lem. XIII.) rectangulo $4PS \times Pv$, seu $4PS \times QR$; & punctis P & Q coeuntibus, ratio Qv ad Qx (per corol. 2. lem. VII.) fit ratio æqualitatis. Ergo Qx *quad.* eo in casu æquale est rectangulo $4PS \times QR$. Est autem (ob similia triangula QxT, SPN) Qxq ad QTq ut PSq ad SNq, hoc est (per corol. 1. lem. XIV.) ut PS ad SA, id est, ut $4PS \times QR$ ad $4SA \times QR$, & inde (per prop. IX. lib. V. elem.)



QTq & $4SA \times QR$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ æquale $SPq \times 4SA$: & propterea (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta est reciproce ut $SPq \times 4SA$, id est, ob datam $4SA$ reciproce in duplicata ratione distantiæ SP. *Q.E.I.*

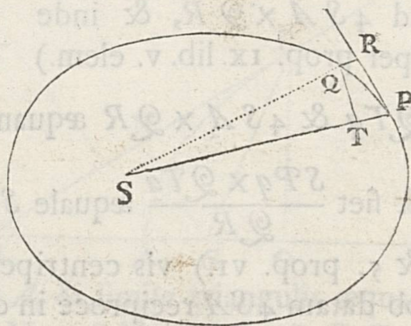
Corol. 1. Ex tribus novissimis propositionibus consequens est, quod si corpus quodvis P secundum lineam quamvis rectam PR quacunque cum velocitate exeat de loco P, & vi centripeta, quæ sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ locorum a centro, simul agitetur; movebitur hoc corpus in aliqua sectionum conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra. Nam datis umbilico, & puncto contactus, & positione tangentis, describi potest sectio conica, quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex data vi centripeta, & velocitate corporis: & orbes duo se mutuo tangentes eadem vi centripeta eademque velocitate describi non possunt.

Corol 2. Si velocitas, quacum corpus exit de loco suo P, ea sit, qua lineola PR in minima aliqua temporis particula describi pos-

sit; & vis centripeta potis sit eodem tempore corpus idem movere per spatium QR: movebitur hoc corpus in conica aliqua sectione, cujus latus rectum principale est quantitas illa $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimo fit, ubi lineolæ PR, QR in infinitum diminuuntur. Circulum in his corollariis refero ad ellipsin; & casum excipio, ubi corpus recta descendit ad centrum.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA VI.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta sit reciproce in duplicata ratione distantiæ locorum a centro; dico quod orbium latera recta principalia sunt in duplicata ratione arearum, quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore describunt.



Nam (per corol 2. prop. XIII.) latus rectum L æquale est quantitati $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta P & Q. Sed linea minima QR dato tempore est ut vis centripeta generans, hoc est (per hypothesin) reciproce ut SPq. Ergo $\frac{QTq}{QR}$ est ut $QTq \times SPq$, hoc est, latus rectum L in duplicata ratione areæ $QT \times SP$. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ellipseos area tota, eique proportionale rectangulum sub axibus est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti, & ratione temporis periodici. Namque area tota est ut area $QT \times SP$, quæ dato tempore describitur, ducta in tempus periodicum.

PROPOSITIO XV. THEOREMA VII.

Iisdem positis, dico quod tempora periodica in ellipsibus sunt in ratione sesquiplicata majorum axium.

Namque axis minor est medius proportionalis inter axem majorem & latus rectum, atque ideo rectangulum sub axibus est in ratione

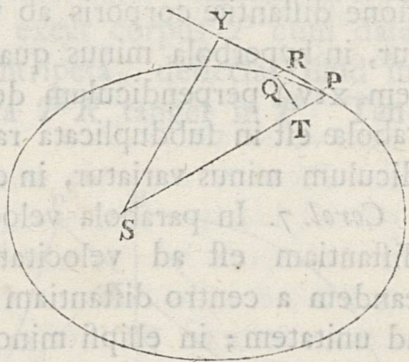
tione composita ex subduplicata ratione lateris recti & sesquiplicata ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum (per corol. prop. XIV.) est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti & ratione periodici temporis. Dematur utrobique subduplicata ratio lateris recti, & manebit sesquiplicata ratio majoris axis eadem cum ratione periodici temporis. *Q. E. D.*

Corol. Sunt igitur tempora periodica in ellipsibus eadem ac in circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus ellipseon.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

Iisdem positis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demissisque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum sunt in ratione composita ex ratione perpendiculorum inverse, & subduplicata ratione laterum rectorum principalium directe.

Ab umbilico *S* ad tangentem *PR* demitte perpendiculum *ST*, & velocitas corporis *P* erit reciproce in subduplicata ratione quantitatis $\frac{STq}{L}$. Nam velocitas illa est ut arcus quam minimus *PQ* in data temporis particula descriptus, hoc est (per lem. VII.) ut tangens *PR*, id est, ob proportionales *PR* ad *QT* & *SP* ad *ST*, ut $\frac{SP \times QT}{ST}$, sive ut *ST* reciproce & $SP \times QT$ directe; estque $SP \times QT$ ut area dato tempore descripta, id est (per prop. XIV.) in subduplicata ratione lateris recti. *Q. E. D.*



Corol. 1. Latera recta principalia sunt in ratione composita ex duplicata ratione perpendiculorum, & duplicata ratione velocitatum.

Corol.

Corol. 2. Velocitates corporum, in maximis & minimis ab umbilico communi diſtantiis, ſunt in ratione compoſita ex ratione diſtantiarum inverſe, & ſubduplicata ratione laterum rectorum principalium directe. Nam perpendicula jam ſunt ipſæ diſtantiæ.

Corol. 3. Ideoque velocitas in conica ſectione, in maxima vel minima ab umbilico diſtantia, eſt ad velocitatem in circulo in eadem a centro diſtantia in ſubduplicata ratione lateris recti principalis ad duplam illam diſtantiam.

Corol. 4. Corporum in ellipſibus gyrantium velocitates in mediocribus diſtantiis ab umbilico communi ſunt eædem, quæ corporum gyrantium in circulis ad eaſdem diſtantias; hoc eſt (per corol. 6. prop. IV.) reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiarum. Nam perpendicula jam ſunt ſemi-axes minores, & hi ſunt ut mediæ proportionales inter diſtantias & latera recta. Componatur hæc ratio inverſe cum ſubduplicata ratione laterum rectorum directe, & fiet ratio ſubduplicata diſtantiarum inverſe.

Corol. 5. In eadem figura, vel etiam in figuris diverſis, quarum latera recta principalia ſunt æqualia, velocitas corporis eſt reciproce ut perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem.

Corol. 6. In parabola velocitas eſt reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiæ corporis ab umbilico figuræ; in ellipſi magis variatur, in hyperbola minus quam in hac ratione. Nam (per corol. 2. lem. XIV.) perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem parabolæ eſt in ſubduplicata ratione diſtantiæ. In hyperbola perpendiculum minus variatur, in ellipſi magis.

Corol. 7. In parabola velocitas corporis ad quamvis ab umbilico diſtantiam eſt ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem a centro diſtantiam in ſubduplicata ratione numeri binarii ad unitatem; in ellipſi minor eſt, in hyperbola major quam in hac ratione. Nam per hujus corollarium ſecundum velocitas in vertice parabolæ eſt in hac ratione, & per corollaria ſexta hujus & propoſitionis quartæ ſervatur eadem proportio in omnibus diſtantiis. Hinc etiam in parabola velocitas ubique æqualis eſt velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam diſtantiam, in ellipſi minor eſt, in hyperbola major.

Corol. 8. Velocitas gyrantis in ſectione quavis conica eſt ad velocitatem gyrantis in circulo in diſtantia dimidii lateris recti principalis

cipalis sectionis, ut distantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem sectionis demissum. Patet per corollarium quintum.

Corol. 9. Unde cum (per corol 6. prop. IV.) velocitas gyrantis in hoc circulo sit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio reciproce in subduplicata ratione distantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in conica sectione ad velocitatem gyrantis in circulo in eadem distantia, ut media proportionalis inter distantiam illam communem & semissem principalis lateris recti sectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem sectionis demissum.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IX.

Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ locorum a centro, & quod vis illius quantitas absoluta sit cognita; requiritur linea, quam corpus describit de loco dato cum data velocitate secundum datam rectam egrediens.

Vis centripeta tendens ad punctum *S* ea sit, qua corpus *p* in orbita quavis data *p q* gyretur, & cognoscatur hujus velocitas in loco *p*. De loco *P* secundum lineam *P R* exeat corpus *P* cum data velocitate, & mox inde, cogente vi centripeta, deflectat illud in coni sectionem *P Q*. Hanc igitur recta *P R* tanget in *P*. Tangat itidem recta aliqua *p r* orbitam *p q* in *p*, & si ab *S* ad eas tangentes demitti intelligantur perpendicula, erit (per corol. 1. prop. XVI.) latus rectum principale coni sectionis ad latus rectum principale orbitæ in ratione composita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum, atque ideo datur. Sit *L* coni sectionis latus rectum. Datur præterea ejusdem coni sectionis umbilicus *S*. Anguli *R P S* complementum

mentum ad duos rectos fiat angulus RPH; & dabitur positione linea PH, in qua umbilicus alter H locatur. Demisso ad PH perpendiculo SK, erigi intelligatur semiaxis conjugatus BC, & erit $SPq - 2KPH + PHq = SHq = 4CHq = 4BHq - 4BCq = \overline{SP + PH}: quad. - L \times \overline{SP + PH} = SPq + 2SPH + PHq - L \times \overline{SP + PH}$. Addantur utrobique $2KPH - SPq - PHq + L \times \overline{SP + PH}$, & fiet $L \times \overline{SP + PH} = 2SPH + 2KPH$, seu $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L. Unde datur PH tam longitudine quam positione. Nimirum si ea sit corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quam $2SP + 2KP$, jacebit PH ad eandem partem tangentis PR cum linea PS; ideoque figura erit ellipsis, & ex datis umbilicis S, H, & axe principali $SP + AH$, dabitur. Sin tanta sit corporis velocitas, ut latus rectum L æquale fuerit $2SP + 2KP$, longitudo PH infinita erit; & propterea figura erit parabola axem habens SH parallelum lineæ PK, & inde dabitur. Quod si corpus majori adhuc cum velocitate de loco suo P exeat, capienda erit longitudo PH ad alteram partem tangentis; ideoque tangente inter umbilicos pergente, figura erit hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum SP & PH, & inde dabitur. Nam si corpus in his casibus revolvatur in conica sectione sic inventa, demonstratum est in prop. XI, XII, & XIII, quod vis centripeta erit ut quadratum distantiæ corporis a centro virium S reciproce; ideoque linea PQ recte exhibetur, quam corpus tali vi describet, de loco dato P, cum data velocitate, secundum rectam positione datam PR egrediens. *Q. E. F.*

Corol. 1. Hinc in omni coni sectione ex dato vertice principali D, latere recto L, & umbilico S, datur umbilicus alter H capiendo DH ad DS ut est latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$. Nam proportio $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L in

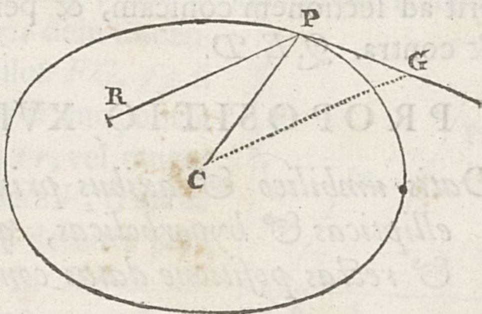
in casu hujus corollarii, fit *DS* + *DH* ad *DH* ut 4 *DS* ad *L*, & divisim *DS* ad *DH* ut 4 *DS* — *L* ad *L*.

Corol. 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali *D*, invenietur orbita expedite, capiendo scilicet latus rectum ejus ad duplam distantiam *DS*, in duplicata ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad distantiam *DS* gyrantis (per corol. 3. prop. XVI.;) dein *DH* ad *DS* ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & 4 *DS*.

Corol. 3. Hinc etiam si corpus moveatur in sectione quacunque conica, & ex orbe suo impulsu quocunque exturbetur; cognosci potest orbis, in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo, quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsus loco, secundum rectam positione datam, exibit.

Corol. 4. Et si corpus illud vi aliqua extrinsecus impressa continuo perturbetur, innotescet cursus quam proxime, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, & ex seriei analogia mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

Scholium.



Si corpus *P* vi centripeta ad punctum quodcunque datum *R* tendente moveatur in perimetro datæ cujuscunque sectionis conicæ, cujus centrum sit *C*; & requiratur lex vis centripetæ: ducatur *CG* radio *RP* parallela, & orbis tangenti *PG* occurrens in G; & vis illa (per corol. 1. & schol. prop. X. & corol. 3. prop. VII.) erit ut $\frac{CG\ cub.}{RP\ quad.}$

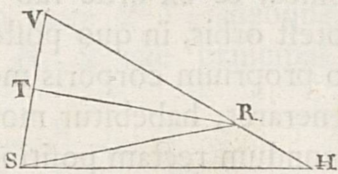
De Motu Corporum.

SECTIO IV.

De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum & hyperbolicorum ex umbilico dato.

LEMMA XV.

Si ab ellipseos vel hyperbolæ cujusvis umbilicis duobus S, H, *ad punctum quodvis tertium* V *inflectantur rectæ duæ* SV, HV, *quarum una* HV *æqualis sit axi principali figuræ, id est, axi in quo umbilici jacent, altera* SV *a perpendiculo* TR *in se demisso bisecetur in* T; *perpendiculum illud* TR *sectionem conicam alicubi tanget: & contra, si tangit, erit* HV *æqualis axi principali figuræ.*

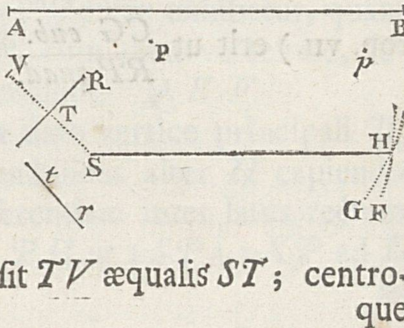


Secet enim perpendiculum *TR* rectam *HV* productam, si opus fuerit, in *R*; & jungatur *SR*. Ob æquales *TS*, *TV*, æquales erunt & rectæ *SR*, *VR* & anguli *TRS*, *TRV*. Unde punctum *R* erit ad sectionem conicam, & perpendiculum *TR* tanget eandem: & contra. *Q.E.D.*

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA X.

Datis umbilico & axibus principalibus describere trajectorias ellipticas & hyperbolicas, quæ transibunt per puncta data, & rectas positione datas contingent.

Sit *S* communis umbilicus figurarum; *AB* longitudo axis principalis trajectoriæ cujusvis; *P* punctum per quod trajectoria debet transire; & *TR* recta quam debet tangere. Centro *P* intervallo *AB*—*SP*, si orbita sit ellipsis, vel *AB*+*SP*, si ea sit hyperbola, describatur circulus *HG*. Ad tangentem *TR* demittatur perpendiculum *ST*, & producatur idem ad *V*, ut sit *TV* æqualis *ST*; centroque

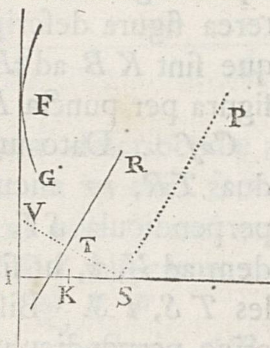


que *V* & intervallo *AB* describatur circulus *FH*. Hac methodo sive dentur duo puncta *P*, *p*, sive duæ tangentes *TR*, *tr*, sive punctum *P* & tangens *TR*, describendi sunt circuli duo. Sit *H* eorum intersectio communis, & umbilicis *S*, *H*, axe illo dato describatur trajectoria. Dico factum. Nam trajectoria descripta (eo quod *PH* + *SP* in ellipsi, & *PH* — *SP* in hyperbola æquatur axi) transibit per punctum *P*, & (per lemma superius) tanget rectam *TR*. Et eodem argumento vel transibit eadem per puncta duo *P*, *p*, vel tanget rectas duas *TR*, *tr*. *Q. E. F.*

PROPOSITIO XIX. PROBLEMA XI.

Circa datum umbilicum trajectoriam parabolicam describere, quæ transibit per puncta data, & rectas positione datas continget.

Sit *S* umbilicus, *P* punctum & *TR* tangens trajectoriæ describendæ. Centro *P*, intervallo *PS* describe circulum *FG*. Ab umbilico ad tangentem demitte perpendicularem *ST*, & produc eam ad *V*, ut sit *TV* æqualis *ST*. Eodem modo describendus est alter circulus *fg*, si datur alterum punctum *p*; vel inveniendum alterum punctum *v*, si datur altera tangens *tr*; dein ducenda recta *IF* quæ tangat duos circulos *FG*, *fg* si dantur duo puncta *P*, *p*, vel transeat per duo puncta *V*, *v*, si dantur duæ tangentes *TR*, *tr*, vel tangat circulum *FG* & transeat per punctum *V*, si datur punctum *P* & tangens *TR*. Ad *FI* demitte perpendicularem *SI*, eamque biseca in *K*; & axe *SK*, vertice principali *K* describatur parabola. Dico factum. Nam parabola, ob æquales *SK* & *IK*, *SP* & *FP*, transibit per punctum *P*; & (per lem. XIV. corol. 3.) ob æquales *ST* & *TV* & angulum rectum *STR*, tanget rectam *TR*. *Q. E. F.*



De Motu Corporum

PROPOSITIO XX. PROBLEMA XII.

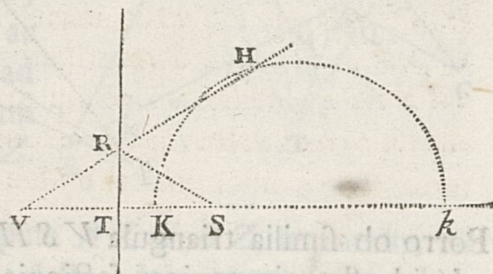
Circa datum umbilicum trajectoriam quamvis ſpecie datam deſcribere, quæ per data puncta tranſibit & rectas tanget poſitione datas.

Caſ. 1. Dato umbilico *S*, deſcribenda ſit trajectoria *ABC* per puncta duo *B*, *C*. Quoniam trajectoria datur ſpecie, dabitur ratio axis principalis ad diſtantiam umbilicorum. In ea ratione cape *KB* ad *BS*, & *LC* ad *CS*. Centris *B*, *C*, intervallis *BK*, *CL*, deſcribe circulos duos, & ad rectam *KL*, quæ tangat eoſdem in *K* & *L*, demitte perpendiculum *SG*, idemque ſeca in *A* & *a*, ita ut ſit *GA* ad *AS* & *Ga* ad *aS* ut eſt *KB* ad *BS* & axe *Aa*, verticibus *A*, *a*, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Sit enim *H* umbilicus alter figuræ deſcriptæ, & cum ſit *GA* ad *AS* ut *Ga* ad *aS*, erit diviſim *Ga*—*GA* ſeu *Aa* ad *aS*—*AS* ſeu *SH* in eadem ratione, ideoque in ratione quam habet axis principalis figuræ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus; & propterea figura deſcripta eſt ejuſdem ſpeciei cum deſcribenda. Cumque ſint *KB* ad *BS* & *LC* ad *CS* in eadem ratione, tranſibit hæc figura per puncta *B*, *C*, ut ex conicis manifeſtum eſt.

Caſ. 2. Dato umbilico *S*, deſcribenda ſit trajectoria quæ rectas duas *TR*, *tr* alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendicula *ST*, *St* & produc eadem ad *V*, *v*, ut ſint *TV*, *tv* æquales *TS*, *tS*. Biſeca *Vv* in *O*, & erige perpendiculum infinitum *OH*, rectamque *VS* infinite productam ſeca in *K* & *k*, ita ut ſit *VK* ad *KS* & *Vk* ad *kS* ut eſt trajectoriæ deſcribendæ axis principalis ad umbilicorum diſtantiam. Super diametro *Kk* deſcribatur circulus ſecans *OH* in *H*; & umbilicis *S*, *H*, axe principali ipſam *VH* æquante, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Nam biſeca *Kk* in *X*, & junge

junge HX, HS, HV, Hv. Quoniam est VK ad KS ut Vk ad kS; & composite ut $VK+Vk$ ad $KS+kS$; divisimque ut $Vk-VK$ ad $kS-KS$, id est, ut $2VX$ ad $2KX$ & $2KX$ ad $2SX$, ideoque ut VX ad HX & HX ad SX, similia erunt triangula VXH, HXS, & propterea VH erit ad SH ut VX ad XH, ideoque ut VK ad KS. Habet igitur trajectoriæ descriptæ axis principalis VH eam rationem ad ipsius umbilicorum distantiam SH, quam habet trajectoriæ describendæ axis principalis ad ipsius umbilicorum distantiam, & propterea ejusdem est speciei. Insuper cum VH, vH æquentur axi principali, & VS, vS a rectis TR, tr perpendiculariter bisecentur, liquet (ex lem. xv.) rectas illas trajectoriam descriptam tangere. *Q. E. F.*

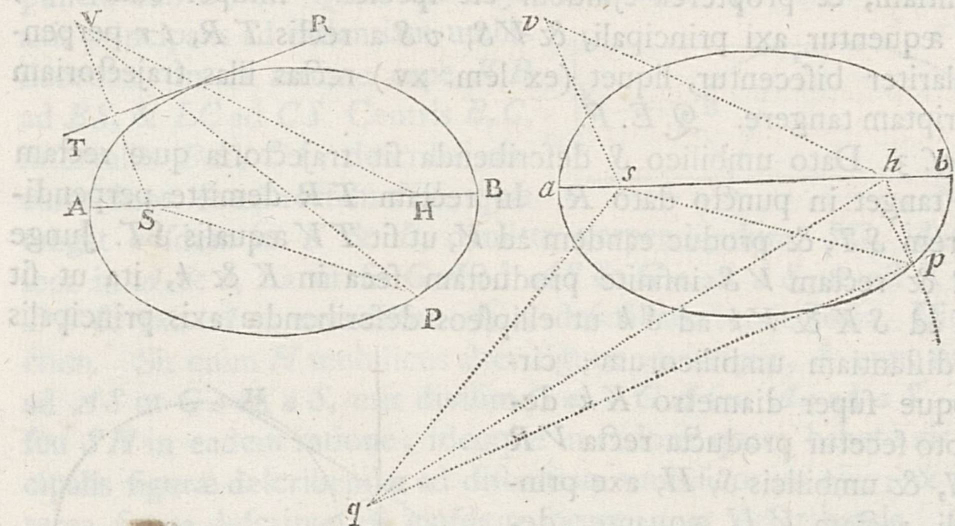
Cas. 3. Dato umbilico S describenda sit trajectoria quæ rectam TR tanget in puncto dato R. In rectam TR demitte perpendicularem ST, & produc eandem ad V, ut sit TV æqualis ST. Junge VR & rectam VS infinite productam seca in K & k, ita ut sit VK ad SK & Vk ad Sk ut ellipseos describendæ axis principalis ad distantiam umbilicorum; circuloque super diametro Kk descripto secetur producta recta VR in H, & umbilicis S, H, axe principali rectam VH æquante, describatur trajectoria. Dico factum. Namque VH esse ad SH ut VK ad SK, atque ideo ut axis principalis trajectoriæ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus, patet ex demonstratis in casu secundo, & propterea trajectoriam descriptam ejusdem esse speciei cum describenda, rectam vero TR qua angulus VRS bisecatur, tangere trajectoriam in puncto R, patet ex conicis. *Q. E. F.*



Cas. 4. Circa umbilicum S describenda jam sit trajectoria APB, quæ tangat rectam TR, transeatque per punctum quodvis P extra tangentem datum, quæque similis sit figuræ apb, axe principali ab & umbilicis s, h descriptæ. In tangentem TR demitte perpendiculum ST, & produc idem ad V, ut sit TV æqualis ST. Angulis autem VSP, SVP fac angulos hsq, shq æquales; centroque q & intervallo quod sit ad ab ut SP ad VS describe circulum secantem figuram apb in p. Junge sp & age SH quæ sit ad sh ut est

SP ad

SP ad *sp*, quæque angulum *PSH* angulo *psh* & angulum *VSH* angulo *psq* æquales constituat. Denique umbilicis *S*, *H*, & axe principali *AB* distantiam *VH* æquante, describatur sectio conica. Dico factum. Nam si agatur *sv* quæ sit ad *sp* ut est *sh* ad *sq*, quæque constituat angulum *vsp* angulo *hsq* & angulum *vsh* angulo *psq* æquales, triangula *svh*, *spq* erunt similia, & propterea *vh* erit ad *pq* ut est *sh* ad *sq*, id est (ob similia triangula *VSP*, *hsq*) ut est *VS* ad *SP* seu *ab* ad *pq*. Æquantur ergo *vh* & *ab*.



Porro ob similia triangula *VSH*, *vsh*, est *VH* ad *SH* ut *vh* ad *sh*, id est, axis conicæ sectionis jam descriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis *ab* ad umbilicorum intervallum *sh*; & propterea figura jam descripta similis est figuræ *apb*. Transit autem hæc figura per punctum *P*, eo quod triangulum *PSH* simile sit triangulo *psh*; & quia *VH* æquatur ipsius axi & *VS* bisecatur perpendiculariter a recta *TR*, tangit eadem rectam *TR*. *Q. E. F.*

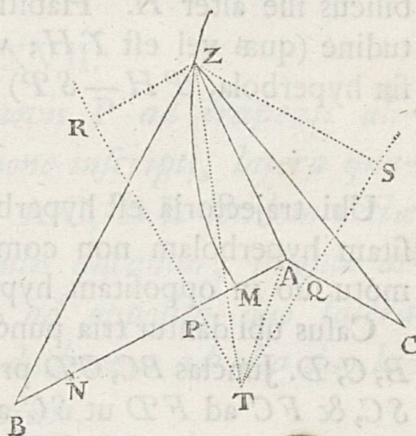
LEMMA XVI.

A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ sunt.

Cas. 1. Sunto puncta illa data *A*, *B*, *C* & punctum quartum *Z*, quod invenire oportet; ob datam differentiam linearum *AZ*, *BZ*,

locabitur

locabitur punctum *Z* in hyperbola cujus umbilici sunt *A* & *B*, & principalis axis differentia illa data. Sit axis ille *MN*. Cape *PM* ad *MA* ut est *MN* ad *AB*, & erecta *PR* perpendiculari ad *AB*, demissaque *ZR* perpendiculari ad *PR*; erit, ex natura hujus hyperbolæ, *ZR* ad *AZ* ut est *MN* ad *AB*. Simili discursu punctum *Z* locabitur in alia hyperbola, cujus umbilici sunt *A*, *C* & principalis axis differentia inter *AZ* & *CZ*, ducique potest *QS* ipsi *AC* perpendicularis, ad quam si ab hyperbolæ hujus puncto quovis *Z* demittatur normalis *ZS*, hæc fuerit ad *AZ* ut est differentia inter *AZ* & *CZ* ad *AC*. Dantur ergo rationes ipsarum *ZR* & *ZS* ad *AZ*, & idcirco datur earundem *ZR* & *ZS* ratio ad invicem; ideoque si rectæ *RP*, *SQ* concurrant in *T*, & agantur *TZ* & *TA*, figura *TRZS* dabitur specie, & recta *TZ* in qua punctum *Z* alicubi locatur, dabitur positione. Dabitur etiam recta *TA*, ut & angulus *ATZ*; & ob datas rationes ipsarum *AZ* ac *TZ* ad *ZS* dabitur earundem ratio ad invicem; & inde dabitur triangulum *ATZ*, cujus vertex est punctum *Z*. *Q. E. I.*



Cas. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta *AZ* & *BZ*, æquantur, ita age rectam *TZ*, ut bisecet rectam *AB*; dein quære triangulum *ATZ* ut supra.

Cas. 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum *Z* in centro circuli per puncta *A*, *B*, *C* transeuntis. *Q. E. I.*

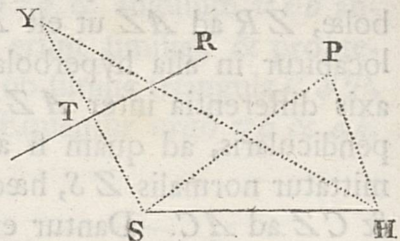
Solvitur etiam hoc lemma problematicum per librum tactionum *Apollonii* a *Vieta* restitutum.

PROPOSITIO XXI. PROBLEMA XIII.

Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data & rectas positione datas continget.

Detur umbilicus *S*, punctum *P*, & tangens *TR*, & inveniendus sit umbilicus alter *H*. Ad tangentem demitte perpendiculum *ST*, & pro-

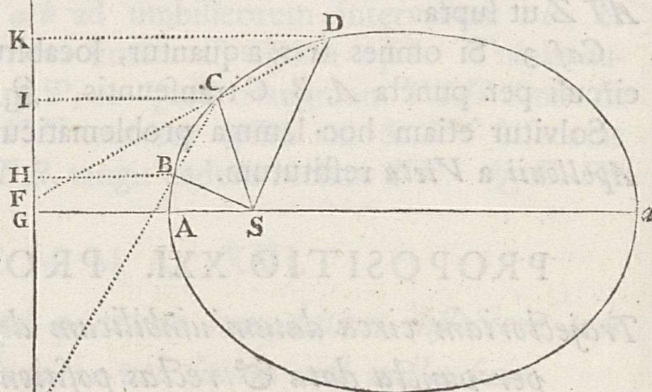
produc idem ad Y, ut sit TY æqualis ST, & erit YH æqualis axi principali. Junge SP, HP, & erit SP differentia inter HP & axem principalem. Hoc modo si dentur plures tangentes TR, vel plura puncta P, devenietur semper ad lineas totidem YH, vel PH, a dictis punctis Y vel P ad umbilicum H ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus SP differunt ab iisdem, atque ideo quæ vel æquantur sibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per lemma superius, datur umbilicus ille alter H. Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel est YH; vel, si trajectoria ellipsis est, $PH+SP$; sin hyperbola, $PH-SP$) habetur trajectoria. *Q.E.I.*



Scholium.

Ubi trajectoria est hyperbola, sub nomine hujus trajectoriæ oppositam hyperbolam non comprehendo. Corpus enim pergendo in motu suo in oppositam hyperbolam transire non potest.

Casus ubi dantur tria puncta sic solvitur expeditius. Dentur puncta B, C, D. Junctas BC, CD produc ad E, F, ut sit EB ad EC ut SB ad SC, & FC ad FD ut SC ad SD. Ad EF ductam & productam demitte normales SG, BH, inque GS infinite producta cape GA ad AS & Ga ad aS ut est HB ad BS; & erit A vertex, & Aa axis principalis trajectoriæ: quæ, perinde ut GA major, æqualis, vel minor fuerit quam AS, erit ellipsis, parabola vel hyperbola; puncto a in primo casu cadente ad eandem partem lineæ GF cum puncto A; in secundo casu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ GF. Nam si demittantur ad GF perpendicula CI, DK; erit IC ad HB ut EC ad EB, hoc est, ut SC ad SB; & vicissim IC ad SC ut HB ad SB sive ut GA ad SA.



Et

Et simili argumento probabitur esse KD ad SD in eadem ratione. Jacent ergo puncta B, C, D in coni sectione circa umbilicum S ita descripta, ut rectæ omnes, ab umbilico S ad singula sectionis puncta ductæ, sint ad perpendicula a punctis iisdem ad rectam GF demissa in data illa ratione. LIBER PRIMUS.

Methodo haud multum dissimili hujus problematis solutionem tradit clarissimus geometra *de la Hire*, conicorum suorum lib. VIII. prop. XXV.

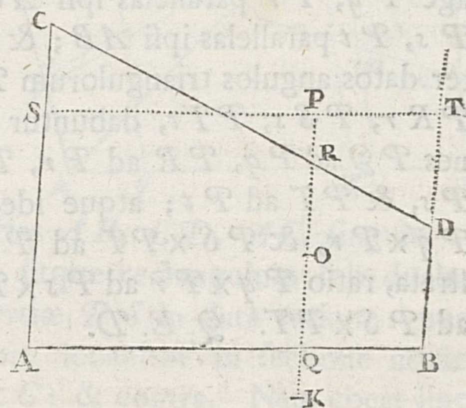
SECTIO V.

Inventio orbium ubi umbilicus neuter datur.

LEMMA XVII.

Si a datæ conicæ sectionis puncto quovis P *ad trapezii alicujus* ABDC, *in conica illa sectione inscripti, latera quatuor infinite producta* AB, CD, AC, DB *totidem rectæ* PQ, PR, PS, PT *in datis angulis ducantur, singulæ ad singula: rectangulum ductarum ad opposita duo latera* $PQ \times PR$, *erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera opposita* $PS \times PT$ *in data ratione.*

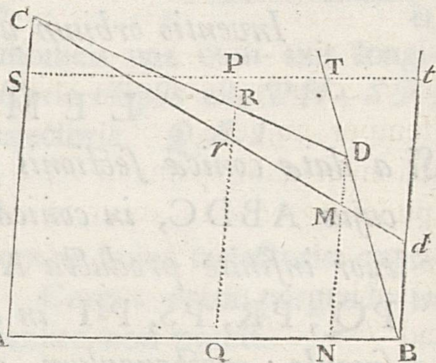
Cas. 1. Ponamus primo lineas ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, puta PQ, & PR lateri AC, & PS ac PT lateri AB. Sintque insuper latera duo ex oppositis, puta AC & BD, sibi invicem parallela. Et recta, quæ bisecat parallela illa latera, erit una ex diametris conicæ sectionis, & bisecabit etiam RQ. Sit O punctum in quo RQ bisecatur, & erit PO ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc PO ad K, ut sit OK æqualis PO, & erit OK ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta A, B, P & K sint ad conicam sectionem, & PK secet AB in dato angulo, erit (per prop. 17, 19, 21 & 23. lib. III. coni-



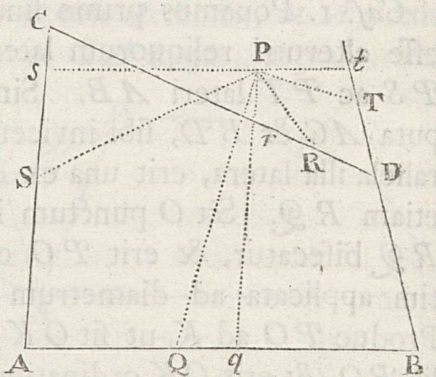
 corum

corum *Apollonii*) rectangulum *PQK* ad rectangulum *AQB* in data ratione. Sed *QK* & *PR* æquales sunt, utpote æqualium *OK*, *OP*, & *OQ*, *OR* differentiæ, & inde etiam rectangula *PQK* & *PQ*×*PR* æqualia sunt; atque ideo rectangulum *PQ*×*PR* est ad rectangulum *A Q B*, hoc est ad rectangulum *P S*×*P T* in data ratione. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponamus jam trapezii latera opposita *AC* & *BD* non esse parallela. Age *B d* parallelam *A C* & occurrentem tum rectæ *ST* in *t*, tum conicæ sectioni in *d*. Junge *C d* secantem *P Q* in *r*, & ipsi *P Q* parallelam age *D M* secantem *C d* in *M* & *A B* in *N*. Jam ob similia triangula *B T t*, *D B N*; est *B t* seu *P Q* ad *T t* ut *D N* ad *N B*. Sic & *R r* est ad *A Q* seu *PS* ut *DM* ad *A N*. Ergo, ducendo antecedentes in antecedentes & consequentes in consequentes, ut rectangulum *P Q* in *R r* est ad rectangulum *P S* in *T t*, ita rectangulum *N D M* est ad rectangulum *A N B*, & (per cas. 1.) ita rectangulum *P Q* in *P r* est ad rectangulum *P S* in *P t*, ac divisim ita rectangulum *P Q*×*P R* est ad rectangulum *P S*×*P T*. *Q. E. D.*



Cas. 3. Ponamus denique lineas quatuor *P Q*, *PR*, *PS*, *PT* non esse parallelas lateribus *AC*, *A B*, sed ad ea utcunque inclinatas. Earum vice age *P q*, *P r* parallelas ipsi *AC*; & *P s*, *P t* parallelas ipsi *AB*; & propter datos angulos triangulorum *P Q q*, *P R r*, *P S s*, *P T t*, dabuntur rationes *P Q* ad *P q*, *P R* ad *P r*, *PS* ad *P s*, & *P T* ad *P t*; atque ideo rationes compositæ *P Q*×*P R*. ad *P q*×*P r*, & *P S*×*P T* ad *P s*×*P t*. Sed, per superius demonstrata, ratio *P q*×*P r* ad *P s*×*P t* data est: ergo & ratio *PQ*×*PR* ad *P S*×*P T*. *Q. E. D.*

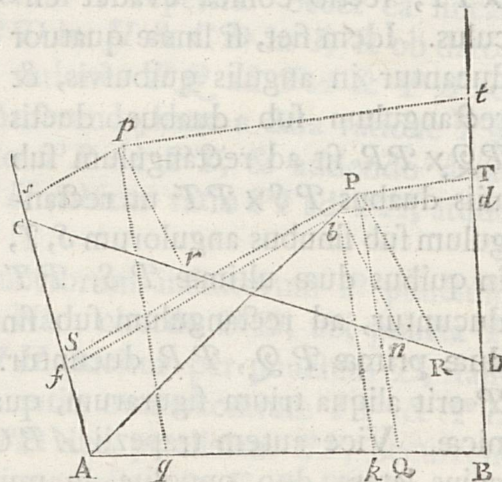


LEMMA

LEMMA XVIII.

Iisdem positis, si rectangulum ductarum ad opposita duo latera trapezii PQ×PR *sit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera* PS×PT *in data ratione; punctum* P, *a quo lineæ ducuntur, tanget conicam sectionem circa trapezium descriptam.*

Per puncta *A, B, C, D* & aliquod infinitorum punctorum *P*, puta *p*, concipe conicam sectionem describi: dico punctum *P* hanc semper tangere. Si negas, junge *AP* secantem hanc conicam sectionem alibi quam in *P*, si fieri potest, puta in *b*. Ergo si ab his punctis *p* & *b* ducantur in datis angulis ad latera trapezii rectæ *pq, pr, ps, pt* & *bk, bn, bf, bd*; erit ut *bk*×*bn* ad *bf*×*bd* ita (per lem. XVII.) *pq*×*pr* ad *ps*×*pt*, & ita (per hypoth.) *PQ*×*PR* ad *PS*×*PT*. Est & propter similitudinem trapeziorum *bkAf, PQAS*, ut *bk* ad *bf* ita *PQ* ad *PS*. Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correspondentes hujus, erit *bn* ad *bd* ut *PR* ad *PT*. Ergo trapezia æquiangula *Dnbd, DRPT* similia sunt, & eorum diagonales *Db, DP* propterea coincidunt. Incidit itaque *b* in intersectionem rectarum *AP, DP* ideoque coincidit cum puncto *P*. Quare punctum *P*, ubicunque sumatur, incidit in assignatam conicam sectionem. *Q. E. D.*

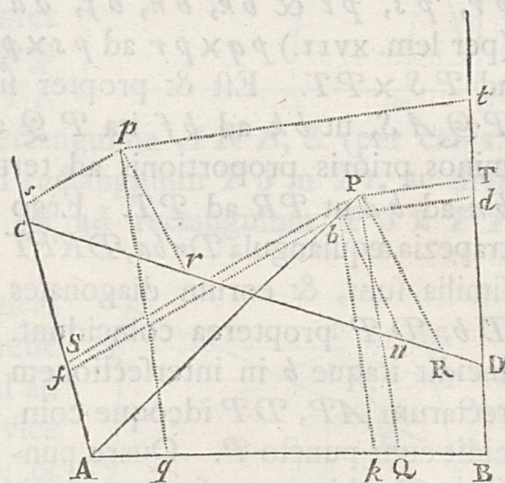


Corol. Hinc si rectæ tres *PQ, PR, PS* a puncto communi *P* ad alias totidem positione datas rectas *AB, CD, AC*, singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, sitque rectangulum sub duabus ductis *PQ*×*PR* ad quadratum tertiæ *PS* in data ratione: punctum *P*, a quibus rectæ ducuntur, locabitur in sectione conica quæ tangit lineas *AB, CD* in *A* & *C*; & contra. Nam coeat linea

BD cum linea *AC*, manente poſitione trium *AB*, *CD*, *AC*; dein coeat etiam linea *PT* cum linea *PS*: & rectangulum *PS*×*PT* evadet *PS quad.* rectæque *AB*, *CD*, quæ curvam in punctis *A* & *B*, *C* & *D* ſecabant, jam curvam in punctis illis coeuntibus non amplius ſecare poſſunt, ſed tantum tangent.

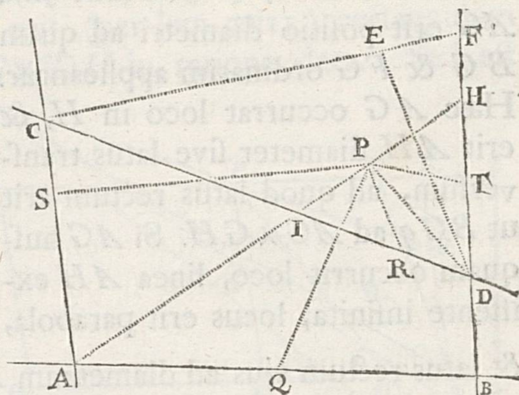
Scholium.

Nomen conicæ ſectionis in hoc lemmate late ſumitur, ita ut ſectio tam rectilinea per verticem coni tranſiens, quam circularis baſi parallela includatur. Nam ſi punctum *p* incidit in rectam, qua puncta *A* & *D* vel *C* & *B* junguntur, conica ſectio vertetur in geminas rectas, quarum una eſt recta illa in quam punctum *p* incidit, & altera eſt recta qua alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppoſiti ſimul ſumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor *PQ*, *PR*, *PS*, *PT* ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibuſvis æqualibus, ſitque rectangulum ſub duabus ductis *PQ*×*PR* æquale rectangulo ſub duabus aliis *PS*×*PT*, ſectio conica evadet circulus. Idem fiet, ſi lineæ quatuor ducantur in angulis quibuſvis, & rectangulum ſub duabus ductis *PQ*×*PR* ſit ad rectangulum ſub aliis duabus *PS*×*PT* ut rectangulum ſub ſinubus angulorum *S*, *T*, in quibus duæ ultimæ *PS*, *PT* ducuntur, ad rectangulum ſub ſinubus angulorum *Q*, *R*, in quibus duæ primæ *PQ*, *PR* ducuntur. Cæteris in caſibus locus puncti *P* erit aliqua trium figurarum, quæ vulgo nominantur ſectiones conicæ. Vice autem trapezii *ABCD* ſubſtitui poteſt quadrilaterum, cujus latera duo oppoſita ſe mutuo inſtar diagonalium decuſſant. Sed & e punctis quatuor *A*, *B*, *C*, *D* poſſunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figuræ, quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in caſu ſectio conica tranſibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.



LEMMA

LEMMA XIX.



Invenire punctum P, *a quo si rectæ quatuor* PQ, PR, PS, PT *ad alias totidem positione datas rectas* AB, CD, AC, BD, *singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, rectangulum sub duabus ductis,* PQ×PR, *sit ad rectangulum sub aliis duabus,* PS×PT, *in data ratione.*

Lineæ *AB*, *CD*, ad quas rectæ duæ *PQ*, *PR* unum rectangulorum continentes ducuntur, conveniant cum aliis duabus positione datis lineis in punctis *A*, *B*, *C*, *D*. Ab eorum aliquo *A* age rectam quamlibet *AH*, in qua velis punctum *P* reperiri. Secet ea lineas oppositas *BD*, *CD*, nimirum *BD* in *H* & *CD* in *I*, & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes *PQ* ad *PA* & *PA* ad *PS*, ideoque ratio *PQ* ad *PS*. Auferendo hanc a data ratione *PQ* ×*PR* ad *PS*×*PT*, dabitur ratio *PR* ad *PT*, & addendo datas rationes *PI* ad *PR*, & *PT* ad *PH* dabitur ratio *PI* ad *PH*, atque ideo punctum *P*. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc etiam ad loci punctorum infinitorum *P* punctum quodvis *D* tangens duci potest. Nam chorda *PD*, ubi puncta *P* ac *D* conveniunt, hoc est, ubi *AH* ducitur per punctum *D*, tangens evadit. Quo in casu, ultima ratio evanescentium *IP* & *PH* invenietur ut supra. Ipsi igitur *AD* duc parallelam *CF*, occurrentem *BD* in *F*, & in ea ultima ratione sectam in *E*, & *DE* tangens erit, propterea quod *CF* & evanescens *IH* parallelæ sunt, & in *E* & *P* similiter sectæ.

Corol. 2. Hinc etiam locus punctorum omnium *P* definiri potest. Per quodvis punctorum *A*, *B*, *C*, *D*, puta *A*, duc loci tangentem *AE*, & per aliud quodvis punctum *B* duc tangenti parallelam *BF*

occurren-

occurrentem loco in *F*. Invenietur autem punctum *F* per lem. XIX. Biseca *BF* in *G*, & acta indefinita *AG* erit positio diametri ad quam *BG* & *FG* ordinatim applicantur. Hæc *AG* occurrat loco in *H*, & erit *AH* diameter sive latus transversum, ad quod latus rectum erit ut *BGq* ad *AG*×*GH*. Si *AG* nusquam occurrit loco, linea *AH* existente infinita, locus erit parabola, & latus rectum ejus ad diametrum *AG* pertinens erit $\frac{BGq}{AG}$. Sin ea alicubi occurrit, locus hyperbola erit, ubi puncta *A* & *H* sita sunt ad easdem partes ipsius *G*: & ellipsis, ubi *G* intermedium est, nisi forte angulus *AGB* rectus sit, & insuper *BG quad.* æquale rectangulo *AGH*, quo in casu circulus habebitur.

Atque ita problematis veterum de quatuor lineis ab *Euclide* incœpti & ab *Apollonio* continuati non calculus, sed compositio geometrica, qualem veteres quærebant, in hoc corollario exhibetur.

LEMMA XX.

Si parallelogrammum quodvis ASPQ *angulis duobus oppositis* A *&* P *tangit sectionem quamvis conicam in punctis* A *&* P; *& lateribus unius angulorum illorum infinite productis* AQ, AS *occurrit eidem sectioni conicæ in* B *&* C; *a punctis autem occursuum* B *&* C *ad quintum quodvis sectionis conicæ punctum* D *agantur rectæ duæ* BD, CD *occurrentes alteris duobus infinite productis parallelogrammi lateribus* PS, PQ *in* T *&* R: *erunt semper abscissæ laterum partes* PR *&* PT *ad invicem in data ratione. Et contra, si partes illæ abscissæ sunt ad invicem in data ratione, punctum* D *tanget sectionem conicam per puncta quatuor* A, B, C, P *transeuntem.*

Cas.

Caſ. 1. Jungantur BP, CP & a puncto D agantur rectæ duæ DG, DE, quarum prior DG ipſi AB parallela ſit & occurrat PB, PQ, CA in H, I, G; altera DE parallela ſit ipſi AC & occurrat PC, PS, AB in F, K, E: & erit (per lem. XVII.) rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$ in ratione data. Sed eſt PQ ad DE (ſeu IQ) ut PB ad HB, ideoque ut PT ad DH; & viciſſim PQ ad PT ut DE ad DH. Eſt & PR ad DF ut RC ad DC, ideoque ut (IG vel) PS ad DG, & viciſſim PR ad PS ut DF ad DG; & conjunctis rationibus fit rectangulum $PQ \times PR$ ad rectangulum $PS \times PT$ ut rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$, atque ideo in data ratione. Sed dantur PQ & PS, & propterea ratio PR ad PT datur. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Quod ſi PR & PT ponantur in data ratione ad invicem, tum ſimili ratiocinio regrediendo, ſequetur eſſe rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$ in ratione data, ideoque punctum D (per lem. XVIII.) contingere conicam ſectionem tranſeuntem per puncta A, B, C, P. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi agatur BC ſecans PQ in r, & in PT capiatur Pt in ratione ad Pr quam habet PT ad PR: erit Bt tangens conicæ ſectionis ad punctum B. Nam concipe punctum D coire cum puncto B, ita ut, chorda BD evaneſcente, BT tangens evadat; & CD ac BT coincident cum CB & Bt.

Corol. 2. Et vice verſa ſi Bt ſit tangens, & ad quodvis conicæ ſectionis punctum D conveniant BD, CD; erit PR ad PT ut Pr ad Pt. Et contra, ſi ſit PR ad PT ut Pr ad Pt: convenient, BD, CD ad conicæ ſectionis punctum aliquod D.

Corol. 3. Conica ſectio non ſecat conicam ſectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, ſi fieri poteſt, tranſeant duæ conicæ ſectiones per quinque puncta A, B, C, P, O; easque ſecet recta BD in punctis D, d, & ipſam PQ ſecet recta Cd in q. Ergo PR eſt ad

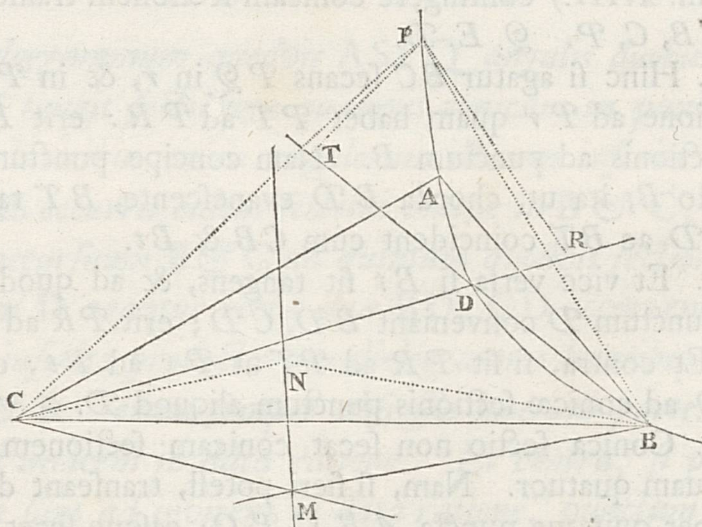
PT

PT ut *Pq* ad *PT*; unde *PR* & *Pq* sibi invicem æquantur, contra hypothesin.

LEMMA XXI.

Si rectæ duæ mobiles & infinitæ BM, CM *per data puncta* B, C *ceu polos ductæ, concursu suo* M *describant tertiam positione datam rectam* MN; *& aliæ duæ infinitæ rectæ* BD, CD *cum prioribus duabus ad puncta illa data* B, C *datos angulos* MBD, MCD *efficientes ducantur: dico quod hæ duæ* BD, CD *concursu suo* D *describent sectionem conicam per puncta* B, C *transeuntem. Et vice versa, si rectæ* BD, CD *concursu suo* D *describant sectionem conicam per data puncta* B, C, A *transeuntem, & sit angulus* DBM *semper æqualis angulo dato* ABC, *angulusque* DCM *semper æqualis angulo dato* ACB: *punctum* M *continget rectam positione datam.*

Nam in recta *MN* detur punctum *N*, & ubi punctum mobile *M* incidit in immotum *N*, incidat punctum mobile *D* in immotum *P*.



Junge *CN*, *BN*, *CP*, *BP*, & a puncto *P* age rectas *PT*, *PR* occurrentes ipsis *BD*, *CD* in *T* & *R*, & facientes angulum *BPT*

æqualem

æqualem angulo dato *BNM*, & angulum *CPR* æqualem angulo dato *CNM*. Cum ergo (ex hypothesi) æquales sint anguli *MBD*, *NBP*, ut & anguli *MCD*, *NCP*; aufer communes *NBD* & *NCD*, & restabunt æquales *NBM* & *PBT*, *NCM* & *PCR*: ideoque triangula *NBM*, *PBT* similia sunt, ut & triangula *NCM*, *PCR*. Quare *PT* est ad *NM* ut *PB* ad *NB*, & *PR* ad *NM* ut *PC* ad *NC*. Sunt autem puncta *B*, *C*, *N*, *P* immobilia. Ergo *PT* & *PR* datam habent rationem ad *NM*, proindeque datam rationem inter se; atque ideo (per lem. xx.) punctum *D*, perpetuus rectarum mobilium *BT* & *CR* concursus, contingit sectionem conicam, per puncta *B*, *C*, *P* transeuntem. *Q. E. D.*

Et contra, si punctum mobile *D* contingat sectionem conicam transeuntem per data puncta *B*, *C*, *A*, & sit angulus *DBM* semper æqualis angulo dato *ABC*, & angulus *DCM* semper æqualis angulo dato *ACB*, & ubi punctum *D* incidit successive in duo quævis sectionis puncta immobilia *p*, *P*, punctum mobile *M* incidat successive in puncta duo immobilia *n*, *N*: per eadem *n*, *N* agatur recta *nN*, & hæc erit locus perpetuus puncti illius mobilis *M*. Nam, si fieri potest, versetur punctum *M* in linea aliqua curva. Tanget ergo punctum *D* sectionem conicam per puncta quinque *B*, *C*, *A*, *p*, *P* transeuntem, ubi punctum *M* perpetuo tangit lineam curvam. Sed & ex jam demonstratis tanget etiam punctum *D* sectionem conicam per eadem quinque puncta *B*, *C*, *A*, *p*, *P*, transeuntem, ubi

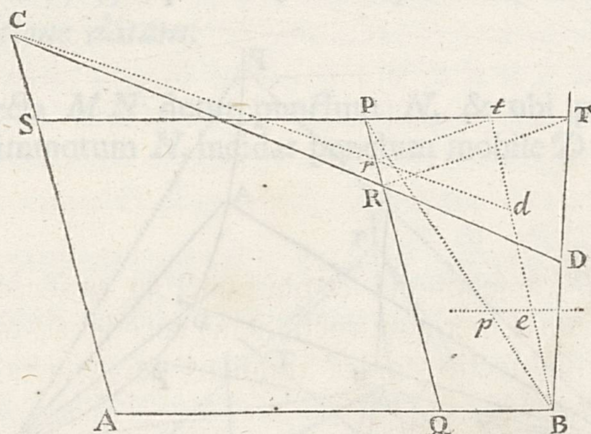
 punctum

punctum *M* perpetuo tangit lineam rectam. Ergo duæ sectiones conicæ transibunt per eadem quinque puncta, contra corol 3. lemmat. xx. Igitur punctum *M* versari in linea curva absurdum est. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXII. PROBLEMA XIV.

Trajectoriam per data quinque puncta describere.

Dentur puncta quinque *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. Ab eorum aliquo *A* ad alia duo quævis *B*, *C*, quæ poli nominentur, age rectas *AB*, *AC*, hisque parallelas *TPS*, *PRQ* per punctum quartum *P*. Deinde a polis duobus *B*, *C* age per punctum quintum *D* infinitas duas *BDT*, *CRD*, novissime ductis *TPS*, *PRQ* (priorem priori & posteriorem posteriori) occurrentes in *T* & *R*. Denique de rectis *PT*, *PR*, acta recta *tr* ipsi *TR* parallela, abscinde quasvis *Pt*, *Pr* ipsis *PT*, *PR* proportionales; & si per earum terminos *t*, *r* & polos *B*, *C* actæ *Bt*, *Cr* concurrant in *d*, locabitur punctum illud *d* in trajectoria quæsita.

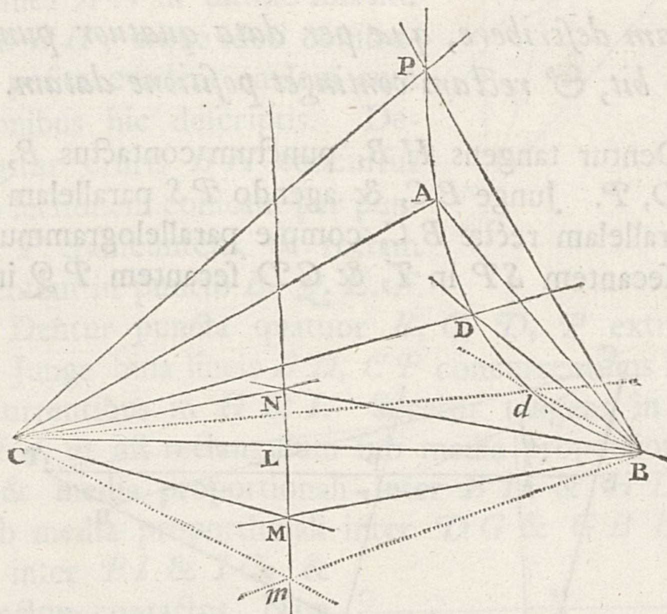


Nam punctum illud *d* (per lem. xx.) versatur in conica sectione per puncta quatuor *A*, *B*, *C*, *P* transeunte; & lineis *Rr*, *Tt* evanescentibus, coit punctum *d* cum puncto *D*. Transit ergo sectio conica per puncta quinque *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. *Q. E. D.*

Idem aliter.

E punctis datis junge tria quævis *A*, *B*, *C*; & circum duo eorum *B*, *C*, ceu polos, rotando angulos magnitudine datos *ABC*, *ACB*, applicentur crura *BA*, *CA* primo ad punctum *D*, deinde ad punctum

ctum *P*, & notentur puncta *M*, *N* in quibus altera crura *BL*, *CL* casu utroque se decussant. Agatur recta infinita *MN*, & rotentur anguli illi mobiles circum polos suos *B*, *C*, ea lege ut crurum *BL*, *CL* vel *BM*, *CM* intersectio, quæ jam sit *m*, incidat semper in rectam illam infinitam *MN*; & crurum *BA*, *CA*, vel *BD*, *CD* intersectio, quæ jam sit *d*, trajectoriam quæsitam *PADdB* delineabit. Nam punctum *d* (per lem. XXI.) continget sectionem conicam



per puncta *B*, *C* transeuntem; & ubi punctum *m* accedit ad puncta *L*, *M*, *N*, punctum *d* (per constructionem) accedet ad puncta *ADP*. Describetur itaque sectio conica transiens per puncta quinque *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. *Q. E. F.*

Corol. 1. Hinc recta expedite duci potest, quæ trajectoriam quæsitam in puncto quovis dato *B* continget. Accedat punctum *d* ad punctum *B*, & recta *Bd* evadet tangens quæsita.

Corol. 2. Unde etiam trajectoriarum centra, diametri & latera recta inveniri possunt, ut in corollario secundo lemmatis XIX.

Scholium.

Constructio prior evadet paulo simplicior jungendo *BP*, & in ea, si opus est, producta capiendo *Bp* ad *BP* ut est *PR* ad *PT*; & per *p* agendo rectam infinitam *pe* ipsi *SPT* parallelam, & in ea

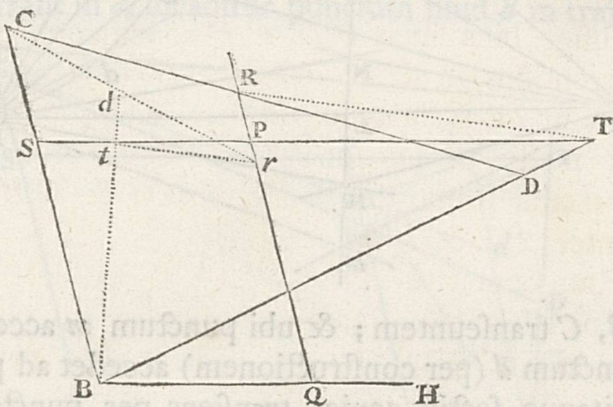
 capiendo

capiendo semper *p e* æqualem *P r*; & agendo rectas *B e*, *C r* concurrentes in *d*. Nam cum sint *P r* ad *P t*, *P R* ad *P T*, *p B* ad *P B*, *p e* ad *P t* in eadem ratione; erunt *p e* & *P r* semper æquales. Hac methodo puncta trajectoriæ inveniuntur expeditissime, nisi mavis curvam, ut in constructione secunda, describere mechanice.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA XV.

Trajectoriam describere, quæ per data quatuor puncta transibit, & rectam continget positione datam.

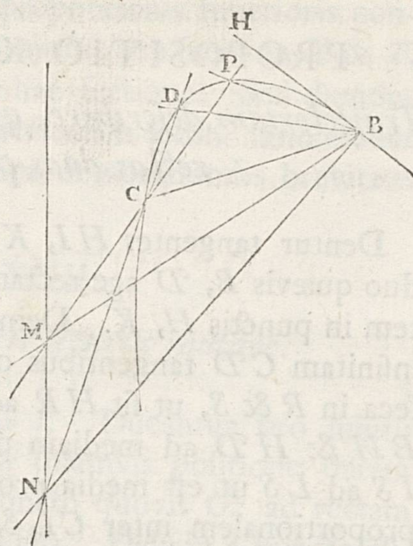
Cas. 1. Dentur tangens *H B*, punctum contactus *B*, & alia tria puncta *C*, *D*, *P*. Junge *B C*, & agendo *P S* parallelam rectæ *B H*, & *P Q* parallelam rectæ *B C*, comple parallelogrammum *B S P Q*. Age *B D* secantem *S P* in *T*, & *C D* secantem *P Q* in *R*. Denique, agendo quamvis *t r* ipsi *T R* parallelam, de *P Q*, *P S* abscinde *P r*, *P t* ipsis *P R*, *P T* proportionales respective; & actarum *C r*, *B t* concursus *d* (per lem. xx.) incidet semper in trajectoriam describendam.



Idem aliter.

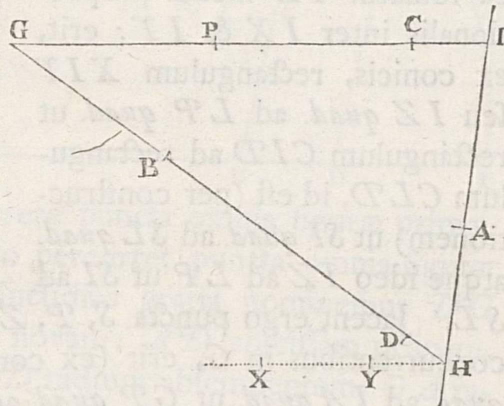
Revolvatur tum angulus magnitudine datus *C B H* circa polum *B*, tum radius quilibet rectilineus & utrinque productus *D C* circa polum *C*. Notentur puncta *M*, *N*, in quibus anguli crus *B C* secat radium illum, ubi crus alterum *B H* concurrit cum eodem radio in punctis *P* & *D*. Deinde ad actam infinitam *M N* concurrant perpetuo

petuo radius ille *CP* vel *CD* & anguli crus *BC*, & cruris alterius *BH* concursus cum radio delineabit trajectoriam quæsitam.



Nam si in constructionibus problematis superioris accedat punctum *A* ad punctum *B*, lineæ *CA* & *CB* coincident, & linea *AB* in ultimo suo situ fiet tangens *BH*; atque ideo constructiones ibi positæ evadent eædem cum constructionibus hic descriptis. Delineabit igitur cruris *BH* concursus cum radio sectionem conicam per puncta *C*, *D*, *P* transeuntem, & rectam *BH* tangentem in puncto *B*. *Q. E. F.*

Cas. 2. Dentur puncta quatuor *B*, *C*, *D*, *P* extra tangentem *HI* sita. Junge bina lineis *BD*, *CP* concurrentibus in *G*, tangentique occurrentibus in *H* & *I*. Secetur tangens in *A*, ita ut sit *HA* ad *IA*, ut est rectangulum sub media proportionali inter *CG* & *GP* & media proportionali inter *BH* & *HD*, ad rectangulum sub media proportionali inter *DG* & *GB* & media proportionali inter *PI* & *IC*; & erit *A* punctum contactus. Nam si rectæ *PI* parallela *HX* trajectoriam secet in punctis quibusvis *X* & *Y*: erit (ex conicis) punctum *A* ita locandum, ut fuerit *HA quad.* ad *AI quad.* in ratione composita ex ratione rectanguli *XHY* ad rectangulum *BHD*, seu rectanguli *CGP* ad rectangulum *DGB*, & ex ratione rectanguli *BHD* ad rectangulum *PIC*. Invento autem contactus puncto *A*, describetur trajectoria ut in casu primo. *Q. E. F.*



Capi autem potest punctum *A* vel inter puncta *H* & *I*, vel extra; & perinde trajectoria dupliciter describi.

PROPO-

PROPOSITIO XXIV PROBLEMA XVI.

Trajectoriam describere, quæ transibit per data tria puncta, & rectas duas positione datas continget.

Dentur tangentes *HI*, *KL* & puncta *B*, *C*, *D*. Per punctorum duo quævis *B*, *D* age rectam infinitam *BD* tangentibus occurrentem in punctis *H*, *K*. Deinde etiam per alia duo quævis *C*, *D* age infinitam *CD* tangentibus occurrentem in punctis *I*, *L*. Actas ita seca in *R* & *S*, ut sit *HR* ad *KR* ut est media proportionalis inter *BH* & *HD* ad mediam proportionalem inter *BK* & *KD*; & *IS* ad *LS* ut est media proportionalis inter *CI* & *ID* ad mediam proportionalem inter *CL* & *LD*. Seca autem pro lubitu vel inter puncta *K* & *H*, *I* & *L*, vel extra eadem; dein age *RS* secantem tangentes in *A* & *P*, & erunt *A* & *P* puncta contactuum. Nam si *A* & *P* supponantur esse puncta contactuum alicubi in tangentibus sita; & per punctorum *H*, *I*, *K*, *L* quodvis *I*, in tangente alterutra *HI* situm, agatur recta *IY* tangenti alteri *KL* parallela, quæ occurrat curvæ in *X* & *Y*, & in ea sumatur *IZ* media proportionalis inter *IX* & *IY*: erit, ex conicis, rectangulum *XIY* seu *IZ quad.* ad *LP quad.* ut rectangulum *CID* ad rectangulum *CLD*, id est (per constructionem) ut *SI quad.* ad *SL quad.* atque ideo *IZ* ad *LP* ut *SI* ad *SL*. Jacent ergo puncta *S*, *P*, *Z* in una recta. Porro tangentibus concurrentibus in *G*, erit (ex conicis) rectangulum *XIY* seu *IZ quad.* ad *IA quad.* ut *GP quad.* ad *GA quad.* ideoque *IZ* ad *IA* ut *GP* ad *GA*. Jacent ergo puncta *P*, *Z* & *A* in una recta, ideoque puncta *S*, *P* & *A* sunt in una recta. Et eodem argumento probabitur quod puncta *R*, *P* & *A* sunt in una recta. Jacent igitur puncta contactuum *A* & *P* in recta *RS*. Hisce autem inventis, trajectoria describetur ut in casu primo problematis superioris. *Q. E. F.*

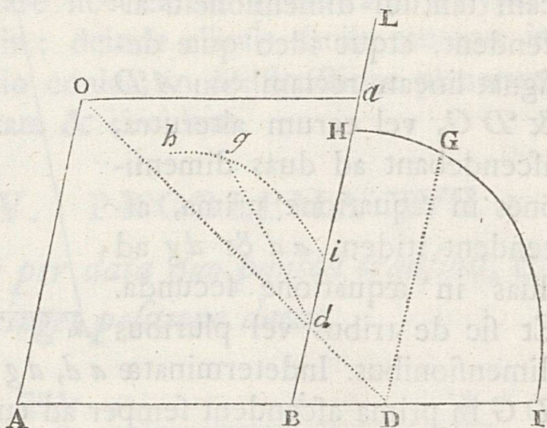
In

In hac propositione, & casu secundo propositionis superioris constructiones eædem sunt, sive recta XY trajectoriam secet in X & Y, sive non secet; eæque non pendent ab hac sectione. Sed demonstratis constructionibus ubi recta illa trajectoriam secat, innotescunt constructiones, ubi non secat; iisque ultra demonstrandis brevitatis gratia non immoror.

LEMMA XXII.

Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare.

Transmutanda sit figura quævis HGI. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ AO, BL tertiam quamvis positione datam AB secantes in A & B, & a figuræ puncto quovis G, ad rectam AB ducatur quævis GD, ipsi OA parallela. Deinde a puncto aliquo O, in linea OA dato, ad punctum D ducatur recta OD, ipsi BL occurrens in d, & a puncto occursus erigatur recta dg datum quemvis angulum cum recta BL continens, atque eam habens rationem ad Od quam habet DG ad OD; & erit g punctum in figura nova hgi puncto G respondens. Eadem ratione puncta singula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ novæ. Concipe igitur punctum G motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum g motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ & eandem describet. Distinctionis gratia nominemus DG ordinatam primam, dg ordinatam novam; AD abscissam primam, ad abscissam novam; O polum, OD radium abscindentem, OA radium ordinatum primum, & Oa (quo parallelogrammum $OABa$ completur) radium ordinatum novum.



Dico jam quod, si punctum G tangit rectam lineam positione datam, punctum g tanget etiam lineam rectam positione datam. Si punctum G tangit conicam sectionem, punctum g tanget etiam conicam sectionem. Conicis sectionibus hic circulum annumero. Porro

ro ſi punctum G tangit lineam tertii ordinis analytici, punctum g tanget lineam tertii itidem ordinis; & ſic de curvis lineis ſuperiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejuſdem ſemper ordinis analytici quas puncta G, g tangunt. Etenim ut eſt ad ad OA ita ſunt Od ad OD, dg ad DG, & AB ad AD; ideoque AD æqualis eſt $\frac{OA \times AB}{ad}$, & DG æqualis eſt $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam ſi punctum G tangit rectam lineam, atque ideo in æquatione quavis, qua relatio inter abſciſſam AD & ordinatam DG habetur, indeterminatæ illæ AD & DG ad unicam tantum dimenſionem aſcendunt, ſcribendo in hac æquatione $\frac{OA \times AB}{ad}$ pro AD, & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pro DG, producetur æquatio nova, in qua abſciſſa nova ad & ordinata nova dg ad unicam tantum dimenſionem aſcendent, atque ideo quæ deſignat lineam rectam. Sin AD & DG, vel earum alterutra, aſcendebant ad duas dimenſiones in æquatione prima, aſcendent itidem ad & dg ad duas in æquatione ſecunda. Et ſic de tribus vel pluribus dimenſionibus. Indeterminatæ ad, dg in æquatione ſecunda, & AD, DG in prima aſcendent ſemper ad eundem dimenſionum numerum, & propterea lineæ, quas puncta G, g tangunt, ſunt ejuſdem ordinis analytici.

Dico præterea, quod ſi recta aliqua tangat lineam curvam in figura prima; hæc recta eodem modo cum curva in figuram novam tranſlata tanget lineam illam curvam in figura nova; & contra. Nam ſi curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figura prima, puncta eadem tranſlata accedent ad invicem & coibunt in figura nova; atque ideo rectæ, quibus hæc puncta junguntur, ſimul evadent curvarum tangentes in figura utraque.

Componi poſſent harum aſſertionum demonſtrationes more magis geometrico. Sed brevitati conſulo.

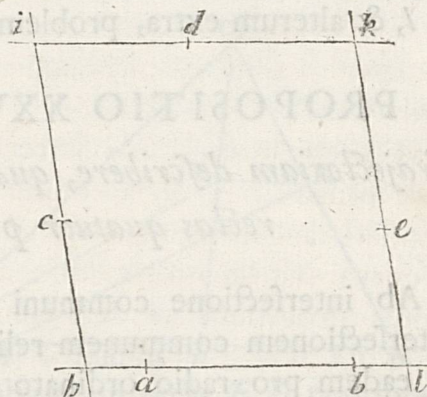
Igitur

Igitur si figura rectilinea in aliam transmutanda est, sufficit rectarum, a quibus conflatur, intersectiones transferre, & per easdem in figura nova lineas rectas ducere. Sin curvilineam transmutare oportet, transferenda sunt puncta, tangentes, & aliæ rectæ, quarum ope curva linea definitur. Inservit autem hoc lemma solutioni difficiliorum problematum, transmutando figuras propositas in simpliciores. Nam rectæ quævis convergentes transmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo lineam quamvis rectam, quæ per concursum convergentium transit; idque quia concursus ille hoc pacto abit in infinitum; lineæ autem parallelæ sunt, quæ nusquam concurrunt. Postquam autem problema solvitur in figura nova; si per inversas operationes transmutetur hæc figura in figuram primam, habebitur solutio quæsita.

Utile est etiam hoc lemma in solutione solidorum problematum. Nam quoties duæ sectiones conicæ obvenerint, quarum intersectione problema solvi potest, transmutare licet earum alterutram, si hyperbola sit vel parabola, in ellipsin: deinde ellipsis facile mutatur in circulum. Recta item & sectio conica, in constructione planorum problematum, vertuntur in rectam & circulum.

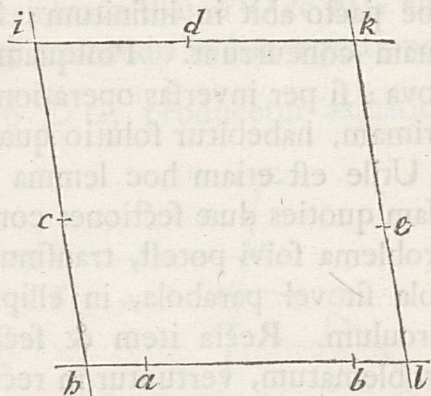
PROPOSITIO XXV. PROBLEMA XVII.

Trajectoriam describere, quæ per data duo puncta transibit, & rectas tres continget positione datas.



Per concursum tangentium quarumvis duarum cum se invicem, & concursum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data transit, age rectam infinitam; eaque adhibita pro radio ordinato primo, transmutetur figura, per lemma superius, in figuram novam. In hac figura tangentes illæ duæ evadent sibi invicem parallelæ, & tangens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo data transeunti. Sunto *h i*, *k l* tangentes illæ duæ parallelæ, *i k* tangens tertia, & *h l* recta huic

parallela transiens per puncta illa *a*, *b*, per quæ conica sectio in hac figura nova transire debet, & parallelogrammum *h i k l* complens. Secentur rectæ *h i*, *i k*, *k l* in *c*, *d*, *e*, ita ut sit *h c* ad latus quadratum rectanguli *a h b*, *i c* ad *i d*, & *k e* ad *k d* ut est summa rectarum *h i* & *k l* ad summam trium linearum, quarum prima est recta *i k*, & alteræ duæ sunt latera quadrata rectangulorum *a h b* & *a l b*: & erunt *c*, *d*, *e* puncta contactuum. Etenim, ex conicis, sunt *h c* quadratum ad rectangulum *a h b*, & *i c* quadratum ad *i d* quadratum, & *k e* quadratum ad *k d* quadratum, & *e l* quadratum ad rectangulum *a l b* in eadem ratione; & propterea *h c* ad latus quadratum ipsius *a h b*, *i c* ad *i d*, *k e* ad *k d*, & *e l* ad latus quadratum ipsius *a l b* sunt in subduplicata illa ratione, & composite, in data ratione omnium antecedentium *h i* & *k l* ad omnes consequentes, quæ sunt latus quadratum rectanguli *a h b*, & recta *i k*, & latus quadratum rectanguli *a l b*. Habentur igitur ex data illa ratione puncta contactuum *c*, *d*, *e*, in figura nova. Per inversas operationes lemmatis novissimi transferantur hæc puncta in figuram primam, & ibi (per prob. XIV.) describetur trajectoria. *Q. E. F.* Cæterum perinde ut puncta *a*, *b* jacent vel inter puncta *h*, *l*, vel extra, debent puncta *c*, *d*, *e* vel inter puncta *h*, *i*, *k*, *l* capi, vel extra. Si punctorum *a*, *b* alterutrum cadit inter puncta *h*, *l*, & alterum extra, problema impossibile est.



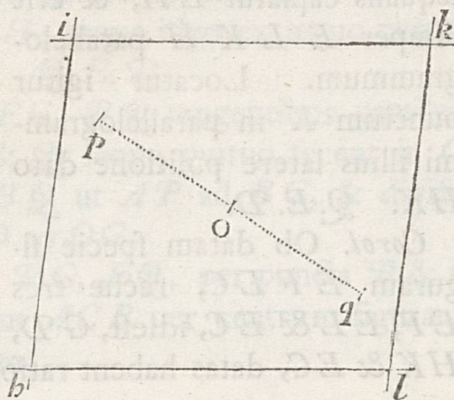
PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA XVIII.

Trajectoriam describere, quæ transibit per punctum datum, & rectas quatuor positione datas continget.

Ab intersectione communi duarum quarumlibet tangentium ad intersectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita, & eadem pro radio ordinato primo adhibita, transmutetur figura (per lem. XXII.) in figuram novam, & tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sunto

 to

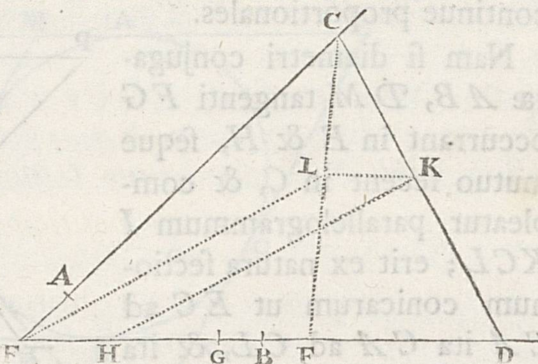
to illæ *h i* & *k l*, *i k* & *h l* continentes parallelogrammum *h i k l*. Sitque *p* punctum in hac nova figura puncto in figura prima dato respondens. Per figuræ centrum *O* agatur *p q*, & existente *O q* æquali *O p*, erit *q* punctum alterum per quod sectio conica in hac figura nova transire debet. Per lemmatis XXII. operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ trajectoria describenda est. Per eadem vero describi potest trajectoria illa per problema XVII. *Q. E. F.*



LEMMA XXIII.

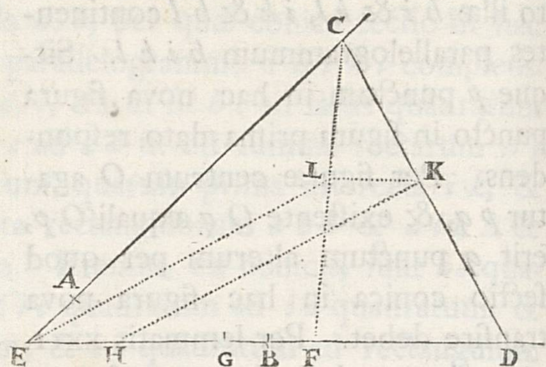
Si rectæ duæ positione datæ AC, BD *ad data puncta* A, B, *terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, &* *recta* CD, *qua puncta indeterminata* C, D *junguntur, secetur in ratione data in* K: *dico quod punctum* K *locabitur in recta positione data.*

Concurrant enim rectæ *AC*, *BD* in *E*, & in *BE* capiatur *BG* ad *AE* ut est *BD* ad *AC*, sitque *FD* semper æqualis datæ *EG*; & erit ex constructione *E C* ad *GD*, hoc est, ad *E F* ut *AC* ad *BD*, ideoque in ratione data, & propterea dabitur specie triangulum *EFC*. Secetur *C F* in *L* ut sit *C L* ad *CF* in ratione *CK* ad *CD*; & ob datam illam rationem, dabitur etiam specie triangulum *E F L*; proindeque punctum *L* locabitur in recta *E L* positione data. Junge *LK*, & similia erunt triangula *CLK*, *CFD*; & ob datam *FD* & datam rationem *L K* ad *FD*, dabitur *L K*. Huic



 æqualis

æqualis capiatur EH, & erit semper $ELKH$ parallelogrammum. Locatur igitur punctum K in parallelogrammi illius latere positione dato HK. *Q. E. D.*

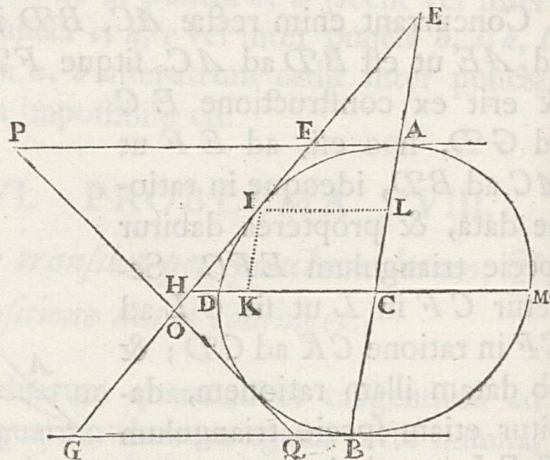


Corol. Ob datam specie figuram $EFLC$, rectæ tres EF, EL & EC, id est, GD, HK & EC, datas habent rationes ad invicem.

LEMMA XXIV.

Si rectæ tres tangant quamcunque coni sectionem, quarum duæ parallelæ sint ac dentur positione; dico quod sectionis semidiameter hisce duabus parallela, sit media proportionalis inter harum segmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.

Sunto AF, GB parallelæ duæ coni sectionem ADB tangentes in A & B; EF recta tertia coni sectionem tangens in I, & occurrens prioribus tangentibus in F & G; sitque CD semidiameter figuræ tangentibus parallela: dico quod AF, CD, BG sunt continue proportionales.



Nam si diametri conjugatæ AB, DM tangenti FG occurrant in E & H, seque mutuo secent in C, & compleatur parallelogrammum $IKCL$; erit ex natura sectionum conicarum ut EC ad CA ita CA ad CL, & ita divisim $EC-CA$ ad $CA-CL$, seu EA ad AL, & composite EA ad $EA+AL$ seu EL ut EC ad $EC+CA$ seu EB; ideoque, ob similitudinem triangulorum EAF, ELI, ECH, EBG, AF ad LI ut

LI ut *CH* ad *BG*. Est itidem, ex natura sectionum conicarum, *LI* seu *CK* ad *CD* ut *CD* ad *CH*; atque ideo ex æquo perturbate *AF* ad *CD* ut *CD* ad *BG*. *Q. E. D.*

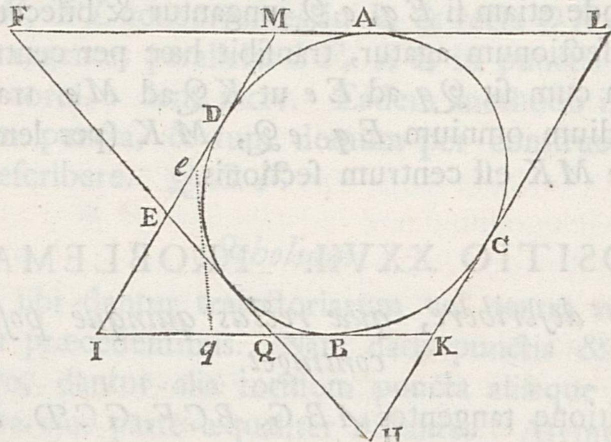
Corol. 1. Hinc si tangentes duæ *FG*, *PQ* tangentibus parallelis *AF*, *BG* occurrant in *F* & *G*, *P* & *Q*, seque mutuo secent in *O*; erit ex æquo perturbate *AF* ad *BQ* ut *AP* ad *BG*, & divisim ut *FP* ad *GQ*, atque ideo ut *FO* ad *OG*.

Corol. 2. Unde etiam rectæ duæ *PG*, *FQ*, per puncta *P* & *G*, *F* & *Q* ductæ, concurrent ad rectam *ACB* per centrum figuræ & puncta contactuum *A*, *B* transeuntem.

LEMMA XXV.

Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant sectionem quamcunque conicam, & abscindantur ad tangentem quamvis quintam; sumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abscissæ terminatæ ad angulos oppositos parallelogrammi: dico quod abscissa alterutra sit ad latus illud a quo est abscissa, ut pars lateris alterius contermini inter punctum contactus & latus tertium est ad abscissarum alteram.

Tangant parallelogrammi *MLIK* latera quatuor *ML*, *IK*, *KL*, *MI* sectionem conicam in *A*, *B*, *C*, *D*, & secet tangens quinta *FQ*



hæc latera in *F*, *Q*, *H* & *E*; sumantur autem laterum *MI*, *KI* abscissæ

abſciſſæ ME, KQ, vel laterum KL, ML abſciſſæ KH, MF: dico quod ſit ME ad MI ut BK ad KQ; & KH ad KL ut AM ad MF. Nam per corollarium primum lemmatis ſuperioris eſt ME ad EI ut AM ſeu BK ad BQ, & componendo ME ad MI ut BK ad KQ. *Q. E. D.* Item KH ad HL ut BK ſeu AM ad AF, & dividendo KH ad KL ut AM ad MF. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi datur parallelogrammum $IKLM$, circa datam ſectionem conicam deſcriptum, dabitur rectangulum $KQ \times ME$, ut & huic æquale rectangulum $KH \times MF$. Æquantur enim rectangula illa ob ſimilitudinem triangulorum KQH, MFE.

Corol. 2. Et ſi ſexta ducatur tangens eq tangentibus KI, MI occurrens in q & e; rectangulum $KQ \times ME$ æquabitur rectangulo $Kq \times Me$; eritque KQ ad Me ut Kq ad ME, & diviſim ut Qq ad Ee.

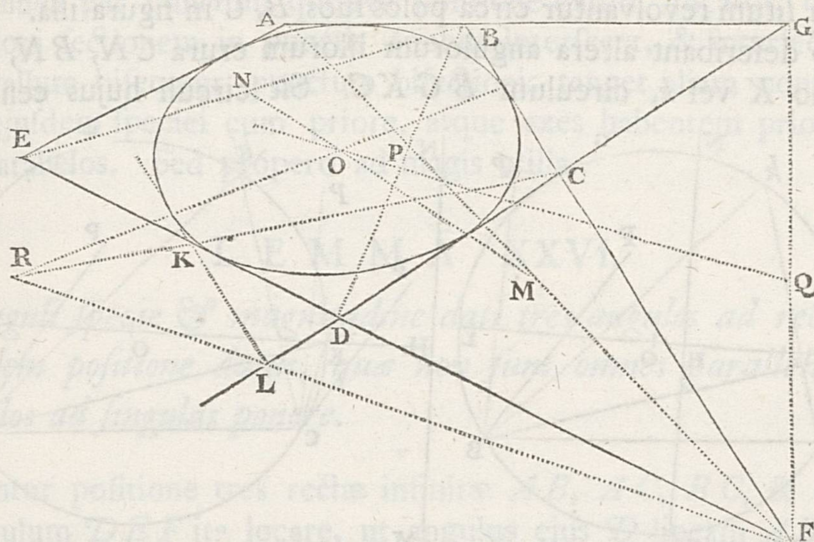
Corol. 3. Unde etiam ſi Eq, eQ jungantur & biſecentur, & recta per puncta biſectionum agatur, tranſibit hæc per centrum ſectionis conicæ. Nam cum ſit Qq ad Ee ut KQ ad Me, tranſibit eadem recta per medium omnium Eq, eQ, MK (per lem. XXIII.) & medium rectæ MK eſt centrum ſectionis.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA XIX.

Trajectoriam deſcribere, quæ rectas quinque poſitione datas continget.

Dentur poſitione tangentes ABG, BCF, GCD, FDE, EA. Figuræ quadrilateræ ſub quatuor quibuſvis contentæ $ABFE$ diagonales

gonales *AF, BE* biseca in *M* & *N*, & (per corol. 3. lem. xxv.) recta *MN* per puncta bisectionum acta transibit per centrum trajectoriæ. Rursus figuræ quadrilateræ *BGDF*, sub aliis quibusvis quatuor tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) *BD, GF* biseca in *P* & *Q*: & recta *PQ* per puncta bisectionum acta transibit per centrum trajectoriæ. Dabitur ergo centrum in concursu bisecantium. Sit illud *O*. Tangenti cuivis *BC* parallelam age *KL*, ad eam distantiam ut centrum *O* in medio inter parallelas locetur,



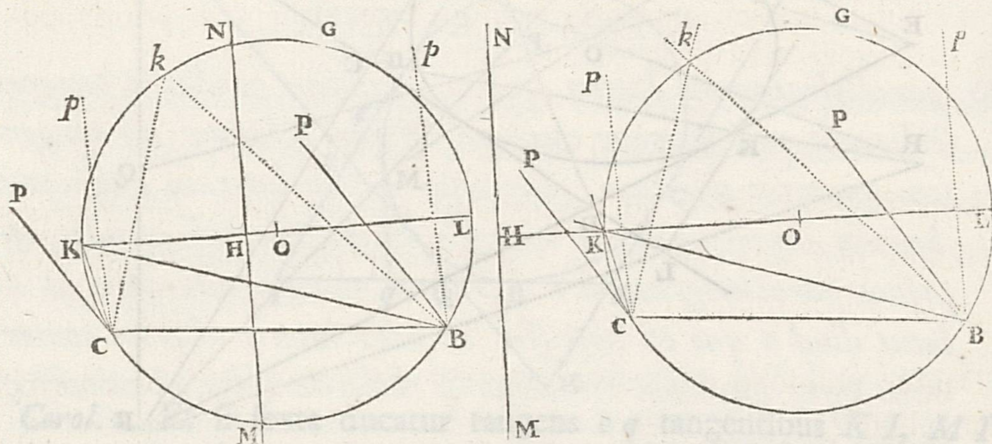
& acta *KL* tanget trajectoriam describendam. Secet hæc tangentes alias quasvis duas *GCD, FDE* in *L* & *K*. Per harum tan entium non parallelarum *CL, FK* cum parallelis *CF, KL* concursus *C* & *K*, *F* & *L* age *CK, FL* concurrentes in *R*, & recta *OR* ducta & producta secabit tangentes parallelas *CF, KL* in punctis contactuum. Patet hoc per corol. 2 lem. xxiv. Eadem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per construct. prob. xiv. trajectoriam describere. *Q. E. F.*

Scholium.

Problemata, ubi dantur trajectoriarum vel centra vel asymptoti, includuntur in præcedentibus. Nam datis punctis & tangentibus una cum centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes a centro ex altera ejus parte æqualiter distantes. Asymptotos autem pro tangente habenda est, & ejus terminus infinite distans (si ita loqui

qui fas ſit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujuſvis punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in Aſymptoton, atque conſtructiones problematum præcedentium vertentur in conſtructiones ubi Aſymptotos datur.

Poſtquam trajectoria deſcripta eſt, invenire licet axes & umbilicos ejus hac methodo. In conſtructione & figura lemmatis XXI. fac ut angulorum mobilium *PBN*, *PCN* crura *BP*, *CP*, quorum concurſu trajectoria deſcribebatur, ſint ſibi invicem parallela, eumque ſervantia ſitum revolvantur circa polos ſuos *B*, *C* in figura illa. Interea vero deſcribant altera angulorum illorum crura *CN*, *BN*, concurſu ſuo *K* vel *k*, circulum *BGKC*. Sit circuli hujus centrum



O. Ab hoc centro ad regulam *MN*, ad quam altera illa crura *CN*, *BN* interea concurrebant, dum trajectoria deſcribebatur, demitte normalem *OH* circulo occurrentem in *K* & *L*. Et ubi crura illa altera *CK*, *BK* concurrunt ad punctum illud *K* quod regulæ propius eſt, crura prima *CP*, *BP* parallela erunt axi majori, & perpendicularia minori; & contrarium eveniet, ſi crura eadem concurrunt ad punctum remotius *L*. Unde ſi detur trajectoriæ centrum, dabuntur axes. Hiſce autem datis, umbilici ſunt in promptu.

Axium vero quadrata ſunt ad invicem ut *KH* ad *LH*, & inde facile eſt trajectoriam ſpecie datam per data quatuor puncta deſcribere. Nam ſi duo ex punctis datis conſtituantur poli *C*, *B*, tertium dabit angulos mobiles, *PCK*, *PBK*; his autem datis deſcribi poteſt circulus *BGKC*. Tum ob datam ſpecie trajectoriam, dabitur ratio *OH* ad *OK*, ideoque ipſa *OH*. Centro *O* & intervallo *OH*

deſcribe

describe alium circulum, & recta, quæ tangit hunc circulum, & transit per concursum crurum *CK*, *BK*, ubi crura prima *CP*, *BP* concurrunt ad quartum datum punctum, erit regula illa *MN* cujus ope trajectoria describetur. Unde etiam vicissim trapezium specie datum (si casus quidam impossibiles excipiantur) in data quavis sectione conica inscribi potest.

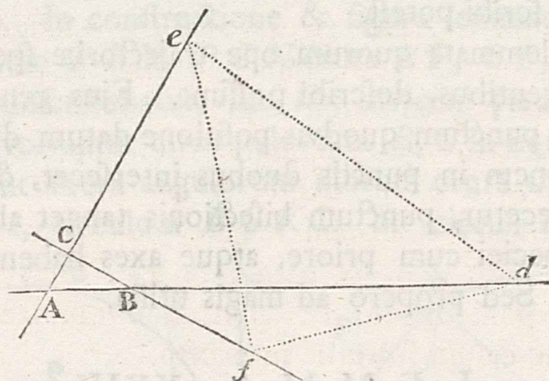
Sunt & alia lemmata quorum ope trajectoriæ specie datæ, datis punctis & tangentibus, describi possunt. Ejus generis est quod, si recta linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quæ datam coni sectionem in punctis duobus intersecet, & intersectionum intervallum bisecetur, punctum bisectionis tanget aliam coni sectionem ejusdem speciei cum priore, atque axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

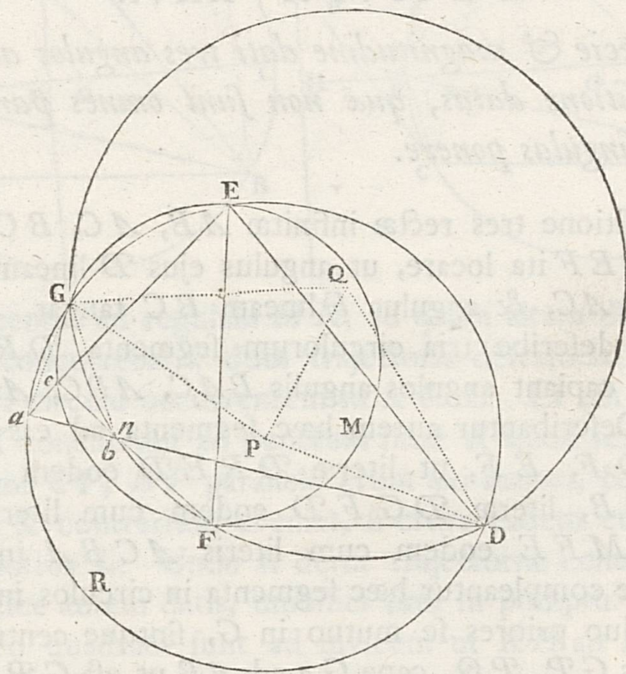
LEMMA XXVI.

Trianguli specie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem positione datas, quæ non sunt omnes parallelæ, singulos ad singulas ponere.

Dantur positione tres rectæ infinitæ *AB*, *AC*, *BC*, & oportet triangulum *DEF* ita locare, ut angulus ejus *D* lineam *AB*, angulus *E* lineam *AC*, & angulus *F* lineam *BC* tangat. Super *DE*, *DF* & *EF* describe tria circulorum segmenta *DRE*, *DGF*, *EMF*, quæ capiant angulos angulis *BAC*, *ABC*, *ACB* æquales respective. Describantur autem hæc segmenta ad eas partes linearum *DE*, *DF*, *EF*, ut literæ *DRED* eodem ordine cum literis *BACB*, literæ *DGFD* eodem cum literis *ABCA*, & literæ *EMFE* eodem cum literis *ACBA* in orbem redeant; deinde compleantur hæc segmenta in circulos integros. Secent circuli duo priores se mutuo in *G*, sintque centra eorum *P* & *Q*. Junctis *GP*, *PQ*, cape *Ga* ad *AB* ut est *GP* ad *PQ*, & centro *G*, intervallo *Ga* describe circulum, qui secet circulum primum *DGE* in *a*. Jungatur tum *aD* secans circulum secundum *DFG* in *b*, tum *aE* secans circulum tertium *EMF* in *c*. Et jam licet figuram *ABCdef* constituere similem & æqualem figuræ *abcDEF*. Quo facto perficitur problema.

Agatur enim *Fc* ipsi *aD* occurrens in *n*, & jungantur *aG*, *bG*, *QG*, *QD*, *PD*. Ex constructione est angulus *EaD* æqualis angulo *CAB*, & angulus *acF* æqualis angulo *ACB*, ideoque triangulum *anc* triangulo *ABC* æquiangulum. Ergo angulus *anc* seu *FnD* angulo *ABC*, ideoque angulo *FbD* æqualis est; & prop-





terea punctum *n* incidit in punctum *b*. Porro angulus *GPQ*, qui dimidius est anguli ad centrum *GPD*, æqualis est angulo ad circumferentiam *GaD*; & angulus *GQP*, qui dimidius est anguli ad centrum *GQD*, æqualis est complemento ad duos rectos anguli ad circumferentiam *GbD*, ideoque æqualis angulo *Gba*; suntque ideo

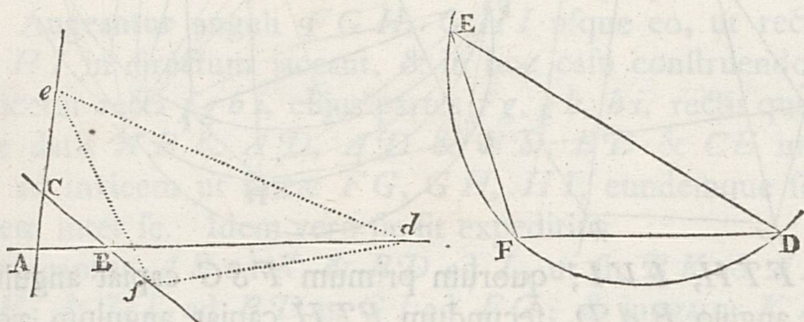
ideo triangula *G P Q*, *G a b* similia; & *G a* est ad *a b* ut *G P* ad *P Q*; id est (ex constructione) ut *G a* ad *A B*. Æquantur itaque *a b* & *A B*; & propterea triangula *a b c*, *A B C*, quæ modo similia esse probavimus, sunt etiam æqualia. Unde, cum tangant insuper trianguli *D E F* anguli *D*, *E*, *F* trianguli *a b c* latera *a b*, *a c*, *b c* respective, compleri potest figura *A B C d e f* figuræ *a b c D E F* similis & æqualis, atque eam complendo solvetur problema. *Q. E. F.* Liber Primus.

Corol. Hinc recta duci potest cujus partes longitudine datæ rectis tribus positione datis interjacebunt. Concipe triangulum *D E F*, puncto *D* ad latus *E F* accedente, & lateribus *D E*, *D F* in directum positis, mutari in lineam rectam, cujus pars data *D E* rectis positione datis *A B*, *A C*, & pars data *D F* rectis positione datis *A B*, *B C* interponi debet; & applicando constructionem præcedentem ad hunc casum solvetur problema.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA XX.

Trajectoriam specie & magnitudine datam describere, cujus partes datæ rectis tribus positione datis interjacebunt.

Describenda sit trajectoria, quæ sit similis & æqualis lineæ curvæ *D E F*, quæque a rectis tribus *A B*, *A C*, *B C* positione datis, in



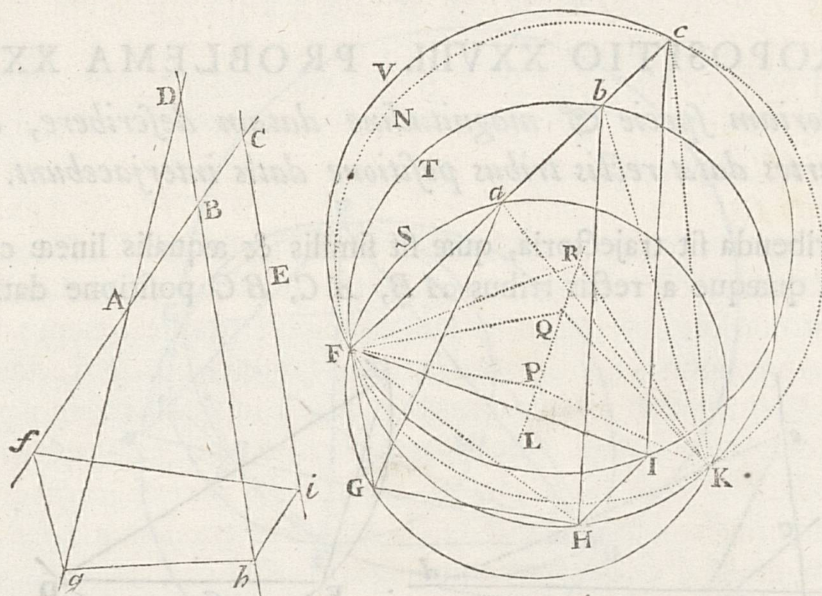
partes datis hujus partibus *D E* & *E F* similes & æquales secabitur.

Age rectas *D E*, *E F*, *D F*, & trianguli hujus *D E F* pone angulos *D*, *E*, *F* ad rectas illas positione datas (per lem. XXVI) dein circa triangulum describe trajectoriam curvæ *D E F* similem & æqualem. *Q. E. F.*

LEMMA XXVII.

Trapezium ſpecie datum deſcribere, cujus anguli ad rectas quatuor poſitione datas, quæ neque omnes parallelæ ſunt, neque ad commune punctum convergunt, ſinguli ad ſingulas conſiſtent.

Dentur poſitione rectæ quatuor *ABC*, *AD*, *BD*, *CE*; quarum prima ſecet ſecundam in *A*, tertiam in *B*, & quartam in *C*: & deſcribendum ſit trapezium *fghi*, quod ſit trapezio *FGHI* ſimile; & cujus angulus *f*, angulo dato *F* æqualis, tangat rectam *ABC*; cæterique anguli *g*, *h*, *i*, cæteris angulis datis *G*, *H*, *I* æquales, tangant cæteras lineas *AD*, *BD*, *CE* reſpective. Jungatur *FH* & ſuper *FG*, *FH*, *FI* deſcribantur totidem circulorum ſegmenta



FSG, *FTH*, *FVI*; quorum primum *FSG* capiat angulum æqualem angulo *BAD*, ſecundum *FTH* capiat angulum æqualem angulo *CBD*, ac tertium *FVI* capiat angulum æqualem angulo *ACE*. Deſcribi autem debent ſegmenta ad eas partes linearum *FG*, *FH*, *FI*, ut literarum *FSGF* idem ſit ordo circularis qui literarum *BADB*, utque literæ *FTHF* eodem ordine cum literis *CBDC*, & literæ *FVIF* eodem cum literis *ACEA* in orbem redeant. Compleantur ſegmenta in circulos integros, ſitque *P* cen-

P centrum circuli primi *FSG*, & *Q* centrum secundi *FTH*. Jungatur & utrinque producatur *PQ*, & in ea capiatur *QR* in ea ratione ad *PQ* quam habet *BC* ad *AB*. Capiatur autem *QR* ad eas partes puncti *Q* ut literarum *P*, *Q*, *R* idem sit ordo atque literarum *A*, *B*, *C*: centroque *R* & intervallo *RF* describatur circulus quartus *FNc* secans circulum tertium *FVI* in *c*. Jungatur *Fc* secans circulum primum in *a*, & secundum in *b*. Agantur *aG*, *bH*, *cI*, & figuræ *abcFGHI* similis constitui potest figura *ABCfghi*. Quo facto erit trapezium *fghi* illud ipsum, quod constituere oportebat.

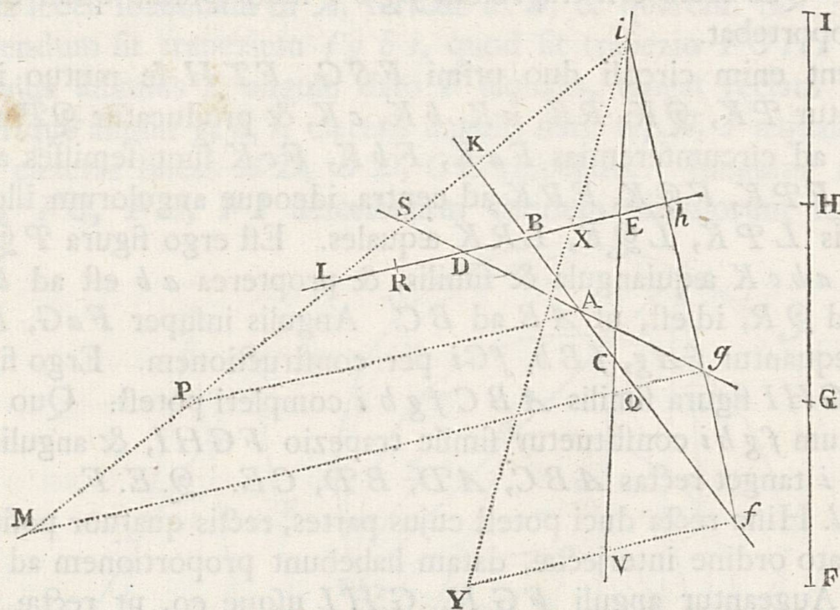
Secent enim circuli duo primi *FSG*, *FTH* se mutuo in *K*. Jungantur *PK*, *QK*, *RK*, *aK*, *bK*, *cK*, & producatur *QP* ad *L*. Anguli ad circumferentias *FaK*, *FbK*, *FcK* sunt semisses angulorum *FPK*, *FQK*, *FRK* ad centra, ideoque angulorum illorum dimidiis *LPK*, *LQK*, *LRK* æquales. Est ergo figura *PQRK* figuræ *abcK* æquiangula & similis, & propterea *ab* est ad *bc* ut *PQ* ad *QR*, id est, ut *AB* ad *BC*. Angulis insuper *FaG*, *FbH* *FcI* æquantur *fAg*, *fBh*, *fCi* per constructionem. Ergo figuræ *abcFGHI* figura similis *ABCfghi* compleri potest. Quo facto trapezium *fghi* constituetur simile trapezio *FGHI*, & angulis suis *f*, *g*, *h*, *i* tanget rectas *ABC*, *AD*, *BD*, *CE*. *Q.E.F.*

Corol. Hinc recta duci potest cujus partes, rectis quatuor positione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli *FGH*, *GHI* usque eo, ut rectæ *FG*, *GH*, *HI* in directum jaceant, & in hoc casu construendo problema ducetur recta *fghi*, cujus partes *fg*, *gh*, *hi*, rectis quatuor positione datis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *CE* interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ *FG*, *GH*, *HI*, eundemque servabunt ordinem inter se. Idem vero sic fit expeditius.

Producantur *AB* ad *K*, & *BD* ad *L*, ut sit *BK* ad *AB* ut *HI* ad *GH*; & *DL* ad *BD* ut *GI* ad *FG*; & jungatur *KL* occurrens rectæ *CE* in *i*. Producatur *iL* ad *M*, ut sit *LM* ad *iL* ut *GH* ad *HI*, & agatur tum *MQ* ipsi *LB* parallela, rectæque *AD* occurrens in *g*, tum *gi* secans *AB*, *BD* in *f*, *h*. Dico factum.

Secet enim *Mg* rectam *AB* in *Q*, & *AD* rectam *KL* in *S*, & agatur *AP* quæ sit ipsi *BD* parallela & occurrat *iL* in *P*, & erunt *gM* ad *Lh* (*gi* ad *hi*, *Mi* ad *Li*, *GI* ad *HI*, *AK* ad *BK*) & *AP* ad

AP ad *BL* in eadem ratione. Secetur *DL* in *R* ut sit *DL* ad *RL* in eadem illa ratione, & ob proportionales *gS* ad *gM*, *AS* ad *AP*, & *DS* ad *DL*; erit, ex æquo, ut *gS* ad *Lh* ita *AS* ad *BL* & *DS* ad *RL*; & mixtim, *BL*—*RL* ad *Lh*—*BL* ut *AS*—*DS* ad *gS*—*AS*. Id est *BR* ad *Bh* ut *AD* ad *Ag*, ideoque ut *BD* ad *gQ*. Et vicissim *BR* ad *BD* ut *Bh* ad *gQ*, seu *fh* ad *fg*. Sed ex constructione linea *BL* eadem ratione secta fuit in *D* & *R* atque linea *FI* in *G* & *H*: ideoque est *BR* ad *BD* ut *FH* ad *FG*. Ergo



fh est ad *fg* ut *FH* ad *FG*. Cum igitur sit etiam *gi* ad *hi* ut *Mi* ad *Li*, id est, ut *GI* ad *HI*, patet lineas *FI*, *fi* in *g* & *h*, *G* & *H* similiter sectas esse. *Q. E. F.*

In constructione corollarii hujus postquam ducitur *LK* secans *CE* in *i*, producere licet *iE* ad *V*, ut sit *EV* ad *Ei* ut *FH* ad *HI*, & agere *Vf* parallelam ipsi *BD*. Eodem recidit si centro *i*, intervallo *IH*, describatur circulus secans *BD* in *X*, & producatur *iX* ad *Y*, ut sit *iY* æqualis *IF*, & agatur *Yf* ipsi *BD* parallela.

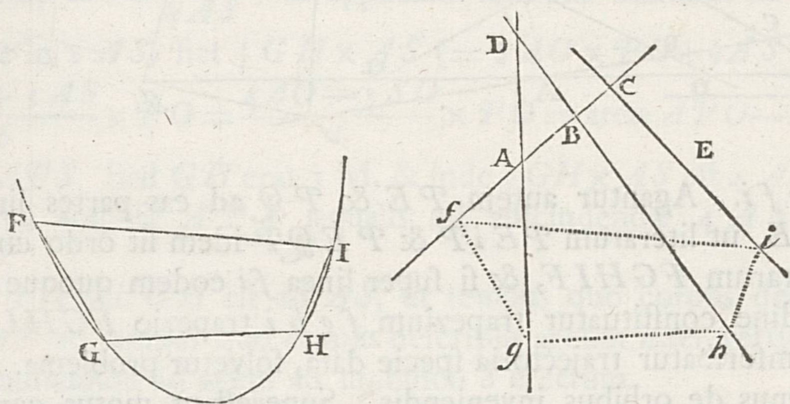
Problematis hujus solutiones alias *Wrennus* & *Wallisius* olim excogitarunt.

PROPO-

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA XXI.

Trajectoriam ſpecie datam deſcribere, quæ a rectis quatuor poſitione datis in partes ſecabitur, ordine, ſpecie & proportione datas.

Deſcribenda ſit trajectoria, quæ ſimilis ſit lineæ curvæ *FGHI*, & cujus partes, illius partibus *FG*, *GH*, *HI* ſimiles & proportionales, rectis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *CE* poſitione datis, prima primis, ſecunda ſecundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis *FG*, *GH*, *HI*, *FI*, deſcribatur (per lem. XXVII.) Trapezium *fghi* quod ſit trapezio *FGHI* ſimile, & cujus anguli *f*, *g*, *h*, *i* tangant rectas illas poſitione datas *AB*, *AD*, *BD*, *CE*, ſinguli ſingulas dicto ordine. Dein circa hoc trapezium deſcribatur trajectoria curvæ lineæ *FGHI* conſimilis.



Scholium.

Conſtrui etiam poteſt hoc problema ut ſequitur. Junctis *FG*, *GH*, *HI*, *FI* produc *GF* ad *V*, jungeque *FH*, *IG*, & angulis *FGH*, *VFH* fac angulos *CAK*, *DAL* æquales. Concurrant *AK*, *AL* cum recta *BD* in *K* & *L*, & inde agantur *KM*, *LN*, quarum *KM* conſtituat angulum *AKM* æqualem angulo *GHI*, ſitque ad *AK* ut eſt *HI* ad *GH*; & *LN* conſtituat angulum *ALN* æqualem angulo *FHI*, ſitque ad *AL* ut *HI* ad *FH*. Ducantur autem *AK*, *KM*

KM, *AL*, *LN* ad eas partes linearum *AD*, *AK*, *AL*, ut literæ *CAKMC*, *ALKA*, *DALND* eodem ordine cum literis *FGHIF* in orbem redeant; & acta *MN* occurrat rectæ *CE* in *i*. Fac angulum *iEP* æqualem angulo *IGF*, ſitque *PE* ad *Ei* ut *FG* ad *GI*; & per *P* agatur *PQf*, quæ cum recta *ADE* contineat angulum *PQE* æqualem angulo *FIG*, rectæque *AB* occurrat in *f*, & jungatur *fi*. Agantur autem *PE* & *PQ* ad eas partes linearum *CE*, *PE*, ut literarum *PEiP* & *PEQP* idem ſit ordo circularis qui literarum *FGHIF*, & ſi ſuper linea *fi* eodem quoque literarum ordine conſtituatur trapezium *fghi* trapezio *FGHI* ſimile, & circumſcribatur trajectoria ſpecie data, ſolvetur problema.

Hactenus de orbibus inveniendis. Supereſt ut motus corporum in orbibus inventis determinemus.

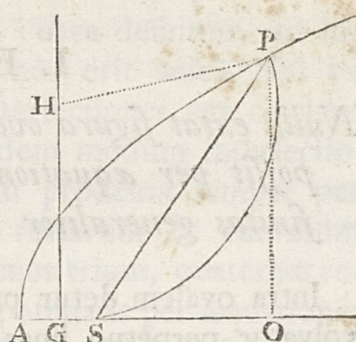
SECTIO VI.

De inventione motuum in orbibus datis.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XXII.

Corporis in data trajectoria parabolica moti invenire locum ad tempus aſſignatum.

Sit *S* umbilicus & *A* vertex principalis parabolæ, ſitque $4AS \times M$ æquale areæ parabolicæ abſcindendæ *APS*, quæ radio *SP*, vel poſt exceſſum corporis de vertice deſcripta fuit, vel ante appulſum ejus



ad verticem describenda est. Innotescit quantitas areæ illius abscindendæ ex tempore ipsi proportionali. Biseca *AS* in *G*, erigeque perpendiculum *GH* æquale 3 M, & circulus centro *H*, intervallo *HS* descriptus secabit parabolam in loco quæsito *P*. Nam, demissa ad axem perpendiculari *PO* & ducta *PH*, est $AGq + GHq$ $(= HPq = \overline{AO - AG}: quad. + \overline{PO - GH}: quad) = AOq + POq - 2GAO - 2GH \times PO + AGq + GHq$. Unde $2GH \times PO (= AOq + POq - 2GAO) = AOq + \frac{3}{4} POq$. Pro AOq scribe $AO \times \frac{POq}{4AS}$; & applicatis terminis omnibus ad $3PO$ ductisque in $2AS$, fiet $\frac{4}{3} GH \times AS$ $(= \frac{1}{6} AO \times PO + \frac{1}{2} AS \times PO = \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO =$ areæ $\overline{APO - SPO})$ = areæ *APS*. Sed *GH* erat 3 M, & inde $\frac{4}{3} GH \times AS$ est $4 AS \times$ M. Ergo area abscissa *APS* æqualis est abscindendæ $4 AS \times$ M. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc *GH* est ad *AS*, ut tempus quo corpus descripsit arcum *AP* ad tempus quo corpus descripsit arcum inter verticem *A* & perpendiculum ad axem ab umbilico *S* erectum.

Corol. 2. Et circulo *ASP* per corpus motum *P* perpetuo transeunte, velocitas puncti *H* est ad velocitatem quam corpus habuit in vertice *A* ut 3 ad 8; ideoque in ea etiam ratione est linea *GH* ad lineam rectam quam corpus tempore motus sui ab *A* ad *P*, ea cum velocitate quam habuit in vertice *A*, describere posset.

Corol. 3. Hinc etiam vice versa inveniri potest tempus quo corpus descripsit arcum quemvis assignatum *AP*. Junge *AP* & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ *GH* occurrens in *H*.

LEMMA XXVIII.

Nulla extat figura ovalis cujus area, rectis pro lubitu abscissa, possit per æquationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.

Intra ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, uniformi cum motu, & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergatque semper ea cum velocitate, quæ sit ut rectæ illius intra ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud describet spiralem gyris infinitis. Jam si areæ ovalis a recta illa abscissæ portio per finitam æquationem inveniri potest, invenietur etiam per eandem æquationem distantia puncti a polo, quæ huic areæ proportionalis est, ideoque omnia spiralis puncta per æquationem finitam inveniri possunt: & propterea rectæ cujusvis positione datæ intersectio cum spirali inveniri etiam potest per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta spiralem secat in punctis numero infinitis, & æquatio, qua intersectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum intersectiones omnes radicibus totidem, ideoque ascendit ad tot dimensiones quot sunt intersectiones. Quoniam circuli duo se mutuo secant in punctis duobus, intersectio una non invenietur nisi per æquationem duarum dimensionum, qua intersectio altera etiam inveniatur. Quoniam duarum sectionum conicarum quatuor esse possunt intersectiones, non potest aliqua earum generaliter inveniri nisi per æquationem quatuor dimensionum, qua omnes simul inveniantur. Nam si intersectiones illæ seorsim quærantur, quoniam eadem est omnium lex & conditio, idem erit calculus in casu unoquoque, & propterea eadem semper conclusio, quæ igitur debet omnes intersectiones simul complecti & indifferenter exhibere. Unde etiam intersectiones sectionum conicarum & curvarum tertiæ potestatis, eo quod sex esse possunt, simul prodeunt per æquationes sex dimensionum, & intersectiones duarum curvarum tertiæ potestatis, quia novem esse possunt, simul prodeunt per æquationes dimensionum novem. Id nisi necessario fieret, reducere liceret problemata omnia solida ad plana, & plusquam solida ad solida. Loquor hic de curvis potestate irre-

irreducibilibus. Nam si æquatio, per quam curva definitur, ad inferiorem potestatem reduci possit: curva non erit unica, sed ex duabus vel pluribus composita, quarum intersectiones per calculos diversos seorsim inveniri possunt. Ad eundem modum intersectiones binæ rectarum & sectionum conicarum prodeunt semper per æquationes duarum dimensionum, ternæ rectarum & curvarum irreducibilium tertiæ potestatis per æquationes trium, quaternæ rectarum & curvarum irreducibilium quartæ potestatis per æquationes dimensionum quatuor, & sic in infinitum. Ergo rectæ & spiralis intersectiones numero infinitæ, cum curva hæc sit simplex & in curvas plures irreducibilis, requirunt æquationes numero dimensionum & radicum infinitas, quibus intersectiones omnes possunt simul exhiberi. Est enim eadem omnium lex & idem calculus. Nam si a polo in rectam illam secantem demittatur perpendiculum, & perpendiculum illud una cum secante revolvatur circa polum, intersectiones spiralis transibunt in se mutuo, quæque prima erat seu proxima, post unam revolutionem secunda erit, post duas tertia, & sic deinceps: nec interea mutabitur æquatio nisi pro mutata magnitudine quantitatum per quas positio secantis determinatur. Unde cum quantitates illæ post singulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, ideoque una eademque exhibebit intersectiones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi possunt. Nequit ergo intersectio rectæ & spiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat ovalis cujus area, rectis imperatis abscissa, possit per talem æquationem generaliter exhiberi.

Eodem argumento, si intervallum poli & puncti, quo spiralis describitur, capiatur Ovalis perimetro abscissæ proportionale, probari potest quod longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi. De ovalibus autem hic loquor quæ non tanguntur a figuris conjugatis in infinitum pergentibus.

Corollarium.

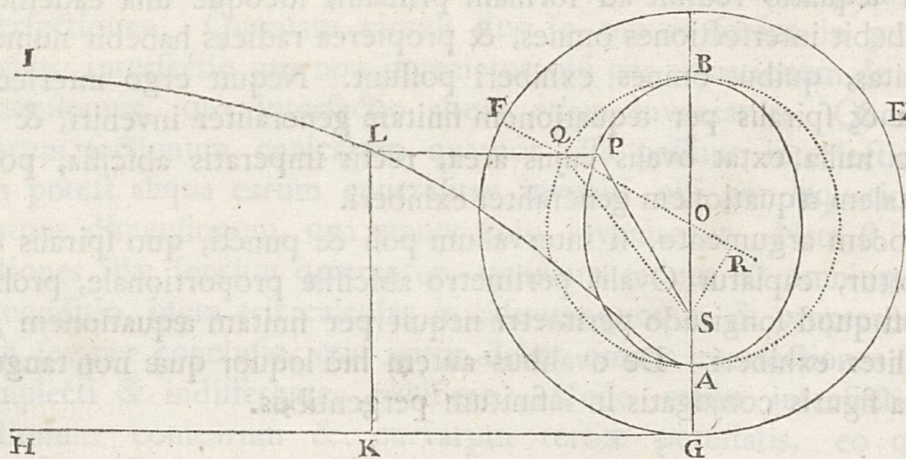
Hinc area ellipseos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto describitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; & propterea per descriptionem curvarum geometrice rationalium determinari nequit. Curvas geometrice rationales appello qua-

rum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id est, per longitudinum rationes complicatas, determinari possunt; cæterasque (ut spirales, quadratrices, trochoides) geometrice irrationales. Nam longitudines quæ sunt vel non sunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo elementorum) sunt arithmetice rationales vel irrationales. Aream igitur ellipseos tempori proportionalem abscindo per curvam geometrice irrationalem ut sequitur.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XXIII.

Corporis in data trajectoria elliptica moti invenire locum ad tempus assignatum.

Ellipseos *APB* sit *A* vertex principalis, *S* umbilicus, & *O* centrum, sitque *P* corporis locus inveniendus. Produc *OA* ad *G*, ut sit *OG* ad *OA* ut *OA* ad *OS*. Erige perpendiculum *GH*, centroque *O* & intervallo *OG* describe circulum *GEF*, & super regula *GH*, ceu fundo, progrediatur rota *GEF* revolvendo circa axem suum, & interea puncto suo *A* describendo trochoidem *ALI*. Quo facto, cape *GK* in ratione ad rotæ perimetrum *GEFG*, ut



est tempus, quo corpus progrediendo ab *A* descripsit arcum *AP*, ad tempus revolutionis unius in ellipsi. Erigatur perpendiculum *KL* occurrens trochoidi in *L*, & acta *LP* ipsi *KG* parallela occurret ellipsi in corporis loco quæsito *P*.

Nam

Nam centro *O*, intervallo *OA* deſcribatur ſemicirculus *AQB*, & arcui *AQ*, occurrat *LP* ſi opus eſt producta in *Q*, junganturque *SQ*, *OQ*. Arcui *EFG* occurrat *OQ* in *F*, & in eandem *OQ* demittatur perpendiculum *SR*. Area *APS* eſt ut area *AQS*, id eſt, ut differentia inter ſectorem *OQA* & triangulum *OQS*, ſive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2}OQ \times AQ$ & $\frac{1}{2}OQ \times SR$, hoc eſt, ob datam $\frac{1}{2}OQ$, ut differentia inter arcum *AQ* & rectam *SR*, ideoque (cum eædem ſint datæ rationes *SR* ad ſinum arcus *AQ*, *OS* ad *OA*, *OA* ad *OG*, *AQ* ad *GF*, & diviſim *AQ* — *SR* ad *GF* — ſinu arcus *AQ*) ut *GK* differentia inter arcum *GF* & ſinum arcus *AQ*. *Q. E. D.*

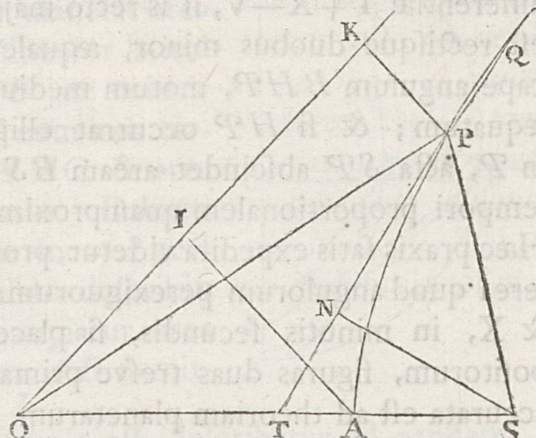
Scholium.

Cæterum, cum difficilis ſit hujus curvæ deſcriptio, præſtat ſolutionem vero proximam adhibere. Inveniatur tum angulus quidam B, qui ſit ad angulum graduum 57.29578, quem arcus radio æqualis ſubtendit, ut eſt umbilicorum diſtantia *SH* ad ellipſeos diametrum *AB*; tum etiam longitudo quædam L, quæ ſit ad radium in eadem

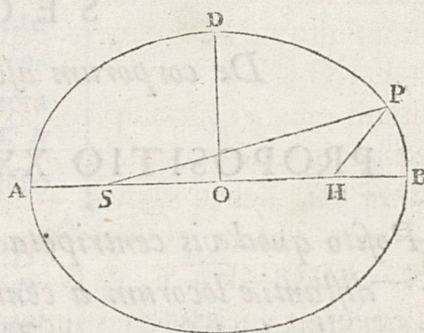
ratione inverſe. Quibus ſemel inventis, problema deinceps conſit per ſequentem analyſin. Per conſtructionem quamvis, vel utcunque conjecturam faciendo, cognoſcatur corporis locus *P* proximus vero ejus loco *p*. Demiſſaque ad axem ellipſeos ordinatim applicata *PR*, ex proportione diametrorum ellipſeos, dabitur circuli circumſcripti *AQB* ordinatim applicata *RQ*, quæ ſinus eſt anguli *AOQ* exiſtente *AO* radio, quæque ellipſin ſecat in *P*. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoſcatur etiam angulus tempori proportionalis, id eſt, qui ſit ad quatuor rectos, ut eſt tempus,

tempus, quo corpus descripsit arcum *Ap*, ad tempus revolutionis unius in ellipsi. Sit angulus iste N. Tum capiatur & angulus D ad angulum B, ut est sinus iste anguli *AOQ* ad radium, & angulus E ad angulum N—*AOQ*+D, ut est longitudo L ad longitudinem eandem L cosinu anguli *AOQ* diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Postea capiatur tum angulus F ad angulum B, ut est sinus anguli *AOQ*+E ad radium, tum angulus G ad angulum N—*AOQ*—E+F ut est longitudo L ad longitudinem eandem cosinu anguli *AOQ*+E diminutam ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Tertia vice capiatur angulus H ad angulum B, ut est sinus anguli *AOQ*+E+G ad radium; & angulus I ad angulum N—*AOQ*—E—G+H, ut est longitudo L ad eandem longitudinem cosinu anguli *AOQ*+E+G diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Et sic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus *AOq* æqualis angulo *AOQ*+E+G+I+ &c. Et ex cosinu ejus *Or* & ordinata *pr*, quæ est ad sinum ejus *qr* ut ellipseos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus *p*. Si quando angulus N—*AOQ*+D negativus est, debet signum + ipsius E ubique mutari in —, & signum — in +. Idem intelligendum est de signis ipsorum G & I, ubi anguli N—*AOQ*—E+F, & N—*AOQ*—E—G+H negativi prodeunt. Convergit autem series infinita *AOQ*+E+G+I+ &c. quam celerrime, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum secundum E. Et fundatur calculus in hoc theoremate, quod area *APS* sit ut differentia inter arcum *AQ* & rectam ab umbilico *S* in radium *OQ* perpendiculariter demissam.

Non dissimili calculo conficitur problema in hyperbola. Sit ejus centrum *O*, vertex *A*, umbilicus *S* & asymptotos *OK*. Cognoscatur quantitas areæ abscindendæ tempori proportionalis. Sit ea A, & fiat conjectura de positione rectæ *SP*, quæ aream *APS* abscindat veræ proximam. Jungatur *OP*, & ab *A* & *P* ad asymptoton agantur *AI*, *PK* asymptoto alteri parallelæ, & per tabulam logarithmorum dabitur area *AIKP*, eique æqualis area *OPA*, quæ subducta de triangulo *OPS* relinquet aream abscissam *APS*. Applicando areæ abscindendæ A & abscissæ *APS* differentiam duplam 2*APS*—2A vel 2A—2*APS* ad lineam *SN*, quæ ab umbilico *S* in tangentem *TP* perpendicularis est, orietur longitudo chordæ *PQ*. Inscribatur autem chorda illa *PQ* inter *A* & *P*, si area abscissa *APS* major sit area abscindenda A, secus ad puncti *P* contrarias partes: & punctum *Q* erit locus corporis accuratior. Et computatione repetita invenietur idem accuratior in perpetuum.

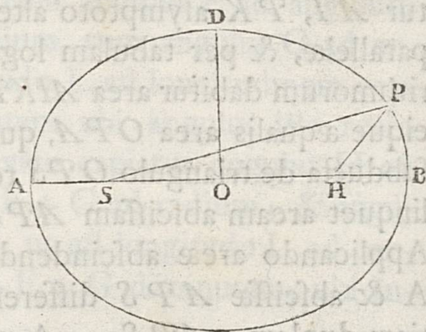


Atque his calculis problema generaliter confit analytice. Verum usibus astronomicis accommodatior est calculus particularis qui sequitur. Existentibus *AO*, *OB*, *OD* semiaxibus ellipseos, & L ipsius latere recto, ac D differentia inter semiaxem minorem *OD* & lateris recti semissem $\frac{1}{2}$ L ; quære tum angulum Y, cujus sinus sit ad radium ut est rectangulum sub differentia illa D, & semisumma axium *AO*+*OD* ad quadratum axis majoris *AB* ; tum angulum Z, cujus sinus sit ad radium ut est duplum rectangulum sub umbilicorum distantia *SH* & differentia illa D ad triplum quadratum semiaxis majoris *AO*. His angulis semel inventis ; locus corporis sic deinceps determinabitur. Sume angulum T proportionalem tempori quo arcus *BP* descriptus est, seu motui medio (ut loquuntur) æqualem ; & angulum V,



primam

primam medii motus æquationem, ad angulum Y, æquationem maximam primam, ut est sinus dupli anguli T ad radium; atque angulum X, æquationem secundam, ad angulum Z, æquationem maximam secundam, ut est cubus sinus anguli T ad cubum radii. Angulorum T, V, X vel summæ T+X+V, si angulus T recto minor est, vel differentiæ T+X—V, si is recto major est rectisque duobus minor, æqualem cape angulum *BHP*, motum medium æquatum; & si *HP* occurrat ellipsi in *P*, acta *SP* abscindet aream *BSP* tempori proportionalem quamproxime. Hæc praxis satis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum V & X, in minutis secundis, si placet, positorum, figuras duas tresve primas invenire sufficit. Sed & satis accurata est ad theoriam planetarum. Nam in orbe vel Martis ipsius, cujus æquatio centri maxima est graduum decem, error vix superabit minutum unum secundum. Invento autem angulo motus medii æquati *BHP*, angulus veri motus *BSP* & distantia *SP* in promptu sunt per methodum notissimam.



Hactenus de motu corporum in lineis curvis. Fieri autem potest ut mobile recta descendat vel recta ascendat, & quæ ad istiusmodi motus spectant, pergo jam exponere.

SECTIO VII.

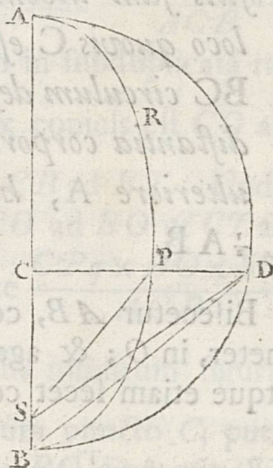
De corporum ascensu & descensu rectilineo.

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XXIV.

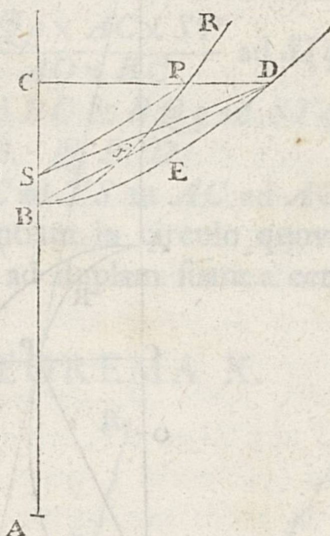
Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ locorum a centro, spatia definire quæ corpus recta cadendo datis temporibus describit.

Cas. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter, describet id (per corol. 1. prop. XIII) sectionem aliquam conicam cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit sectio illa conica *ARPB* & umbilicus

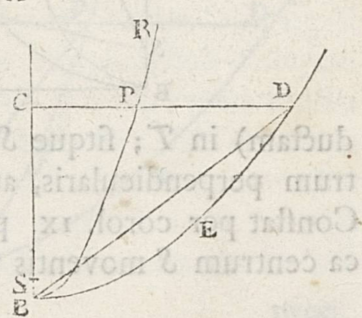
bilicus ejus *S*. Et primo si figura ellipsis est; super hujus axe majore *AB* describatur semicirculus *ADB*, & per corpus decidens transeat recta *DPC* perpendicularis ad axem; actisque *DS*, *PS* erit area *ASD* areæ *ASP*, atque ideo etiam tempori proportionalis. Manente axe *AB* minuatur perpetuo latitudo ellipseos, & semper manebit area *ASD* tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum: & orbe *APB* jam coincidente cum axe *AB* & umbilico *S* cum axis termino *B*, descendet corpus in recta *AC*, & area *ABD* evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque spatium *AC*, quod corpus de loco *A* perpendiculariter cadendo tempore dato describit, si modo tempori proportionalis capiatur area *ABD*, & a puncto *D* ad rectam *AB* demittatur perpendicularis *DC*. *Q. E. I.*



Cas. 2. Si figura illa *RPB* hyperbola est, describatur ad eandem diametrum principalem *AB* hyperbola rectangula *BED*: & quoniam areæ *CSP*, *CBfP*, *SPfB* sunt ad areas *CSD*, *CBED*, *SDEB*, singulæ ad singulas, in data ratione altitudinum *CP*, *CD*; & area *SPfB* proportionalis est tempori quo corpus *P* movebitur per arcum *PfB*; erit etiam area *SDEB* eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum hyperbolæ *RPB* in infinitum manente latere transverso, & coibit arcus *PB* cum recta *CB* & umbilicus *S* cum vertice *B* & recta *SD* cum recta *BD*. Proinde area *BDEB* proportionalis erit tempori quo corpus *C* recto descensu describit lineam *CB*. *Q. E. I.*



Cas. 3. Et simili argumento si figura *RPB* parabola est, & eodem vertice principali *B* describatur alia parabola *BED*, quæ semper maneat data, interea dum parabola prior, in cujus perimetro corpus *P* movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum linea *CB*; fiet segmentum parabolicum *BDEB* proportionale tempori quo corpus illud *P* vel *C* descendet ad centrum *S* vel *B*. *Q. E. I.*



De Motu Corporum

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA IX.

Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C *est ad velocitatem corporis centro* B *intervallo* BC *circulum describentis, in subduplicata ratione quam* AC, *distantia corporis a circuli vel hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore* A, *habet ad figuræ semidiametrum principalem* $\frac{1}{2}$AB.

Bisecetur *AB*, communis utriusque figuræ *RPB*, *DEB* diameter, in *O*; & agatur recta *PT*, quæ tangat figuram *RPB* in *P*, atque etiam secet communem illam diametrum *AB* (si opus est productam) in *T*; sitque *SY* ad hanc rectam, & *BQ* ad hanc diametrum perpendicularis, atque figuræ *RPB* latus rectum ponatur L. Constat per corol. IX. prop. XVI. quod corporis in linea *RPB* circa centrum *S* moventis velocitas in loco quovis *P* sit ad velocitatem corporis

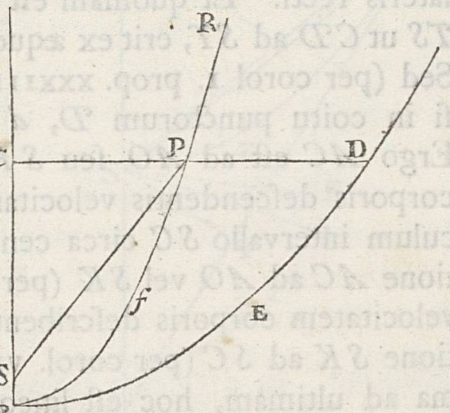
corporis intervallo SP circa idem centrum circulum describentis in subduplicata ratione rectanguli $\frac{1}{2} L \times SP$ ad ST quadratum. Est autem ex conicis ACB ad CPq ut $2\,AO$ ad L, ideoque $\frac{2\,CPq \times AO}{ACB}$ æquale L. Ergo velocitates illæ sunt ad invicem in subduplicata ratione $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ ad ST *quad.* Porro ex conicis est CO ad BO ut BO ad TO, & composite vel divisim ut CB ad BT. Unde vel dividendo vel componendo fit BO — vel + CO ad BO ut CT ad BT, id est, AC ad AO ut CP ad BQ; indeque $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ æquale est $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Minuatur jam in infinitum figuræ RPB latitudo CP, sic ut punctum P coeat cum puncto C, punctumque S cum puncto B, & linea SP cum linea BC, lineaque ST cum linea BQ; & corporis jam recta descendentis in linea CB velocitas fiet ad velocitatem corporis centro B intervallo BC circulum describentis, in subduplicata ratione ipsius $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad STq, hoc est (neglectis æqualitatis rationibus SP ad BC & BQq ad STq) in subduplicata ratione AC ad AO sive $\frac{1}{2} AB$. *Q. E. D.*

Corol. 1. Punctis B & S coeuntibus, fit TC ad TS ut AC ad AO.

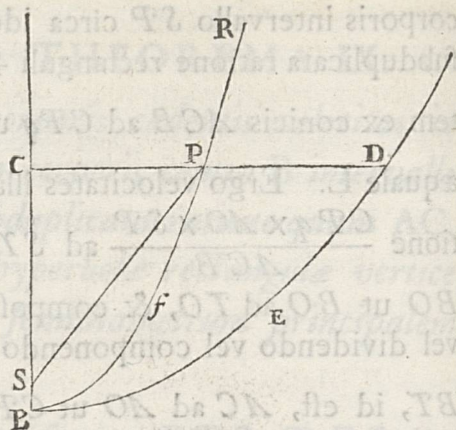
Corol. 2. Corpus ad datam a centro distantiam in circulo quovis revolvens, motu suo sursum verso ascendet ad duplam suam a centro distantiam.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA X.

Si figura BED *parabola est, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis* C *æqualis est velocitati qua corpus centro* B *dimidio intervalli sui* BC *circulum uniformiter describere potest.*



Nam corporis parabolam RPB circa centrum S describentis velocitas in loco quovis P (per corol. VII.



prop. xvi.) æqualis est velocitati corporis dimidio intervalli *SP* circulum circa idem centrum *S* uniformiter describentis. Minuatur parabolæ latitudo *CP* in infinitum eo, ut arcus parabolicus *PfB* cum recta *CB*, centrum *S* cum vertice *B*, & intervallum *SP* cum intervallo *BC* coincidat, & constabit propositio. *Q. E. D.*

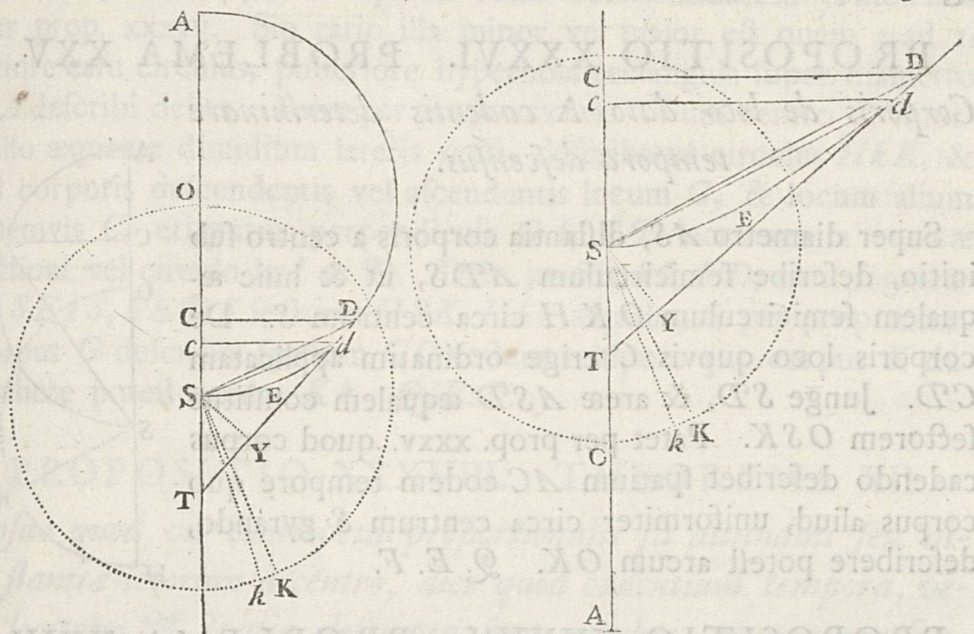
PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XI.

Iisdem positis, dico quod area figuræ DES, *radio indefinito* SD *descripta, æqualis sit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ* DES *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando, eodem tempore describere potest.*

Nam concipe corpus *C* quam minima temporis particula lineolam *Cc* cadendo describere, & interea corpus aliud *K*, uniformiter in circulo *OKk* circa centrum *S* gyrando, arcum *Kk* describere. Erigantur perpendicula *CD*, *cd* occurrentia figuræ *DES* in *D*, *d*. Jungantur *SD*, *Sd*, *SK*, *Sk* & ducatur *Dd* axi *AS* occurrens in *T*, & ad eam demittatur perpendiculum *SY*.

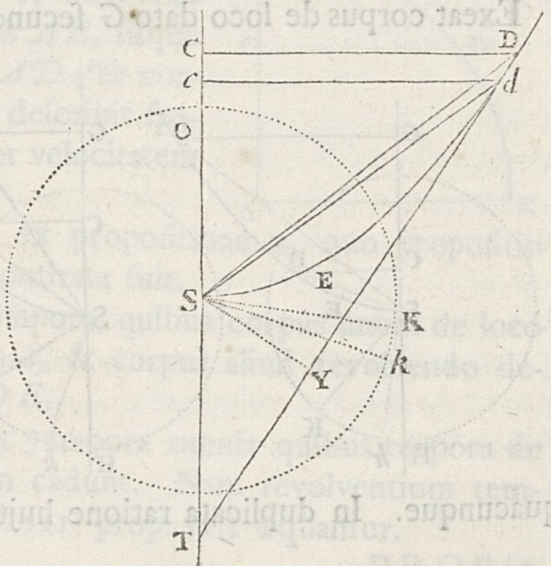
Cas. 1. Jam si figura *DES* circulus est vel hyperbola rectangula, bisecetur ejus transversa diameter *AS* in *O*, & erit *SO* dimidium lateris recti. Et quoniam est *TC* ad *TD* ut *Cc* ad *Dd*, & *TD* ad *TS* ut *CD* ad *SY*, erit ex æquo *TC* ad *TS* ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Sed (per corol 1. prop. xxxiii.) est *TC* ad *TS* ut *AC* ad *AO*, puta si in coitu punctorum *D*, *d* capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo *AC* est ad *AO* seu *SK* ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Porro corporis descendentis velocitas in *C* est ad velocitatem corporis circulum intervallo *SC* circa centrum *S* describentis in subduplicata ratione *AC* ad *AO* vel *SK* (per prop. xxxiii.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis describentis circulum *OKk* in subduplicata ratione *SK* ad *SC* (per corol. vi. prop. iv.) & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc est lineola *Cc* ad arcum *Kk* in subduplicata ratione

ratione AC ad SC, id est in ratione AC ad CD. Quare est $CD \times Cc$ æquale $AC \times Kk$, & propterea AC ad SK ut $AC \times Kk$ ad $SY \times Dd$, indeque $SK \times Kk$ æquale $SY \times Dd$, & $\frac{1}{2} SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{2} SY \times Dd$, id est area KSk æqualis areæ SDd. Singulis igitur temporis



particulis generantur arearum duarum particulæ KSk, & SDd, quæ, si magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per corollarium lemmatis IV.) areæ totæ simul genitæ sunt semper æquales. *Q. E. D.*

Cas. 2. Quod si figura DES parabola sit, invenietur esse ut supra $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$ ut TC ad TS, hoc est ut 2 ad 1, ideoque $\frac{1}{4} CD \times Cc$ æquale esse $\frac{1}{2} SY \times Dd$. Sed corporis cadentis velocitas in C æqualis est velocitati qua circulus intervallo $\frac{1}{2} SC$ uniformiter describi possit (per prop. XXXIV.) Et hæc velocitas ad velocitatem qua circulus radio SK describi possit, hoc est, lineola Cc ad arcum Kk (per corol. VI.



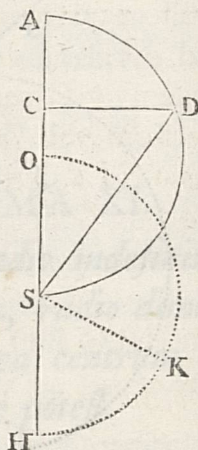
prop.

De Motu Corporum

prop. IV.) est in subduplicata ratione SK ad $\frac{1}{2} SC$, id est, in ratione SK ad $\frac{1}{2} CD$. Quare est $\frac{1}{2} SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{4} CD \times Cc$, ideoque æquale $\frac{1}{2} ST \times Dd$, hoc est, area KSk æqualis areæ SDd, ut supra. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XXV.

Corporis de loco dato A *cadentis determinare tempora descensus.*

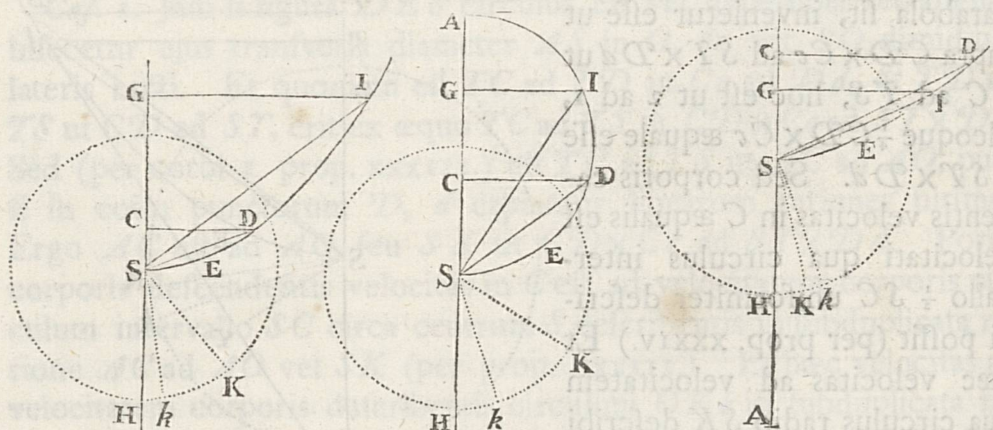


Super diametro AS, distantia corporis a centro sub initio, describe semicirculum ADS, ut & huic æqualem semicirculum OKH circa centrum S. De corporis loco quovis C erige ordinatim applicatam CD. Junge SD, & areæ ASD æqualem constitue sectorem OSK. Patet per prop. XXXV. quod corpus cadendo describet spatium AC eodem tempore quo corpus aliud, uniformiter circa centrum S gyrando, describere potest arcum OK. *Q. E. F.*

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XXVI.

Corporis de loco dato sursum vel deorsum projecti definire tempora ascensus vel descensus.

Exeat corpus de loco dato G secundum lineam GS cum velocitate



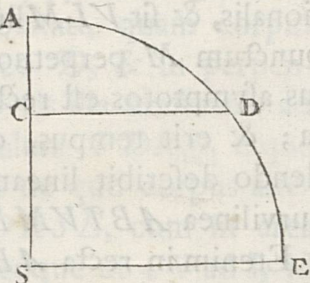
quacunque. In duplicata ratione hujus velocitatis ad uniformem in circulo

circulo velocitatem, qua corpus ad intervallum datum *SG* circa centrum *S* revolvi posset, cape *GA* ad $\frac{1}{2}$ *AS*. Si ratio illa est numeri binarii ad unitatem, punctum *A* infinite distat, quo casu parabola vertice *S*, axe *SG*, latere quovis recto describenda est. Patet hoc per prop. XXXIV. Sin ratio illa minor vel major est quam 2 ad 1, priore casu circulus, posteriore hyperbola rectangula super diametro *SA* describi debet. Patet per prop. XXXIII. Tum centro *S*, intervallo æquante dimidium lateris recti, describatur circulus *HkK*, & ad corporis descendentis vel ascendentis locum *G*, & locum alium quemvis *C*, erigantur perpendicula *GI*, *CD* occurrentia conicæ sectioni vel circulo in *I* ac *D*. Dein junctis *SI*, *SD*, fiant segmentis *SEIS*, *SEDS* sectores *HSK*, *HSk* æquales, & per prop. XXXV. corpus *G* describet spatium *GC* eodem tempore quo corpus *K* describere potest arcum *Kk*. *Q.E.F.*

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XII.

Posito quod vis centripeta proportionalis sit altitudini seu distantiæ locorum a centro, dico quod cadentium tempora, velocitates & spatia descripta sunt arcubus, arcuumque sinibus rectis & sinibus versis respective proportionalia.

Cadat corpus de loco quovis *A* secundum rectam *AS*; & centro virium *S*, intervallo *AS*, describatur circuli quadrans *AE*, sitque *CD* sinus rectus arcus cujusvis *AD*; & corpus *A*, tempore *AD*, cadendo describit spatium *AC*, inque loco *C* acquiret velocitatem *CD*.



Demonstratur eodem modo ex propositione X, quo propositio XXXII, ex propositione XI demonstrata fuit.

Corol. 1. Hinc æqualia sunt tempora, quibus corpus unum de loco *A* cadendo pervenit ad centrum *S*, & corpus aliud revolvendo describit arcum quadrantalem *ADE*.

Corol. 2. Proinde æqualia sunt tempora omnia quibus corpora de locis quibusvis ad usque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per corol. III. prop. IV.) æquantur.

PROPO-

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XXVII.

Posita cujuscunque generis vi centripeta, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis recta ascendentis vel descendentis tum velocitas in locis singulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.

De loco quovis *A* in recta *ADEC* cadat corpus *E*, deque loco ejus *E* erigatur semper perpendicularis *EG*, vi centripetæ in loco illo ad centrum *C* tendenti proportionalis: Sitque *BFG* linea curva quam punctum *G* perpetuo tangit. Coincidat autem *EG* ipso motus initio cum perpendiculari *AB*, & erit corporis velocitas in loco quovis *E* ut recta, quæ potest aream curvilineam *ABGE*. *Q. E. I.*

In *EG* capiatur *EM* rectæ, quæ potest aream *ABGE*, reciproce proportionalis, & sit *VLM* linea curva, quam punctum *M* perpetuo tangit, & cujus asymptotos est recta *AB* producta; & erit tempus, quo corpus cadendo describit lineam *AE*, ut area curvilinea *ABTVME*. *Q. E. I.*

Etenim in recta *AE* capiatur linea quam minima *DE* datæ longitudinis, sitque *DLF* locus lineæ *EMG*, ubi corpus versabatur in *D*; & si ea sit vis centripeta, ut recta, quæ potest aream *ABGE*, sit ut descendentis velocitas: erit area ipsa in duplicata ratione velocitatis, id est, si pro velocitatibus in *D* & *E*, scribantur V & V+I, erit area *ABFD* ut VV, & area *ABGE* ut VV+2VI+II, & divisim area *DFGE* ut 2VI+II, ideoque $\frac{DFGE}{DE}$

ut

ut $\frac{2VI+II}{DE}$, id eſt, ſi primæ quantitatum naſcentium rationes ſumantur, longitudo *DF* ut quantitas $\frac{2VI}{DE}$, ideoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$. Eſt autem tempus, quo corpus cadendo deſcribit lineolam *DE*, ut lineola illa directe & velocitas V inverſe, eſtque vis ut velocitatis incrementum I directe & tempus inverſe, ideoque ſi primæ naſcentium rationes ſumantur, ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc eſt, ut longitudo *DF*. Ergo vis ipſi *DF* vel *EG* proportionalis facit ut corpus ea cum velocitate deſcendat, quæ ſit ut recta quæ poteſt aream *ABGE*. *Q. E. D.*

Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola *DE* deſcribatur, ſit ut velocitas inverſe, ideoque inverſe ut linea recta quæ poteſt aream *ABFD*; ſitque *DL*, atque ideo area naſcens *DLME*, ut eadem linea recta inverſe : erit tempus ut area *DLME*, & ſumma omnium temporum ut ſumma omnium arearum, hoc eſt (per corol. lem. iv.) tempus totum quo linea *AE* deſcribitur ut area tota *ATVME*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si *P* ſit locus, de quo corpus cadere debet, ut urgente aliqua uniformi vi centripeta nota (qualis vulgo ſupponitur gravitas) velocitatem acquirat in loco *D* æqualem velocitati, quam corpus aliud vi quacunque cadens acquiſivit eodem loco *D*, & in perpendiculari *DF* capiatur *DR*, quæ ſit ad *DF* ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco *D*, & compleatur rectangulum *PDRQ*, eique æqualis abſcindatur area *ABFD*; erit *A* locus de quo corpus alterum cecidit. Namque completo rectangulo *DRSE*, cum ſit area *ABFD* ad aream *DFGE* ut VV ad 2VI, ideoque ut $\frac{1}{2}$V ad I, id eſt, ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; & ſimiliter area *PQRD* ad aream *DRSE* ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; ſintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum naſcentium) ut vires generatrices, id eſt, ut ordinatim applicatæ *DF*, *DR*, ideoque ut areæ naſcentes *DFGE*, *DRSE*; erunt ex æquo areæ totæ *ABFD*, *PQRD* ad invicem ut ſemiſſes totarum velocitatum, & propterea, ob æqualitatem velocitatum, æquantur.

R *Corol.*

De Motu Corporum

Corol. 2. Unde si corpus quodlibet de loco quocunque *D* data cum velocitate vel sursum vel deorsum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco *e*, erigendo ordinatam *eg*, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco *D* ut est recta, quæ potest rectangulum *PQRD* area curvilinea *DFge* vel auctum, si locus *e* est loco *D* inferior, vel diminutum, si is superior est, ad rectam quæ potest rectangulum solum *PQRD*.

Corol. 3. Tempus quoque innotescet erigendo ordinatam *em* reciproce proportionalem lateri quadrato ex *PQRD* + vel − *DFge*, & capiendo tempus quo corpus descripsit lineam *De* ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit a *P* & cadendo pervenit ad *D*, ut area curvilinea *DLme* ad rectangulum $2PD \times DL$. Namque tempus quo corpus vi uniformi descendens descripsit lineam *PD* est ad tempus quo corpus idem descripsit lineam *PE* in subduplicata ratione *PD* ad *PE*, id est (lineola *DE* jamjam nascente) in ratione *PD* ad $PD + \frac{1}{2}DE$ seu $2PD$ ad $2PD + DE$, & divisim, ad tempus quo corpus idem descripsit lineolam *DE* ut $2PD$ ad *DE*, ideoque ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream *DLME*; estque tempus quo corpus utrumque descripsit lineolam *DE* ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu descripsit lineam *De*, ut area *DLME* ad aream *DLme*, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream *DLme*.

SECTIO

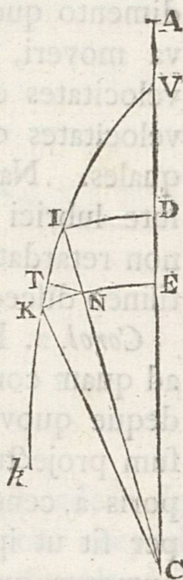
SECTIO VIII.

De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur.

PROPOSITIO XL. THEOREMA. XIII.

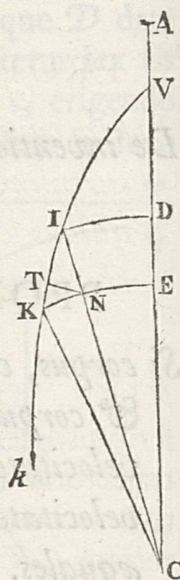
Si corpus, cogente vi quacunque centripeta, moveatur utcunque, & corpus aliud recta ascendat vel descendat, sintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Descendat corpus aliquod ab *A* per *D*, *E*, ad centrum *C*, & moveatur corpus aliud a *V* in linea curva *VIKk*. Centro *C* intervallis quibusvis describantur circuli concentrici *DI*, *EK* rectæ *AC* in *D* & *E*, curvæque *VIK* in *I* & *K* occurrentes. Jungatur *IC* occurrens ipsi *KE* in *N*; & in *IK* demittatur perpendiculum *NT*; sitque circumferentiarum circulorum intervallum *DE* vel *IN* quam minimum, & habeant corpora in *D* & *I* velocitates æquales. Quoniam distantiæ *CD*, *CI* æquantur, erunt vires centripetæ in *D* & *I* æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas *DE*, *IN*; & si vis una *IN* (per legum corol. 2.) resolvatur in duas *NT* & *IT*, vis *NT*, agendo secundum lineam *NT* corporis cursui *ITK* perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in cursu illo, sed retrahet solummodo corpus a cursu rectilineo, facietque ipsum de orbis tangente perpetuo deflectere, inque via curvilinea *ITKk* progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota consumetur: vis autem altera *IT*, secundum corporis cursum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit sibi ipsi proportionalem. Proinde corporum in *D* & *I* accelerationes æqualibus temporibus factæ (si



De Motu Corporum

ſumantur linearum naſcentium *DE, IN, IK, IT, NT* rationes primæ) ſunt ut lineæ *DE, IT*: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora autem quibus *DE* & *IK* deſcribuntur, ob æqualitatem velocitatum ſunt ut viæ deſcriptæ *DE* & *IK*, ideoque accelerationes, in curſu corporum per lineas *DE* & *IK*, ſunt ut *DE* & *IT*, *DE* & *IK* conjunctim, id eſt ut *DE quad.* & *IT* x *IK rectangulum*. Sed *rectangulum IT* x *IK* æquale eſt *IN quadrato*, hoc eſt, æquale *DE quad.* & propterea accelerationes in tranſitu corporum a *D* & *I* ad *E* & *K* æquales generantur. Æquales igitur ſunt corporum velocitates in *E* & *K*: & eodem argumento ſemper reperientur æquales in ſubſequentibus æqualibus diſtantiis. *Q. E. D.*



Sed & eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter a centro diſtantia, in aſcenſu ad æquales diſtantias æqualiter retardabuntur. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpus vel oſcilletur pendens a filo, vel impedimento quovis politiſſimo & perfecte lubrico cogatur in linea curva moveri, & corpus aliud recta aſcendat vel deſcendat, ſintque velocitates eorum in eadem quacunque altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuſcunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque corporis penduli filo vel impedimento vaſis abſolute lubrici idem præſtatur quod vi tranſverſa *NT*. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, ſed tantum cogitur de curſu rectilineo diſcedere.

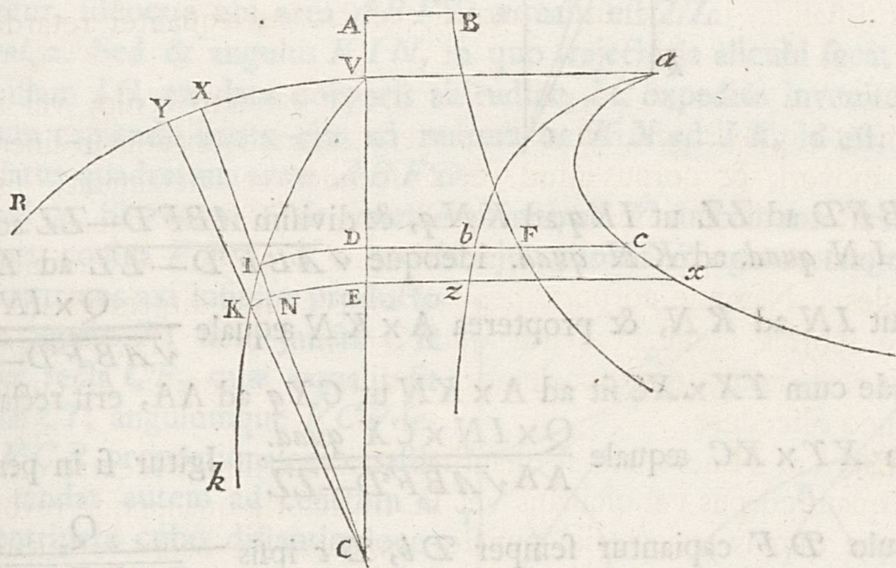
Corol. 2. Hinc etiam ſi quantitas P ſit maxima a centro diſtantia, ad quam corpus vel oſcillans vel in trajectoria quacunque revolvens, deque quovis trajectoriæ puncto, ea quam ibi habet velocitate ſurſum projectum aſcendere poſſit; ſitque quantitas A diſtantia corporis a centro in alio quovis orbitæ puncto, & vis centripeta ſemper ſit ut ipſius A dignitas quælibet A^{n-1}, cujus index $n-1$ eſt numerus quilibet n unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$, atque ideo datur. Namque velocitas recta aſcendentis ac deſcendentis (per prop. XXXIX.) eſt in hac ipſa ratione.

PROPO-

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXVIII.

Posita cujuscunque generis vi centripeta & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in trajectoriis inventis.

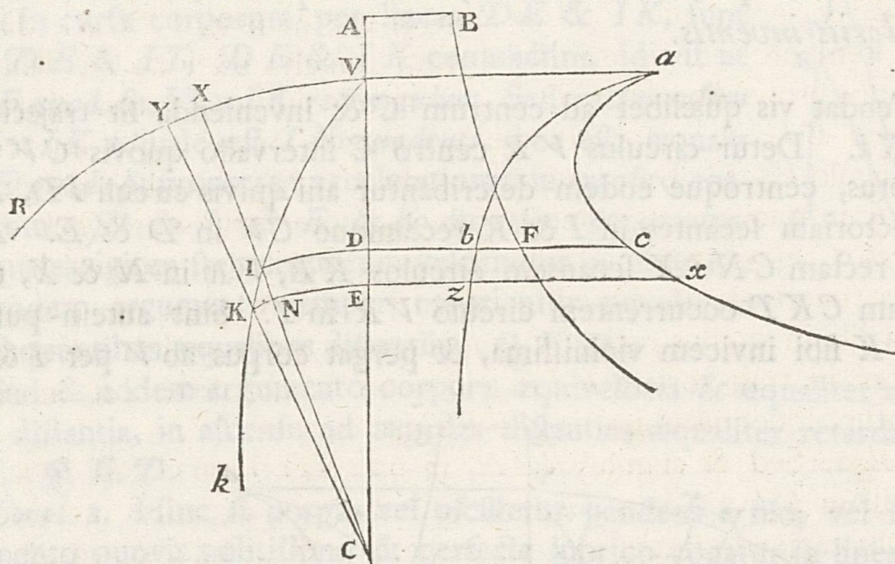
Tendat vis quælibet ad centrum *C* & invenienda sit trajectoria *VIKk*. Detur circulus *VR* centro *C* intervallo quovis *CV* descriptus, centroque eodem describantur alii quivis circuli *ID*, *KE* trajectoriam secantes in *I* & *K* rectamque *CV* in *D* & *E*. Age tum rectam *CNIX* secantem circulos *KE*, *VR* in *N* & *X*, tum rectam *CKY* occurrentem circulo *VR* in *Y*. Sint autem puncta *I* & *K* sibi invicem vicinissima, & pergat corpus ab *V* per *I* & *K*



ad *k*; sitque punctum *A* locus ille de quo corpus aliud cadere debet, ut in loco *D* velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in *I*. Et stantibus quæ in propositione XXXIX, lineola *IK*, dato tempore quam minimo descripta, erit ut velocitas, atque ideo ut recta quæ potest aream *ABFD*, & triangulum *ICK* tempori proportionale dabitur, ideoque *KN* erit reciproce ut altitudo *IC*, id

De Motu Corporum

id est, si detur quantitas aliqua Q, & altitudo *IC* nominetur A, ut $\frac{Q}{A}$. Hanc quantitatem $\frac{Q}{A}$ nominemus Z, & ponamus eam esse magnitudinem ipsius Q ut sit in aliquo casu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut est *IK* ad *KN*, & erit in omni casu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut *IK* ad *KN*, &



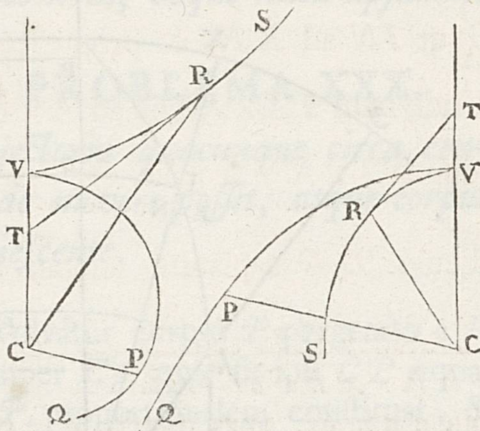
$ABFD$ ad ZZ ut IKq ad KNq, & divisim $ABFD-ZZ$ ad ZZ ut *IN quad.* ad *KN quad.* ideoque $\sqrt{ABFD-ZZ}$ ad Z seu $\frac{Q}{A}$ ut *IN* ad *KN*, & propterea $A\times KN$ æquale $\frac{Q\times IN}{\sqrt{ABFD-ZZ}}$. Unde cum $YX\times XC$ sit ad $A\times KN$ ut CXq ad AA, erit rectangulum $XY\times XC$ æquale $\frac{Q\times IN\times CX\ quad.}{AA\sqrt{ABFD-ZZ}}$. Igitur si in perpendiculo *DF* capiantur semper *Db*, *Dc* ipsis $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD-ZZ}}$, $\frac{Q\times CX\ quad.}{2AA\sqrt{ABFD-ZZ}}$ æquales respective, & describantur curvæ lineæ *ab*, *ac*, quas puncta *b*, *c* perpetuo tangunt; deque puncto *V* ad lineam *AC* erigatur perpendiculum *Va* abscindens areas curvilineas *VDba*, *VDca*, & erigantur etiam ordinatæ *Ez*, *Ex*: quoniam rectangulum $Db\times IN$ seu *DbzE* æquale est dimidio rectanguli

guli A×*KN* seu triangulo *ICK*; & rectangulum *Dc*×*IN* seu *Dcx*×*E* æquale est dimidio rectanguli *YX*×*XC* seu triangulo *XCY*; hoc est, quoniam arearum *VDba*, *VIC* æquales semper sunt nascentes particulæ *DbzE*, *ICK*, & arearum *VDca*, *VCX* æquales semper sunt nascentes particulæ *DcxE*, *XCY*, erit area genita *VDba* æqualis areæ genitæ *VIC*, ideoque tempori proportionalis, & area genita *VDca* æqualis sectori genito *VCX*. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus discessit de loco *V*, dabitur area ipsi proportionalis *VDba*, & inde dabitur corporis altitudo *CD* vel *CI*; & area *VDca*, eique æqualis sector *VCX* una cum ejus angulo *VCI*. Datis autem angulo *VCI* & altitudine *CI* datur locus *I*, in quo corpus completo illo tempore reperietur. *Q. E. I.*

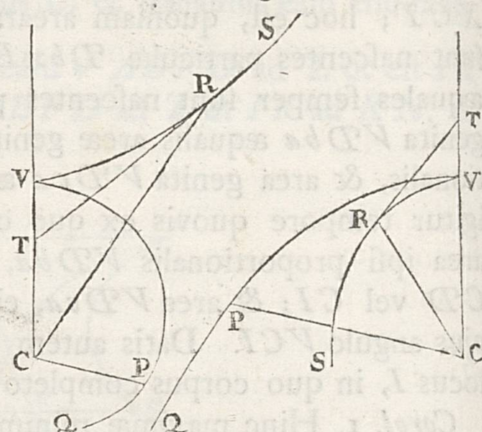
Corol. 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id est, apsides trajectoriarum expedite inveniri possunt. Sunt enim apsides puncta illa in quibus recta *IC* per centrum ducta incidit perpendiculariter in trajectoriam *VIK*: id quod fit ubi rectæ *IK* & *NK* æquantur, ideoque ubi area *ABFD* æqualis est ZZ.

Corol. 2. Sed & angulus *KIN*, in quo trajectoria alicubi secat lineam illam *IC*, ex data corporis altitudine *IC* expedite invenitur; nimirum capiendo sinum ejus ad radium ut *KN* ad *IK*, id est, ut Z ad latus quadratum areæ *ABFD*.

Corol. 3. Si centro *C* & vertice principali *V* describatur sectio quælibet conica *VRS*, & a quovis ejus puncto *R* agatur tangens *RT* occurrens axi infinitæ producto *CV* in puncto *T*; dein juncta *CR* ducatur recta *CP*, quæ æqualis sit abscissæ *CT*, angulumque *VCP* sectori *VCR* proportionalem constituat; tendat autem ad centrum *C* vis centripeta cubo distantiæ locorum a centro reciproce proportionalis, & exeat corpus de loco *V* justa cum velocitate secundum lineam rectæ *CV* perpendicularem: progredietur corpus illud in trajectoria *VPQ* quam punctum *P* perpetuo tangit; ideoque si conica sectio *VRS* hyperbola sit, descendet idem ad centrum: Sin ea ellipsis sit, ascendet illud perpetuo & abibit



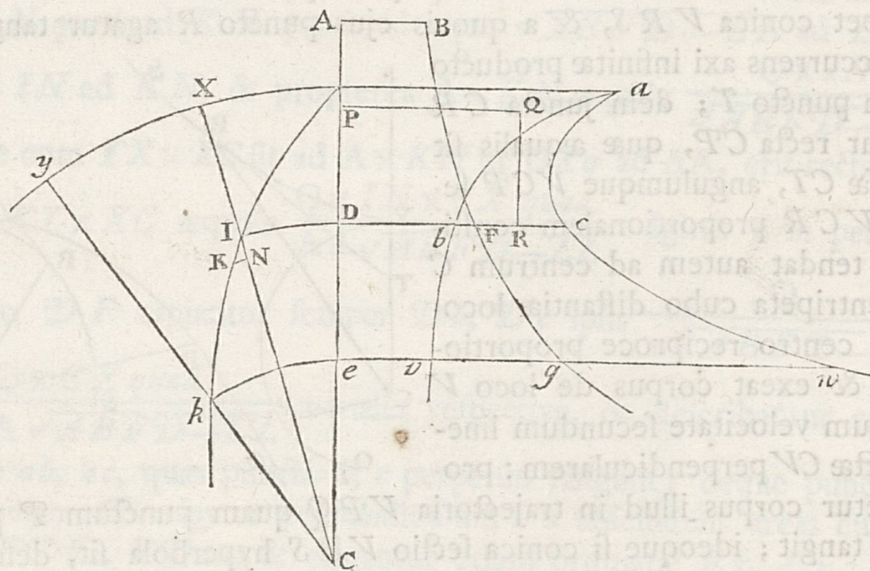
abibit in infinitum. Et contra, si corpus quacunque cum velocitate exeat de loco *V*, & perinde ut incœperit vel oblique descendere ad centrum, vel ab eo oblique ascendere, figura *VRS* vel hyperbola sit vel ellipsis, inveniri potest trajectoria augendo vel minuendo angulum *VCP* in data aliqua ratione. Sed &, vi centripeta in centrifugam versa, ascendet corpus oblique in trajectoria *VPQ*, quæ invenitur capiendo angulum *VCP* sectori elliptico *VRC* proportionalem, & longitudinem *CP* longitudini *CT* æqualem ut supra. Consequuntur hæc omnia ex propositione præcedente, per curvæ cujusdam quadraturam, cujus inventionem, ut satis facilem, brevitatis gratia missam facio.



PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXIX.

Data lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato, data cum velocitate, secundum datam rectam egressi.

Stantibus quæ in tribus propositionibus præcedentibus: exeat



corpus de loco *I* secundum lineolam *IK*, ea cum velocitate quam corpus

corpus aliud, vi aliqua uniformi centripeta, de loco *P* cadendo acquirere posset in *D*: sitque hæc vis uniformis ad vim, qua corpus primum urgetur in *I*, ut *DR* ad *DF*. Pergat autem corpus versus *k*; centroque *C* & intervallo *Ck* describatur circulus *ke* occurrens rectæ *PD* in *e*, & erigantur curvarum *BFg*, *abv*, *acw* ordinatim applicatæ *eg*, *ev*, *ew*. Ex dato rectangulo *PDRQ*, dataque lege vis centripetæ qua corpus primum agitatur, datur curva linea *BFg*, per constructionem problematis XXVII, & ejus corol. 1. Deinde ex dato angulo *CIK* datur proportio nascentium *IK*, *KN*, & inde, per constructionem prob. XXVIII. datur quantitas Q, una cum curvis lineis *abv*, *acw*: ideoque, completo tempore quovis *Dbve*, datur tum corporis altitudo *Ce* vel *Ck*, tum area *Dcwe*, eique æqualis sector *XCy*, angulusque *ICk*, & locus *k* in quo corpus tunc versabitur. *Q.E.I.*

Supponimus autem in his propositionibus vim centripetam in recessu quidem a centro variari secundum legem quamcunque, quam quis imaginari potest, in æqualibus autem a centro distantiis esse undique eandem. Atque hactenus motum corporum in orbibus immobilibus consideravimus. Superest ut de motu eorum in orbibus, qui circa centrum virium revolvuntur, adjiciamus pauca.

SECTIO IX.

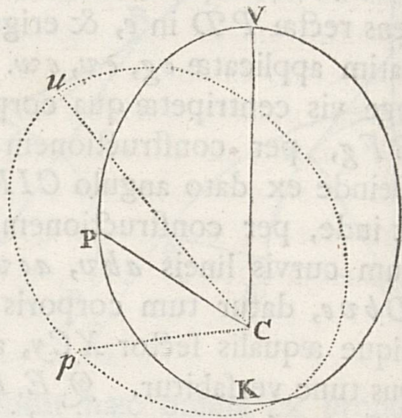
De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apsidum.

PROPOSITIO XLIII. PROBLEMA XXX.

Efficiendum est ut corpus in trajectoria quacunque circa centrum virium revolvente perinde moveri possit, atque corpus aliud in eadem trajectoria quiescente.

In orbe *VPK* positione dato revolvatur corpus *P* pergendo a *V* versus *K*. A centro *C* agatur semper *Cp*, quæ sit ipsi *CP* æqualis, angulumque *VCp* angulo *VCP* proportionalem constituat; & area, quam linea *Cp* describit, erit ad aream *VCP*, quam linea *CP* simul describit, ut velocitas lineæ describentis *Cp* ad velocitatem lineæ describentis *CP*; hoc est, ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*,

ideoque in data ratione, & propterea tempori proportionalis. Cum area tempori proportionalis ſit quam linea Cp in plano immobili deſcribit, manifeſtum eſt quod corpus, cogente juſtæ quantitatis vi centripeta, revolvi poſſit una cum puncto p in curva illa linea quam punctum idem p ratione jam expoſita deſcribit in plano immobili. Fiat angulus VCu angulo PCp, & linea Cu lineæ CV, atque figura uCp figuræ VCP æqualis, & corpus in p ſemper exiſtens movebitur in perimetro figuræ revolventis uCp, eodemque tempore deſcribet arcum ejus up quo corpus aliud P arcum ipſi ſimilem & æqualem VP in figura quieſcente VPK deſcribere poteſt. Quæratur igitur, per corollarium quintum propoſitionis VI, vis centripeta qua corpus revolvi poſſit in curva illa linea quam punctum p deſcribit in plano immobili, & ſolvetur problema. *Q. E. F.*



PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XIV.

Differentia virium, quibus corpus in orbe quieſcente, & corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri poſſunt, eſt in triplicata ratione communis altitudinis inverſe.

Partibus orbis quieſcentis VP, PK ſunto ſimiles & æquales orbis revolventis partes up, pk; & punctorum P, K diſtantia intelligatur eſſe quam minima. A puncto k in rectam pC demitte perpendiculum kr, idemque produc ad m, ut ſit mr ad kr ut angulus VCp ad angulum VCP. Quoniam corporum altitudines PC & pC, KC, & kC ſemper æquantur, manifeſtum eſt quod linearum PC & pC incrementa vel decrementa ſemper ſint æqualia, ideoque ſi corporum in locis P & p exiſtentium diſtinguantur motus ſinguli (per legum corol. 2.) in binos, quorum hi verſus centrum, ſive ſecundum lineas PC, pC determinentur, & alteri prioribus tranſverſi ſint, & ſecundum lineas ipſis PC, pC perpendiculares directionem habeant; motus verſus centrum erunt æquales, & motus tranſverſus

corporis

corporis *p* erit ad motum transversum corporis *P*, ut motus angularis lineæ *pC* ad motum angularem lineæ *PC*, id est, ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*. Igitur eodem tempore quo corpus *P* motu suo utroque pervenit ad punctum *K*, corpus *p* æquali in centrum motu æqualiter movebitur a *p* versus *C*, ideoque completo illo tempore reperietur alicubi in linea *mkr*, quæ per punctum *k* in lineam *pC* perpendicularis est; & motu transverso acquiret distantiam a linea *pC*, quæ sit ad distantiam quam corpus alterum *P* acquirit a linea *PC*, ut est motus transversus corporis *p* ad motum transversum corporis alterius *P*. Quare cum *kr* æqualis sit distantiæ quam corpus *P* acquirit a linea *PC*, sitque *mr* ad *kr* ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*, hoc est, ut motus transversus corporis *p* ad motum transversum corporis *P*, manifestum est quod corpus *p* completo illo tempore reperietur in loco *m*. Hæc ita se habebunt ubi corpora *p* & *P* æqualiter secundum lineas *pC* & *PC* moventur, ideoque æqualibus viribus secundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulus *pCn* ad angulum *pCk* ut est angulus *VCp* ad angulum *VCP*, sitque *nC* æqualis *kC*, & corpus *p* completo illo tempore revera re-

perietur in n; ideoque vi majore urgetur quam corpus P, si modo angulus nCp angulo kCp major est, id est si orbis upk vel movetur in consequentia, vel movetur in antecedentia majore celeritate quam sit dupla ejus qua linea CP in consequentia fertur; & vi minore si orbis tardius movetur in antecedentia. Estque virium differentia ut locorum intervallum mn, per quod corpus illud p ipsius actione, dato illo temporis spatio, transferri debet. Centro C intervallo Cn vel Ck describi intelligatur circulus secans lineas mr, mn productas in s & t, & erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, ideoque mn æquale $\frac{mk \times ms}{mt}$. Cum autem triangula pCk, pCn dato tempore dentur magnitudine, sunt kr & mr, earumque differentia mk & summa ms reciproce ut altitudo pC, ideoque rectangulum $mk \times ms$ est reciproce ut quadratum altitudinis pC. Est & mt directe ut $\frac{1}{2} mt$, id est, ut altitudo pC. Hæ sunt primæ rationes linearum nascentium; & hinc fit $\frac{mk \times ms}{mt}$, id est lineola nascens mn, eique proportionalis virium differentia reciproce ut cubus altitudinis pC. *Q. E. D.*

Corol.

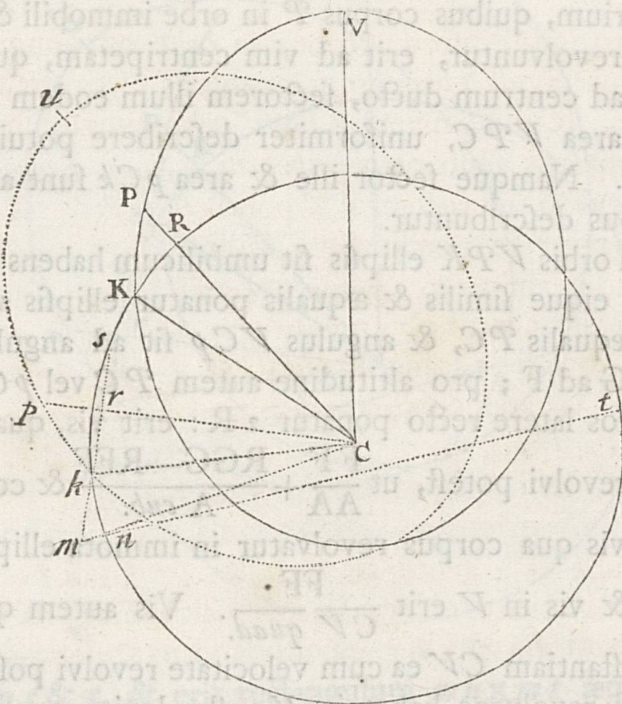
Corol. 1. Hinc differentia virium in locis *P* & *p*, vel *K* & *k*, est ad vim qua corpus motu circulari revolvi possit ab *R* ad *K* eodem tempore quo corpus *P* in orbe immobili describit arcum *PK*, ut lineola nascens *mn* ad sinum versum arcus nascentis *RK*, id est ut $\frac{mk \times ms}{mt}$ ad $\frac{rkq}{2kC}$, vel ut $mk \times ms$ ad rk quadratum; hoc est, si capiantur datæ quantitates F, G in ea ratione ad invicem quam habet angulus *VCP* ad angulum *VCp*, ut GG—FF ad FF. Et propterea, si centro *C* intervallo quovis *CP* vel *Cp* describatur sector circularis æqualis areæ toti *VPC*, quam corpus *P* tempore quovis in orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto descripsit: differentia virium, quibus corpus *P* in orbe immobili & corpus *p* in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam, qua corpus aliquod, radio ad centrum ducto, sectorem illum eodem tempore, quo descripta sit area *VPC*, uniformiter describere potuisset, ut GG—FF ad FF. Namque sector ille & area *pCk* sunt ad invicem ut tempora quibus describuntur.

Corol. 2. Si orbis *VPK* ellipsis sit umbilicum habens *C* & apsidem summam *V*; eique similis & æqualis ponatur ellipsis *upk*, ita ut sit semper *pC* æqualis *PC*, & angulus *VCp* sit ad angulum *VCP* in data ratione G ad F; pro altitudine autem *PC* vel *pC* scribatur A, & pro ellipseos latere recto ponatur 2 R: erit vis, qua corpus in ellipsi mobili revolvi potest, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG—RFF}{A\ cub.}$ & contra. Exponatur enim vis qua corpus revolvatur in immota ellipsi per quantitatem $\frac{FF}{AA}$, & vis in *V* erit $\frac{FF}{CV\ quad.}$. Vis autem qua corpus in circulo ad distantiam *CV* ea cum velocitate revolvi posset quam corpus in ellipsi revolvens habet in *V*, est ad vim qua corpus in ellipsi revolvens urgetur in apside *V*, ut dimidium lateris recti ellipseos ad circuli semidiametrum *CV*, ideoque valet $\frac{RFF}{CV\ cub.}$: & vis, quæ sit ad hanc ut GG—FF ad FF, valet $\frac{RGG—RFF}{CV\ cub.}$: estque hæc vis (per hujus corol. 1.) differentia virium in *V* quibus corpus *P* in ellipsi immota *VPK*, & corpus *p* in ellipsi mobili *upk* revolvuntur. Unde cum (per hanc prop.) differentia illa in alia quavis altitudine A sit

De Motu Corporum

ſit ad ſeipſam in altitudine *CV* ut $\frac{1}{A\ cub.}$ ad $\frac{1}{CV\ cub.}$, eadem differentia in omni altitudine A valebit $\frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$. Igitur ad vim $\frac{FF}{AA}$, qua corpus revolvi poteſt in ellipſi immobili *VPK*, addatur exceſſus $\frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$; & componetur vis tota $\frac{FF}{AA}+\frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$ qua corpus in ellipſi mobili *upk* iiſdem temporibus revolvi poſſit.

Corol. 3. Ad eundem modum colligetur quod, ſi orbis immobilis



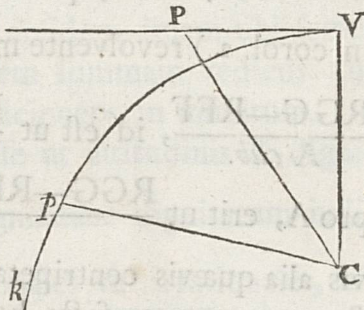
VPK ellipſis ſit centrum habens in virium centro *C*; eique ſimilis, æqualis & concentrica ponatur ellipſis mobilis *upk*; ſitque 2 R ellipſeos hujus latus rectum principale, & 2 T latus tranſverſum ſive axis major, atque angulus *VCp* ſemper ſit ad angulum *VCP* ut G ad F; vires, quibus corpora in ellipſi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi poſſunt, erunt ut $\frac{FFA}{T\,cub.}$ & $\frac{FFA}{T\,cub.}+\frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$ reſpectivè.

Corol.

Corol. 4. Et universaliter, si corporis altitudo maxima *CV* nominetur T, & radius curvaturæ quam orbis *VPK* habet in *V*, id est radius circuli æqualiter curvi, nominetur R, & vis centripeta, qua corpus in trajectoria quacunque immobili *VPK* revolvi potest in loco *V*, dicatur $\frac{VFF}{TT}$, atque aliis in locis *P* indefinite dicatur X, altitudine *CP* nominata A, & capiatur G ad F in data ratione anguli *VCp* ad angulum *VCP*: erit vis centripeta, qua corpus idem eosdem motus in eadem trajectoria *upk* circulariter mota temporibus iisdem peragere potest, ut summa virium $X + \frac{VRGG - VRFF}{A\ cub.}$

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in orbe quocunque immobili, augeri vel minui potest ejus motus angularis circa centrum virium in ratione data, & inde inveniri novi orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

Corol. 6. Igitur si ad rectam *CV* positione datam erigatur perpendiculum *VP* longitudinis indeterminatæ, jungaturque *CP*, & ipsi æqualis agatur *Cp*, constituens angulum *VCp*, qui sit ad angulum *VCP* in data ratione; vis qua corpus gyrari potest in curva illa *Vpk* quam punctum *p* perpetuo tangit, erit reciproce ut cubus altitudinis *Cp*. Nam corpus *P* per vim inertiæ, nulla alia vi urgente, uniformiter progredi potest in recta *VP*. Addatur vis in centrum *C*, cubo altitudinis *CP* vel *Cp* reciproce proportionalis, & (per jam demonstrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam *Vpk*. Est autem hæc curva *Vpk* eadem cum curva illa *VPQ* in corol. 3. prop. XLI. inventa, in qua ibi diximus corpora hujusmodi viribus attracta oblique ascendere.



PROPO-

PROPOSITIO XLV. PROBLEMA XXXI.

Orbium qui sunt circulis maxime finitimi requiruntur motus apsidum.

Problema solvitur arithmetice faciendo ut orbis, quem corpus in ellipsi mobili (ut in propositionis superioris corol. 2. vel 3.) revolvolvens describit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus apsides requiruntur, & quærendo apsides orbis quem corpus illud in plano immobili describit. Orbes autem eandem acquirent formam, si vires centripetæ quibus describuntur, inter se collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum *V* apsis summa, & scribantur T pro altitudine maxima *CV*, A pro altitudine quavis alia *CP* vel *Cp*, & X pro altitudinum differentia *CV*—*CP*; & vis, qua corpus in ellipsi circa umbilicum suum *C* (ut in corol. 2.) revolvente movetur, quæque in corol. 2. erat ut $\frac{FF}{AA}+\frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$, id est ut $\frac{FFA+RGG-RFF}{A\ cub.}$, substituendo T—X pro A, erit ut $\frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A\ cub.}$. Reducenda similiter est vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit A *cub.* & numeratores, facta homologorum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res exemplis patebit.

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam uniformem esse, ideoque ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$, sive (scribendo T—X pro A in numeratore) ut $\frac{T\ cub.-3TTX+3TXX-X\ cub.}{A\ cub.}$; & collatis numeratorum terminis correspondentibus, nimirum datis cum datis & non datis cum non datis, fiet RGG—RFF+TFF ad T *cub.* ut —FFX ad —3TTX+3TXX —X *cub.* sive ut —FF ad —3TT+3TX—XX. Jam cum orbis ponatur circulo quam maxime finitimus, coeat orbis cum circulo; & ob factas R, T æquales, atque X in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad T *cub.* ut —FF ad—3TT, seu GG ad TT ut FF ad 3TT, & vicissim GG ad FF ut TT ad 3TT, id est,

ut

ut 1 ad 3; ideoque G ad F, hoc est angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cum corpus in ellipsi immobili, ab apside summa ad apsidem imam descendendo conficiat angulum *VCP* (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in ellipsi mobili, atque ideo in orbe immobili de quo agimus, ab apside summa ad apsidem imam descendendo conficiet angulum *VCp* graduum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id ideo ob similitudinem orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripeta describit, & orbis illius quem corpus in ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur hi orbes, non universaliter sed tunc cum ad formam circularem quam maxime appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripeta in orbe propemodum circulari revolvens, inter apsidem summam & apsidem imam conficiet semper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, seu 103 *gr.* 55 *m.* 23 *sec.* ad centrum; perveniens ab apside summa ad apsidem imam ubi semel confecit hunc angulum, & inde ad apsidem summam rediens ubi iterum confecit eundem angulum; & sic deinceps in infinitum.

Liber Primus.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3} seu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ & n significant dignitatum indices quoscunque integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n seu $\overline{T-X}|^n$ in seriem indeterminatam per methodum nostram serierum convergentium reducta, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XXT^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis numeratoris alterius $RGG - RFF + TFF - FFX$, fit $RGG - RFF + TFF$ ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XT^{n-2}$ &c. Et sumendo rationes ultimas ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit RGG ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1}$, seu GG ad T^{n-1} ut FF ad nT^{n-1}, & vicissim GG ad FF ut T^{n-1} ad nT^{n-1} id est ut 1 ad n; ideoque G ad F, id est angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ut 1 ad $\sqrt{n}$. Quare cum angulus *VCP*, in descensu corporis ab apside summa ad apsidem imam in ellipsi confectus sit graduum 180; conficietur angulus *VCp*, in descensu corporis ab

De Motu Corporum

apside summa ad apsidem imam, in orbe propemodum circulari quem corpus quodvis vi centripeta dignitati A^{n-3} proportionali describit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; & hoc angulo repetito corpus redibit ab apside ima ad apsidem summam, & sic deinceps in infinitum. Ut si vis centripeta sit ut distantia corporis a centro, id est, ut A seu $\frac{A^4}{A^3}$, erit n æqualis 4 & $\sqrt{n}$ æqualis 2; ideoque angulus inter apsidem summam & apsidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ *gr.* seu 90 *gr.* Completa igitur quarta parte revolutionis unius corpus perveniet ad apsidem imam, & completa alia quarta parte ad apsidem summam, & sic deinceps per vices in infinitum. Id quod etiam ex propositione x. manifestum est. Nam corpus urgente hac vi centripeta revolvetur in ellipsi immobili, cujus centrum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit reciproce ut distantia, id est directe ut $\frac{1}{A}$ seu $\frac{A^2}{A^3}$, erit n æqualis 2, ideoque inter apsidem summam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ seu 127 *gr.* 16 *m.* 45 *sec.* & propterea corpus tali vi revolvens, perpetua anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab apside summa ad imam & ab ima ad summam perveniet in æternum. Porro si vis centripeta sit reciproce ut latus quadrato-quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id est reciproce ut $A^{\frac{11}{4}}$, ideoque directe ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ seu ut $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ erit n æqualis $\frac{1}{4}$, & $\frac{180}{\sqrt{n}}$ *gr.* æqualis 360 *gr.* & propterea corpus de apside summa discedens & subinde perpetuo descendens, perveniet ad apsidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo ascensu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad apsidem summam: & sic per vices in æternum.

Exempl. 3. Assumentes m & n pro quibusvis indicibus dignitatum altitudinis, & b, c pro numeris quibusvis datis, ponamus vim centripetam esse ut $\frac{bA^m + cA^n}{A\ cub.}$, id est, ut $\frac{b \text{ in } \overline{T-X}|^m + c \text{ in } \overline{T-X}|^n}{A\ cub.}$

sue

ſeu (per eandem methodum noſtram ſerierum convergentium) ut

$$\frac{bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2} \text{ \&c.}}{A\ cub.}$$

& collatis numeratorum terminis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad $bT^m + cT^n$, ut $-FF$ ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXT^{n-2}$ &c. Et ſumendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit GG ad $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, & viciſſim GG ad FF ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam *CV* ſeu T arithmetice per unitatem, fit GG ad FF ut $b+c$ ad $mb+nc$, ideoque ut 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde eſt G ad F, id eſt angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cum angulus *VCP* inter apſidem ſummam & apſidem imam in ellipſi immobili ſit 180 *gr.* erit angulus *VCp* inter eaſdem apſides, in orbe quem corpus vi centripeta quantitati $\frac{bA^m + cA^n}{A\ cub.}$ proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et eodem argumento ſi vis centripeta ſit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A\ cub.}$, angulus inter apſides invenietur graduum $180\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Nec ſecus reſolvetur problema in caſibus difficilioribus. Quantitas, cui vis centripeta proportionalis eſt, reſolvi ſemper debet in ſeries convergentes denominatorem habentes A *cub.* Dein pars data numeratoris qui ex illa operatione provenit ad ipſius partem alteram non datam, & pars data numeratoris hujus $RGG - RFF + TFF - FFX$ ad ipſius partem alteram non datam in eadem ratione ponendæ ſunt: Et quantitates ſuperfluas delendo, ſcribendoque unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta ſit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri poteſt dignitas illa ex motu apſidum; & contra. Nimirum ſi motus totus angularis, quo corpus redit ad apſidem eandem, ſit

 ad

ad motum angularem revolutionis unius, seu graduum 360, ut numerus aliquis m ad numerum alium n, & altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm}-3}$, cujus index est $\frac{nn}{mm}-3$. Id quod per exempla secunda manifestum est. Unde liquet vim illam in majore quam triplicata altitudinis ratione, in recessu a centro, decrescere non posse: Corpus tali vi revolvens deque apside discedens, si cœperit descendere nunquam perveniet ad apsidem imam seu altitudinem minimam, sed descendet usque ad centrum, describens curvam illam lineam de qua egimus in corol. 3. prop. xli. Sin cœperit illud, de apside discedens, vel minimum ascendere; ascendet in infinitum, neque unquam perveniet ad apsidem summam. Describet enim curvam illam lineam de qua actum est in eodem corol. & in corol. vi. prop. xliv. Sic & ubi vis, in recessu a centro, decrescit in majore quam triplicata ratione altitudinis, corpus de apside discedens, perinde ut cœperit descendere vel ascendere, vel descendet ad centrum usque vel ascendet in infinitum. At si vis, in recessu a centro, vel decrescat in minore quam triplicata ratione altitudinis, vel crescat in altitudinis ratione quacunque; corpus nunquam descendet ad centrum usque, sed ad apsidem imam aliquando perveniet: & contra, si corpus de apside ad apsidem alternis vicibus descendens & ascendens nunquam appellat ad centrum; vis in recessu a centro aut augebitur, aut in minore quam triplicata altitudinis ratione decrescet: & quo citius corpus de apside ad apsidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illa triplicata. Ut si corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de apside summa ad apsidem summam alterno descensu & ascensu redierit; hoc est, si fuerit m ad n ut 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ ad 1, ideoque $\frac{nn}{mm}-3$ valeat $\frac{1}{64}-3$ vel $\frac{1}{16}-3$ vel $\frac{1}{4}-3$ vel $\frac{4}{9}-3$: erit vis ut $A^{\frac{1}{64}-3}$ vel $A^{\frac{1}{16}-3}$ vel $A^{\frac{1}{4}-3}$ vel $A^{\frac{4}{9}-3}$, id est, reciproce ut $A^{3-\frac{1}{64}}$ vel $A^{3-\frac{1}{16}}$ vel $A^{3-\frac{1}{4}}$ vel $A^{3-\frac{4}{9}}$. Si corpus singulis revolutionibus redierit ad apsidem eandem immotam; erit m ad n ut 1 ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis A^{-2} seu $\frac{1}{AA}$; & propterea decrementum virium in ratione duplicata altitudinis, ut in præcedentibus demonstratum est. Si corpus partibus revolutionis unius vel

vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel una tertia, vel una quarta, ad apsidem eandem redierit; erit m ad n ut $\frac{3}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis $A^{\frac{16}{9}-3}$ vel $A^{\frac{9}{4}-3}$ vel A^{9-3} vel A^{16-3}; & propterea vis aut reciproce ut $A^{\frac{11}{9}}$ vel $A^{\frac{3}{4}}$, aut directe ut A^{6} vel A^{13}. Denique si corpus pergendo ab apside summa ad apsidem summam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, ideoque apsis illa singulis corporis revolutionibus confecerit in consequentia gradus tres; erit m ad n ut 363 *gr.* ad 360 *gr.* sive ut 121 ad 120, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ erit æquale $A^{-\frac{29523}{14641}}$; & propterea vis centripeta reciproce ut $A^{\frac{29523}{14641}}$ seu reciproce ut $A^{2\frac{4}{243}}$ proxime. Decrescit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicata, sed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam si corpus, vi centripeta quæ sit reciproce ut quadratum altitudinis, revolvatur in ellipsi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per exempla tertia) motus apsidum qui ex vi illa extranea orietur: & contra. Ut si vis qua corpus revolvitur in ellipsi sit ut $\frac{1}{AA}$, & vis extranea ablata ut cA, ideoque vis reliqua ut $\frac{A-cA^{4}}{A\ cub.}$; erit (in exemplis tertiis) b æqualis 1, m æqualis 1, & n æqualis 4, ideoque angulus revolutionis inter apsides æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Ponamus vim illam extraneam esse 357.45 partibus minorem quam vis altera qua corpus revolvitur in ellipsi, id est c esse $\frac{100}{35745}$, existente A vel T æquali 1, & $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180\sqrt{\frac{35645}{35345}}$, seu 180.7623, id est, 180 *gr.* 45 *m.* 44 *s.* Igitur corpus de apside summa discedens, motu angulari 180 *gr.* 45 *m.* 44 *s.* perveniet ad apsidem imam, & hoc motu duplicato ad apsidem summam redibit: ideoque apsis summa singulis revolutionibus progrediendo conficiet 1 *gr.* 31 *m.* 28 *sec.* Apsis lunæ est duplo velocior circiter.

Hactenus de motu corporum in orbibus quorum plana per centrum virium transeunt. Superest ut motus etiam determinemus in

planis

De Motu Corporum

planis excentricis. Nam ſcriptores qui motum gravium tractant, conſiderare ſolent aſcenſus & deſcenſus ponderum, tam obliquos in planis quibuſcunque datis, quam perpendiculares: & pari jure motus corporum viribus quibuſcunque centra petentium, & planis excentricis innitentium hic conſiderandus venit. Plana autem ſupponimus eſſe politiſſima & abſolute lubrica ne corpora retardent. Quinimo, in his demonſtrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quæque tangunt incumbendo, uſurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & orbitas movendo deſcribunt. Et eadem lege motus corporum in ſuperficiebus curvis peractos ſubinde determinamus.

SECTIO X.

De motu corporum in ſuperficiebus datis, deque funipendulorum motu reciproco.

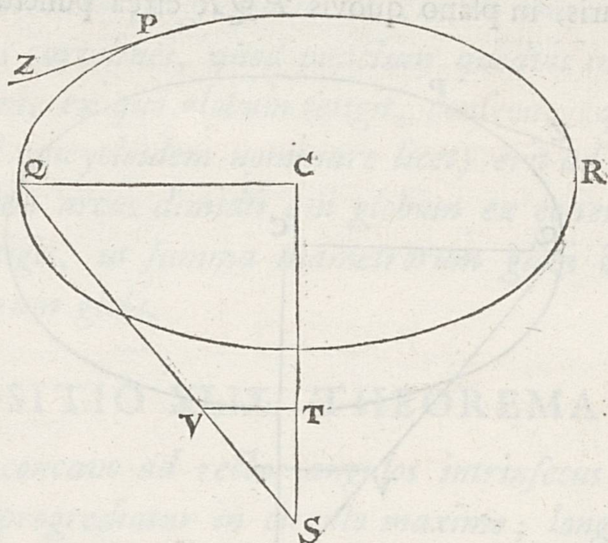
PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA XXXII.

Poſita cujuſcunque generis vi centripeta, datoque tum virium centro tum plano quocunque in quo corpus revolvitur, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato, data cum velocitate, ſecundum rectam in plano illo datam egreſſi.

Sit S centrum virium, SC diſtantia minima centri hujus a plano dato, P corpus de loco P ſecundum rectam PZ egrediens, Q corpus idem in trajectoria ſua revolvens, & PQR trajectoria illa, in plano dato deſcripta, quam invenire oportet. Jungantur CQ, QS, & ſi in QS capiatur SV proportionalis vi centripetæ qua corpus trahitur verſus centrum S, & agatur VT quæ ſit parallela CQ & occurrat SC in T: Vis SV reſolvetur (per legum corol 2.) in vires ST, TV; quarum ST trahendo corpus ſecundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera TV, agendo ſecundum poſitionem plani, trahit corpus directe verſus

punctum

punctum *C* in plano datum, ideoque efficit, ut corpus illud in hoc plano perinde moveatur, ac si vis *ST* tolleretur, & corpus vi sola *TV* revolveretur circa centrum *C* in spatio libero. Data autem vi centripeta *TV* qua corpus *Q* in spatio libero circa centrum datum



C revolvitur, datur (per prop. xlii.) tum trajectoria *PQR*, quam corpus describit, tum locus *Q*, in quo corpus ad datum quodvis tempus versabitur, tum denique velocitas corporis in loco illo *Q*; & contra. *Q. E. I.*

PROPOSITIO XLVII. THEOREMA. XV.

Posito quod vis centripeta proportionalis sit distantiæ corporis a centro; corpora omnia in planis quibuscunque revolventia describent ellipses, & revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultro citroque discurrendo, singulas eundi & redeundi periodos iisdem temporibus absolvent.

Nam, stantibus quæ in superiore propositione, vis *SV*, qua corpus *Q* in plano quovis *PQR* revolvens trahitur versus centrum *S*, est ut distantia *SQ*; atque ideo ob proportionales *SV* & *SQ*, *TV* & *CQ*, vis *TV*, qua corpus trahitur versus punctum *C* in orbis plano datum,

datum, est ut distantia *CQ*. Vires igitur, quibus corpora in plano *PQR* versantia trahuntur versus punctum *C*, sunt pro ratione distantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaque trahuntur versus centrum *S*; & propterea corpora movebuntur iisdem temporibus, in iisdem figuris, in plano quovis *PQR* circa punctum *C*, atque in spatiis liberis circa centrum *S*; ideoque (per corol. 2. prop. x. & corol. 2. prop. xxxviii.) temporibus semper æqualibus, vel describent ellipses in plano illo circa centrum *C*, vel periodos movendi ultro citroque in lineis rectis per centrum *C* in plano illo ductis, complebunt. *Q. E. D.*

Scholium.

His affines sunt ascensus ac descensus corporum in superficiebus curvis. Concipe lineas curvas in plano describi, dein circum axes quosvis datos per centrum virium transeuntes revolvi, & ea revolutione superficies curvas describere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his superficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa oblique ascendendo & descendend ocurrant ultro citroque; peragentur eorum motus in planis per axem transeuntibus, atque ideo in lineis curvis, quarum revolutione curvæ illæ superficies genitæ sunt. Istis igitur in casibus sufficit motum in his lineis curvis considerare.

PROPO-

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XVI.

Si rota globo extrinsecus ad angulos rectos insistat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, (quodque cycloidem vel epicycloidem nominare licet) erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum ex eo tempore inter eundum tetigit, ut summa diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.

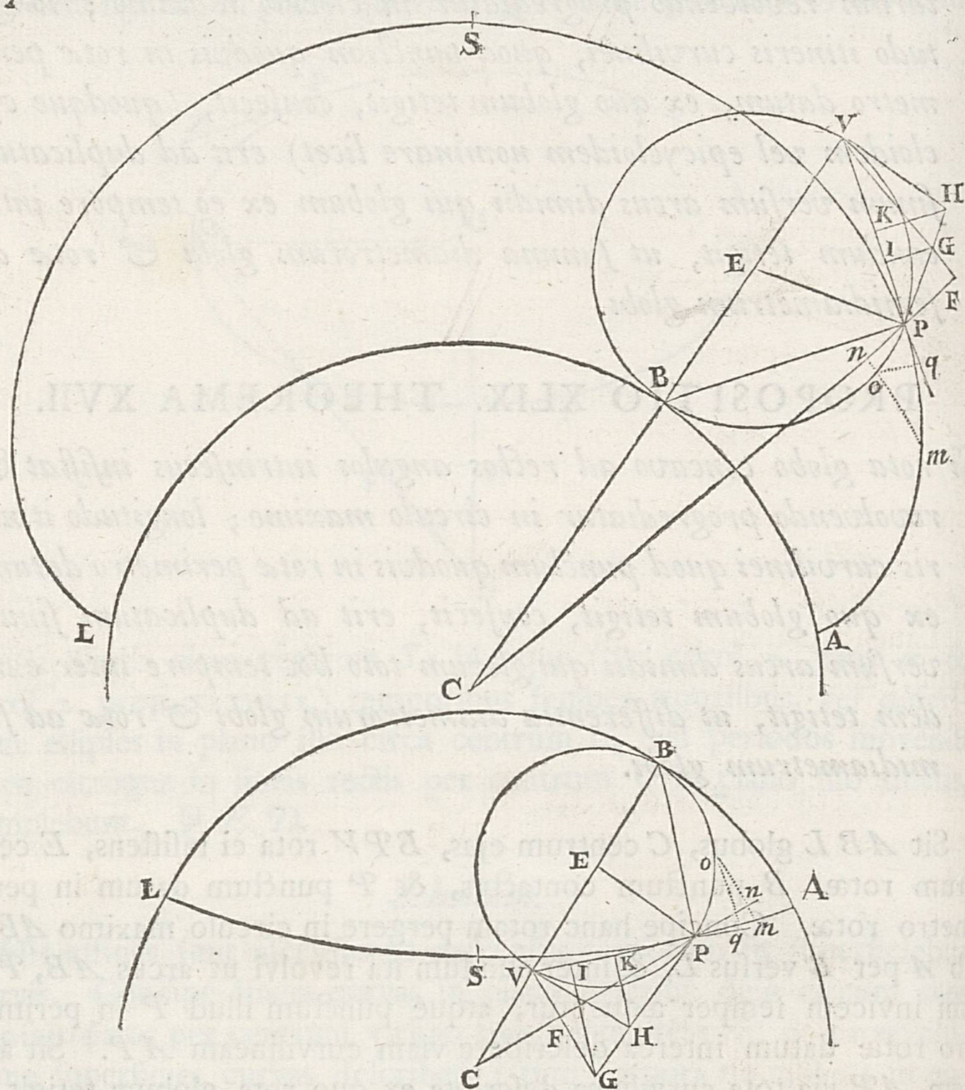
PROPOSITIO XLIX. THEOREMA XVII.

Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinsecus insistat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum toto hoc tempore inter eundem tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.

Sit ABL globus, C centrum ejus, BPV rota ei insistens, E centrum rotæ, B punctum contactus, & P punctum datum in perimetro rotæ. Concipe hanc rotam pergere in circulo maximo ABL ab A per B versus L, & inter eundum ita revolvi ut arcus AB, PB sibi invicem semper æquentur, atque punctum illud P in perimetro rotæ datum interea describere viam curvilineam AP. Sit autem AP via tota curvilinea descripta ex quo rota globum tetigit in A, & erit viæ hujus longitudo AP ad duplum sinum versum arcus $\frac{1}{2}PB$, ut $2\,CE$ ad CB. Nam recta CE (si opus est producta) occurrat rotæ in V, junganturque CP, BP, EP, VP, & in CP productam demittatur normalis VF. Tangant PH, VH circulum in P & V concurrentes in H, secetque PH ipsam VF in G, &

De Motu Corporum

ad *VP* demittantur normales *GI*, *HK*. Centro item *C* & intervallo quovis deſcribatur circulus *nom* ſecans rectam *CP* in *n*, rotæ perimetrum *BP* in *o*, & viam curvilineam *AP* in *m*; centroque *V* & intervallo *Vo* deſcribatur circulus ſecans *VP* productam in *q*.



Quoniam rota eundo ſemper revolvitur circa punctum contactus *B*, manifeſtum eſt quod recta *BP* perpendicularis eſt ad lineam illam curvam *AP* quam rotæ punctum *P* deſcribit, atque ideo quod recta *VP* tanget hanc curvam in puncto *P*. Circuli *nom* radius ſenſim auctus vel diminutus æquetur tandem diſtantiæ *CP*; &, ob

ob similitudinem figuræ evanescentis *Pnomq* & figuræ *PFGVI*, ratio ultima lineolarum evanescentium *Pm*, *Pn*, *Po*, *Pq*, id est, ratio mutationum momentanearum curvæ *AP*, rectæ *CP*, arcus circularis *BP*, ac rectæ *VP*, eadem erit quæ linearum *PV*, *PF*, *PG*, *PI* respective. Cum autem *VF* ad *CF* & *VH* ad *CV* perpendiculares sint, angulique *HVG*, *VCF* propterea æquales; & angulus *VHG* (ob angulos quadrilateri *HVEP* ad *V* & *P* rectos) angulo *CEP* æqualis est, similia erunt triangula *VHG*, *CEP*; & inde fiet ut *EP* ad *CE* ita *HG* ad *HV* seu *HP* & ita *KI* ad *KP*, & composite vel divisim ut *CB* ad *CE* ita *PI* ad *PK*, & duplicatis consequentibus ut *CB* ad 2 *CE* ita *PI* ad *PV*, atque ita *Pq* ad *Pm*. Est igitur decrementum lineæ *VP*, id est, incrementum lineæ *BV*—*VP* ad incrementum lineæ curvæ *AP* in data ratione *CB* ad 2 *CE*, & propterea (per corol. lem. IV.) longitudines *BV*—*VP* & *AP*, incrementis illis genitæ, sunt in eadem ratione. Sed, existente *BV* radio, est *VP* co-sinus anguli *BVP* seu $\frac{1}{2}$ *BEP*, ideoque *BV*—*VP* sinus versus est ejusdem anguli; & propterea in hac rota, cujus radius est $\frac{1}{2}$ *BV*, erit *BV*—*VP* duplus sinus versus arcus $\frac{1}{2}$ *BP*. Ergo *AP* est ad duplum sinum versum arcus $\frac{1}{2}$ *BP* ut 2 *CE* ad *CB*. *Q. E. D.*

Lineam autem *AP* in propositione priore cycloidem extra globum, alteram in posteriore cycloidem intra globum distinctionis gratia nominabimus.

Corol. 1. Hinc si describatur cyclois integra *ASL* & bisecetur ea in *S*, erit longitudo partis *PS* ad longitudinem *VP* (quæ duplus est sinus anguli *VBP*, existente *EB* radio) ut 2 *CE* ad *CB*, atque ideo in ratione data.

Corol. 2. Et longitudo semiperimetri cycloidis *AS* æquabitur lineæ rectæ, quæ est ad rotæ diametrum *BV* ut 2 *CE* ad *CB*.

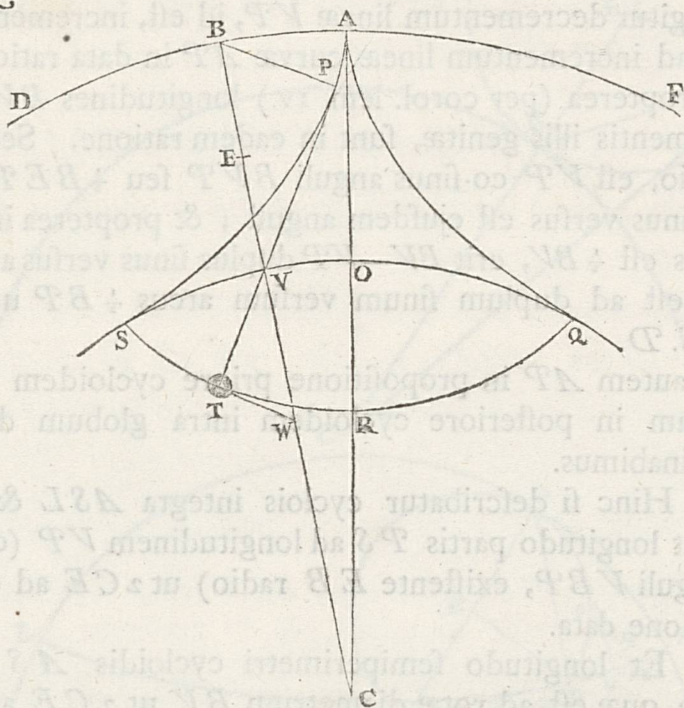
PROPOSITIO L. PROBLEMA XXXIII.

Facere ut corpus pendulum oscilletur in cycloide data.

Intra globum *QVS*, centro *C* descriptum, detur cyclois *QRS* bisecta in *R* & punctis suis extremis *Q* & *S* superficiei globi hinc inde occurrens. Agatur *CR* bisecans arcum *QS* in *O*, & producatur ea ad *A*, ut sit *CA* ad *CO* ut *CO* ad *CR*. Centro *C* intervallo

De Motu Corporum

vallo *CA* deſcribatur globus exterior *DAF*, & intra hunc globum a rota, cujus diameter ſit *AO*, deſcribantur duæ ſemicycloides *AQ*, *AS*, quæ globum interiorem tangant in *Q* & *S* & globo exteriori occurrant in *A*. A puncto illo *A*, filo *APT* longitudinem *AR* æquante, pendeat corpus *T*, & ita intra ſemicycloides *AQ*, *AS* oſcilletur, ut quoties pendulum digreditur a perpendiculo *AR*, filum parte ſui ſuperiore *AP* applicetur ad ſemicycloidem illam *APS* verſus quam peragitur motus, & circum eam ceu obſtaculum flectatur, parteque reliqua *PT* cui ſemicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus *T* oſcillabitur in cycloide data *QRS*. *Q.E.F.*



Occurrat enim filum *PT* tum cycloidi *QRS* in *T*, tum circulo *QOS* in *V*, agaturque *CV*; & ad fili partem rectam *PT*, e punctis extremis *P* ac *T*, erigantur perpendicula *BP*, *TW*, occurrentia rectæ *CV* in *B* & *W*. Patet, ex conſtructione & geneſi ſimilium figurarum *AS*, *SR*, perpendicula illa *PB*, *TW* abſcindere de *CV* longitudines *VB*, *VW* rotarum diametris *OA*, *OR* æquales. Eſt igitur *TP* ad *VP* (duplum ſinum anguli *VBP* exiſtente $\frac{1}{2}$ *BV* radio) ut *BW* ad *BV*, ſeu *AO*+*OR* ad *AO*, id eſt (cum ſint *CA*

ad

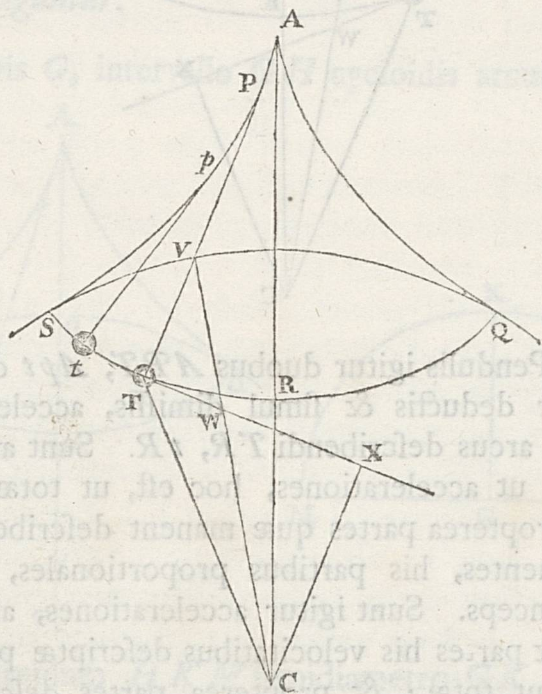
ad *CO*, *CO* ad *CR* & divisim *AO* ad *OR* proportionales) ut $CA+CO$ ad *CA*, vel, si bisecetur *BV* in *E*, ut 2 *CE* ad *CB*. Proinde (per corol 1. prop. XLIX.) longitudo partis rectæ fili *PT* æquatur semper cycloidis arcui *PS*, & filum totum *APT* æquatur semper cycloidis arcui dimidio *APS*, hoc est (per corol. 2. prop. XLIX.) longitudini *AR*. Et propterea vicissim si filum manet semper æquale longitudini *AR* movebitur punctum *T* in cycloide data *QRS*. *Q. E. D.*

Corol. Filum *AR* æquatur semicycloidi *AS*, ideoque ad globi exterioris semidiametrum *AC* eandem habet rationem quam similis illi semicyclois *SR* habet ad globi interioris semidiametrum *CO*.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XVIII.

Si vis centripeta tendens undique ad globi centrum C *sit in locis singulis ut distantia loci cujusque a centro, & hac sola vi agente corpus* T *oscilletur (modo jam descripto) in perimetro cycloidis* QRS: *dico quod oscillationum utcunque inæqualium æqualia erunt tempora.*

Nam in cycloidis tangentem *TW* infinite productam cadat per-



pendiculum *CX* & jungatur *CT*. Quoniam vis centripeta qua corpus

pus *T* impellitur versus *C* est ut distantia *CT*, atque hæc (per legum corol. 2.) resolvitur in partes *CX*, *TX*, quarum *CX* impellendo corpus directe a *P* distendit filum *PT* & per ejus resistentiam tota cessat, nullum alium edens effectum; pars autem altera *TX*, urgendo corpus transversim seu versus *X*, directe accelerat motum ejus in cycloide; manifestum est quod corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionalis, sit singulis momentis ut longitudo *TX*, id est, ob datas *CV*, *WV* iisque proportionales *TX*, *TW*, ut longitudo *TW*, hoc est (per corol. 1. prop. XLIX.) ut longitudo arcus cycloidis *TR*. Pendulis igitur duobus *APT*, *Apt* de perpendiculo *AR* inæqualiter deductis & simul dimissis, accelerationes eorum semper erunt ut arcus describendi *TR*, *tR*. Sunt autem partes sub initio descriptæ ut accelerationes, hoc est, ut totæ sub initio describendæ, & propterea partes quæ manent describendæ & accelerationes subsequentes, his partibus proportionales, sunt etiam ut totæ; & sic deinceps. Sunt igitur accelerationes, atque ideo velocitates genitæ & partes his velocitatibus descriptæ partesque describendæ, semper ut totæ; & propterea partes describendæ datam servantes

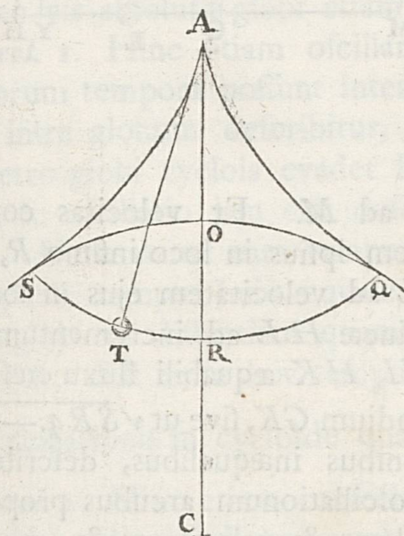
servantes rationem ad invicem simul evanescent, id est, corpora duo oscillantia simul pervenient ad perpendiculum *AR*. Cumque vicissim ascensus perpendiculorum de loco infimo *R*, per eosdem arcus cycloidales motu retrogrado facti, retardentur in locis singulis a viribus iisdem a quibus descensus accelerabantur, patet velocitates ascensuum ac descensuum per eosdem arcus factorum æquales esse, atque ideo temporibus æqualibus fieri; & propterea, cum cycloidis partes duæ *RS* & *RQ* ad utrumque perpendiculi latus jacentes sint similes & æquales, pendula duo oscillationes suas tam totas quam dimidias iisdem temporibus semper peragent. *Q. E. D.*

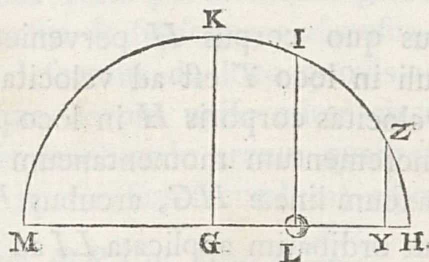
Corol. Vis qua corpus *T* in loco quovis *T* acceleratur vel retardatur in cycloide, est ad totum corporis ejusdem pondus in loco altissimo *S* vel *Q*, ut cycloidis arcus *TR* ad ejusdem arcum *SR* vel *QR*.

PROPOSITIO LII. PROBLEMA XXXIV.

Definire & velocitates pendulorum in locis singulis, & tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur.

Centro quovis *G*, intervallo *GH* cycloidis arcum *RS* æquante,

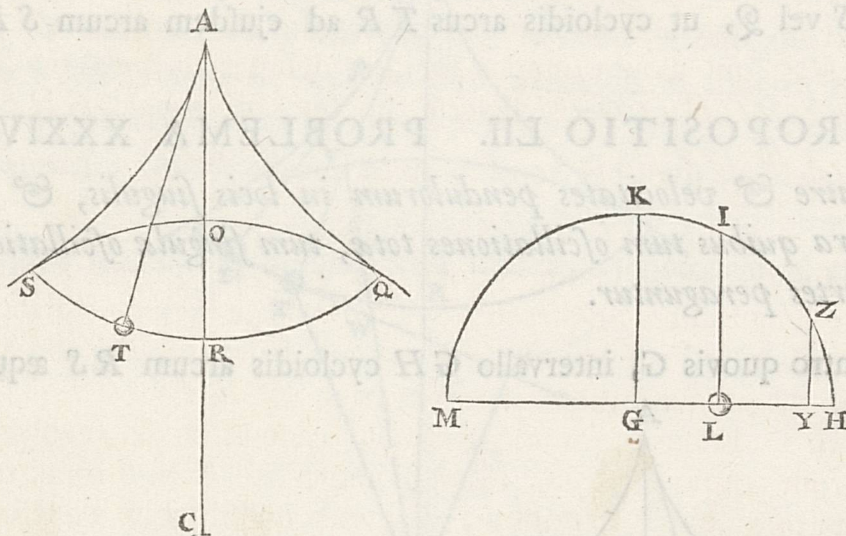




describe semicirculum *HKM* semidiametro *GK* bisectum. Et si vis centripeta, distantiis locorum a centro proportionalis, tendat ad centrum

De Motu Corporum

centrum *G*, ſitque ea in perimetro *HIK* æqualis vi centripetæ in perimetro globi *QOS* ad ipſius centrum tendenti; & eodem tempore quo pendulum *T* dimittitur e loco ſupremo *S*, cadat corpus aliquod *L* ab *H* ad *G*: quoniam vires quibus corpora urgentur ſunt æquales ſub initio & ſpatiis deſcribendis *TR*, *LG* ſemper proportionales, atque ideo, ſi æquantur *TR* & *LG*, æquales in locis *T* & *L*; patet corpora illa deſcribere ſpatia *ST*, *HL* æqualia ſub initio, ideoque ſubinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia ſpatia deſcribere. Quare (per prop. XXXVIII.) tempus quo corpus deſcribit arcum *ST* eſt ad tempus oſcillationis unius, ut arcus *HI*, tempus quo corpus *H* perveniet ad *L*, ad ſemiperipheriam *HKM*,



tempus quo corpus *H* perveniet ad *M*. Et velocitas corporis penduli in loco *T* eſt ad velocitatem ipſius in loco infimo *R*, (hoc eſt, velocitas corporis *H* in loco *L* ad velocitatem ejus in loco *G*, ſeu incrementum momentaneum lineæ *HL* ad incrementum momentaneum lineæ *HG*, arcubus *HI*, *HK* æquabili fluxu creſcentibus) ut ordinatim applicata *LI* ad radium *GK*, ſive ut $\sqrt{\overline{SRq.}-\overline{TRq.}}$ ad *SR*. Unde cum, in oſcillationibus inæqualibus, deſcribantur æqualibus temporibus arcus totis oſcillationum arcubus proportionales; habentur, ex datis temporibus, & velocitates & arcus deſcripti in oſcillationibus univerſis. Quæ erant primo invenienda.

Oſcil-

Oscillentur jam funipendula corpora in cycloidibus diversis intra globos diversos, quorum diversæ sunt etiam vires absolutæ, descriptis: &, si vis absoluta globi cujusvis *QOS* dicatur V, vis acceleratrix qua pendulum urgetur in circumferentia hujus globi, ubi incipit directe versus centrum ejus moveri, erit ut distantia corporis penduli a centro illo & vis absoluta globi conjunctim, hoc est, ut $CO \times V$. Itaque lineola *HY*, quæ sit ut hæc vis acceleratrix $CO \times V$, describetur dato tempore; &, si erigatur normalis *YZ* circumferentiæ occurrens in *Z*, arcus nascens *HZ* denotabit datum illud tempus. Est autem arcus hic nascens *HZ* in subduplicata ratione rectanguli *GHY*, ideoque ut $\sqrt{GH \times CO \times V}$. Unde tempus oscillationis integræ in cycloide *QRS* (cum sit ut semiperipheria *HKM*, quæ oscillationem illam integram denotat, directe; utque arcus *HZ*, qui datum tempus similiter denotat, inverse) fiet ut *GH* directe & $\sqrt{GH \times CO \times V}$ inverse, hoc est, ob æquales *GH* & *SR*, ut $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$, sive (per corol. prop. L.) ut $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Itaque oscillationes in globis & cycloidibus omnibus, quibuscunque cum viribus absolutis factæ, sunt in ratione quæ componitur ex subduplicata ratione longitudinis fili directe, & subduplicata ratione distantiæ inter punctum suspensionis & centrum globi inverse, & subduplicata ratione vis absolutæ globi etiam inverse. *Q. E. I.* Liber Primus.

Corol. 1. Hinc etiam oscillantium, cadentium & revolventium corporum tempora possunt inter se conferri. Nam si rotæ, qua cyclois intra globum describitur, diameter constituatur æqualis semidiametro globi cyclois evadet linea recta per centrum globi transiens, & oscillatio jam erit descensus & subsequens ascensus in hac recta. Unde datur tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad distantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem describit. Est enim hoc tempus (per casum secundum) ad tempus semioscillationis in cycloide quavis *QRS* ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Corol. 2. Hinc etiam consectantur quæ *Wrennus* & *Hugenius* de cycloide vulgari adinvenerunt. Nam si globi diameter augeatur in infinitum: mutabitur ejus superficies sphærica in planum, visque centripeta aget uniformiter secundum lineas huic plano perpendiculares,

culares, & cyclois nostra abibit in cycloidem vulgi. Isto autem in casu longitudo arcus cycloidis, inter planum illud & punctum describens, æqualis evadet quadruplicato sinui verso dimidii arcus rotæ inter idem planum & punctum describens; ut invenit *Wrennus*: Et pendulum inter duas ejusmodi cycloides in simili & æquali cycloide temporibus æqualibus oscillabitur, ut demonstravit *Hugenius*. Sed & descensus gravium, tempore oscillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

Aptantur autem propositiones a nobis demonstratæ ad veram constitutionem terræ, quatenus rotæ eundo in ejus circulis maximis describunt motu clavorum, perimetris suis infixorum, cycloides extra globum; & pendula inferius in fodinis & cavernis terræ suspensa, in cycloidibus intra globos oscillari debent, ut oscillationes omnes evadant isochronæ. Nam gravitas (ut in libro tertio docebitur) decrescit in progressu a superficie terræ, sursum quidem in duplicata ratione distantiarum a centro ejus, deorsum vero in ratione simplici.

PROPOSITIO LIII. PROBLEMA XXXV.

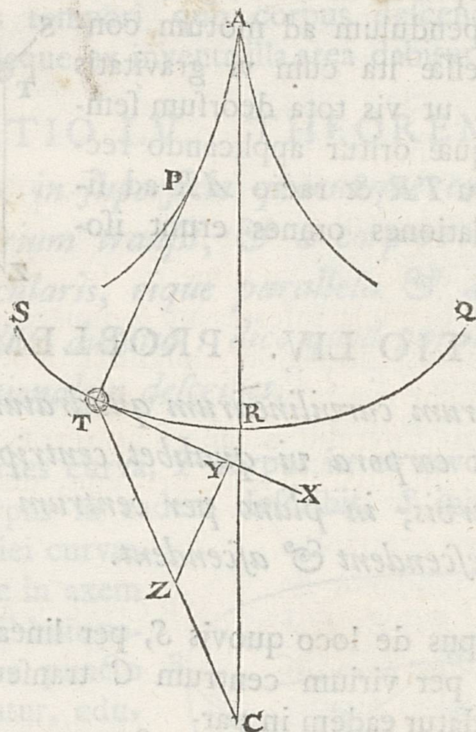
Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis oscillationes semper isochronas peragent.

Oscilletur corpus *T* in curva quavis linea *STRQ*, cujus axis sit *AR* transiens per virium centrum *C*. Agatur *TX* quæ curvam illam in corporis loco quovis *T* contingat, inque hac tangente *TX* capiatur *TY* æqualis arcui *TR*. Nam longitudo arcus illius ex figurarum quadraturis, per methodos vulgares, innotescit. De puncto *Y* educatur recta *YZ* tangenti perpendicularis. Agatur *CT* perpendiculari illi occurrens in *Z*, & erit vis centripeta proportionalis rectæ *TZ*. *Q. E. I.*

Nam si vis, qua corpus trahitur de *T* versus *C*, exponatur per rectam *TZ* captam ipsi proportionalem, resolvetur hæc in vires *TY*, *YZ*; quarum *YZ* trahendo corpus secundum longitudinem fili *PT*, motum ejus nil mutat, vis autem altera *TY* motum ejus in curva *STRQ* directe accelerat vel directe retardat. Proinde cum hæc

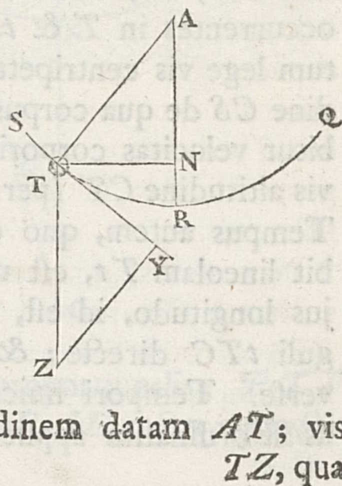
sit

ſit ut via deſcribenda TR, accelerationes corporis vel retardationes in oſcillationum duarum (majoris & minoris) partibus proportionalibus deſcribendis, erunt ſemper ut partes illæ, & propterea fa-

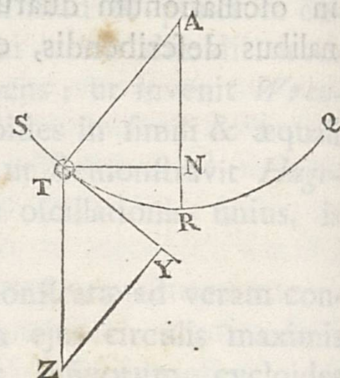


cient ut partes illæ ſimul deſcribantur. Corpora autem quæ partes totis ſemper proportionales ſimul deſcribunt, ſimul deſcribent totas. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpus T, filo rectilineo AT a centro A pendens, deſcribat arcum circularem $STRQ$, & interea urgeatur ſecundum lineas parallelas deorſum a vi aliqua, quæ ſit ad vim uniformem gravitatis, ut arcus TR ad ejus ſinum TN: æqualia erunt oſcillationum ſingularum tempora. Etenim ob parallelas TZ, AR, ſimilia erunt triangula ATN, ZTY; & propterea TZ erit ad AT ut TY ad TN; hoc eſt, ſi gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam AT; vis



TZ, qua oscillationes evadent isochronæ, erit ad vim gravitatis AT, ut arcus TR ipsi TY æqualis ad arcus illius sinum TN.

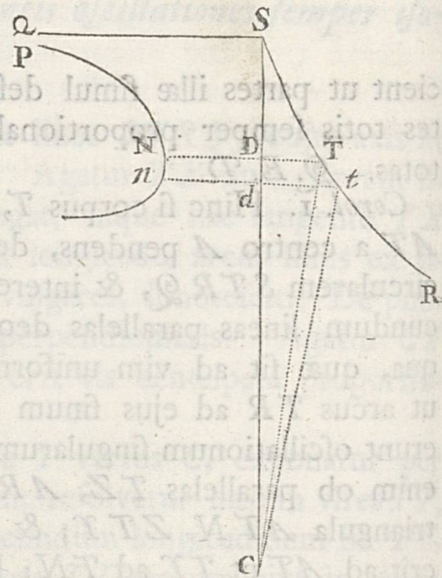


Corol. 2. Et propterea in horologiis, si vires a machina in pendulum ad motum conservandum impressæ ita cum vi gravitatis componi possint, ut vis tota deorsum semper sit ut linea quæ oritur applicando rectangulum sub arcu TR & radio AR ad sinum TN, oscillationes omnes erunt isochronæ.

PROPOSITIO LIV. PROBLEMA XXXVI.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora, quibus corpora vi qualibet centripeta in lineis quibuscunque curvis, in plano per centrum virium transeunte descriptis, descendent & ascendent.

Descendat corpus de loco quovis S, per lineam quamvis curvam $STtR$ in plano per virium centrum C transeunte datam. Jungatur CS & dividatur eadem in partes innumeras æquales, sitque Dd partium illarum aliqua. Centro C intervallis CD, Cd describantur circuli DT, dt, lineæ curvæ $STtR$ occurrentes in T & t. Et ex data tum lege vis centripetæ, tum altitudine CS de qua corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in alia quavis altitudine CT (per prop. XXXIX.) Tempus autem, quo corpus describit lineolam Tt, est ut lineolæ hujus longitudo, id est, ut secans anguli tTC directe; & velocitas inverse. Tempori huic proportionalis sit ordinatim applicata DN ad rectam CS per punctum D perpendicularis,

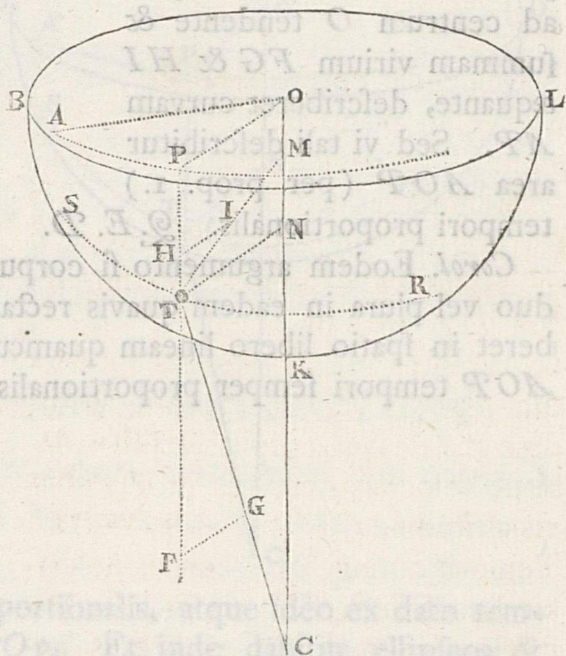


pendicularis, & ob datam Dd erit rectangulum $Dd \times DN$, hoc est area $DNnd$, eidem tempori proportionale. Ergo si PNn sit curva illa linea quam punctum N perpetuo tangit, ejusque asymptotos sit recta SQ rectæ CS perpendiculariter insistens: erit area $SQPND$ proportionalis tempori quo corpus descendendo descripsit lineam ST; proindeque ex inventa illa area dabitur tempus. *Q. E. I.*

PROPOSITIO LV. THEOREMA XIX.

Si corpus movetur in superficie quacunque curva, cujus axis per centrum virium transit, & a corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem describet.

Sit BKL superficies curva, T corpus in ea revolvens, STR trajectoria, quam corpus in eadem describit, S initium trajectoriæ, OMK axis superficiei curvæ, TN recta a corpore in axem perpendicularis, OP huic parallela & æqualis a puncto O, quod in axe datur, educta; AP vestigium trajectoriæ a puncto P in lineæ volubilis OP plano AOP descriptum; A vestigii initium puncto S respondens; TC recta a corpore ad centrum ducta; TG pars ejus vi centripetæ, qua corpus urgetur in centrum C, proportionalis; TM recta ad superficiem curvam perpendicularis; TI pars ejus vi pressionis, qua corpus urget superficiem vicissimque urgetur versus M a superficie, proportionalis; PTF recta axi parallela per corpus transiens, & GF, IH rectæ a punctis



G & I

G & *I* in parallelam illam *PHTF* perpendiculariter demissæ. Dico jam, quod area *AOP*, radio *OP* ab initio motus descripta, sit tempori proportionalis. Nam vis *TG* (per legum corol. 2.) resolvitur in vires *TF*, *FG*; & vis *TI* in vires *TH*, *HI*: Vires autem *TF*, *TH* agendo secundum lineam *PF* plano *AOP* perpendicularem mutant solummodo motum corporis quatenus huic plano perpendicularem. Ideoque motus ejus quatenus secundum positionem plani factus; hoc est, motus puncti *P*, quo trajectoriæ vestigium *AP* in hoc plano describitur, idem est ac si vires *TF*, *TH* tollerentur, & corpus solis viribus *FG*, *HI* agitaretur; hoc est, idem ac si corpus in plano *AOP*, vi centripeta ad centrum *O* tendente & summam virium *FG* & *HI* æquante, describeret curvam *AP*. Sed vi tali describitur area *AOP* (per prop. 1.) tempori proportionalis. *Q. E. D.*

Corol. Eodem argumento si corpus, a viribus agitatum ad centra duo vel plura in eadem quavis recta *CO* data tendentibus, describeret in spatio libero lineam quamcunque curvam *ST*; foret area *AOP* tempori semper proportionalis.

PROPO-

PROPOSITIO LVI. PROBLEMA XXXVII.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, datisque tum lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum superficie curva cujus axis per centrum illud transit; invenienda est trajectoria quam corpus in eadem superficie describet, de loco dato, data cum velocitate, versus plagam in superficie illa datam egressum.

Stantibus quæ in superiore propositione constructa sunt, exeat corpus *T* de loco dato *S* secundum rectam positione datam in trajectoriam inveniendam *STR*, cujus vestigium in plano *BLO* sit *AP*. Et ex data corporis velocitate in altitudine *SC*, dabitur ejus velocitas in alia quavis altitudine *TC*. Ea cum velocitate dato tempore quam minimo describat corpus trajectoriæ suæ particulam *Tt*, sitque *Pp* vestigium ejus in plano *AOP* descriptum. Jungatur *Op*, & circelli centro *T* intervallo *Tt* in superficie curva descripti vestigium in plano *AOP* sit ellipsis *pQ*. Et ob datum magnitudine circellum *Tt*, datamque ejus ab axe *CO* distantiam *TN* vel *PO*, dabitur ellipsis illa *pQ* specie & magnitudine, ut & positione ad rectam *PO*. Cumque area *POp* sit tempori proportionalis, atque ideo ex dato tempore detur, dabitur angulus *POp*. Et inde dabitur ellipseos & rectæ *Op* intersectio communis *p*, una cum angulo *OPp* in quo trajectoriæ vestigium *APp* secat lineam *OP*. Inde vero (conferendo

De Motu Corporum

rendo prop. XLI. cum corol. suo 2.) ratio determinandi curvam APp facile apparet. Tum ex singulis vestigii punctis P, erigendo ad planum AOP perpendicula PT superficiei curvæ occurrentia in T, dabuntur singula trajectoriæ puncta T. *Q. E. I.*

SECTIO XI.

De motu corporum viribus centripetis se mutuo petentium.

Hactenus exposui motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum natura. Attractiones enim fieri solent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones semper mutuæ sunt & æquales, per legem tertiam: adeo ut neque attrahens possit quiescere neque attractum, si duo sint corpora, sed ambo (per legum corollarium quartum) quasi attractione mutua, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & si plura sint corpora, quæ vel ab unico attrahantur, & idem attrahant, vel omnia se mutuo attrahant; hæc ita inter se moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quiescat, vel uniformiter moveatur in directum. Qua de causa jam pergo motum exponere corporum se mutuo trahentium, considerando vires centripetas tanquam attractiones, quamvis fortasse, si physice loquamur, verius dicantur impulsus. In mathematicis enim jam versamur; & propterea, missis disputationibus physicis, familiari utimur sermone, quo possimus a lectoribus mathematicis facilius intelligi.

PROPOSITIO LVII. THEOREMA XX.

Corpora duo se invicem trahentia describunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum se mutuo, figuras similes.

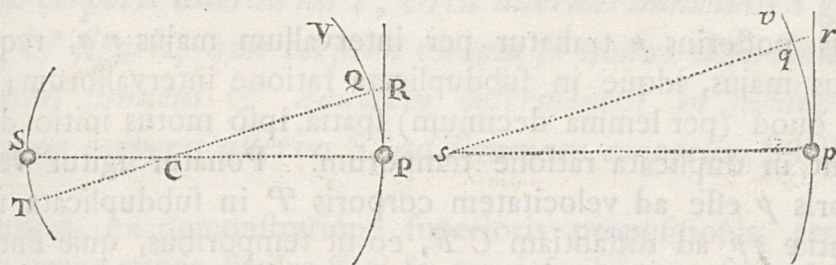
Sunt enim distantiæ corporum a communi gravitatis centro reciproce proportionales corporibus; atque ideo in data ratione ad invicem, & componendo in data ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ distantiæ circum terminum suum

communem æquali motu angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclinationem ad se mutuo. Lineæ autem rectæ, quæ sunt in data ratione ad invicem, & æquali motu angulari circum terminos suos feruntur, figuras circum eosdem terminos in planis, quæ una cum his terminis vel quiescunt, vel motu quovis non angulari moventur, describunt omnino similes. Proinde similes sunt figuræ, quæ his distantiis circumactis describuntur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LVIII. THEOREMA XXI.

Si corpora duo viribus quibusvis se mutuo trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod figuris, quas corpora sic mota describunt circum se mutuo, potest figura similis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iisdem describi.

Revolvantur corpora *S*, *P* circa commune gravitatis centrum *C*, pergendo de *S* ad *T*, deque *P* ad *Q*. A dato puncto *s* ipsis *SP*, *TQ* æquales & parallelæ ducantur semper *sp*, *sq*; & curva *pqv*, quam punctum *p* revolvendo circum punctum immotum *s* describit, erit similis & æqualis curvis, quas corpora *S*, *P* describunt circum se mutuo: proindeque (per theor. xx.) similis curvis *ST* & *PQV*,

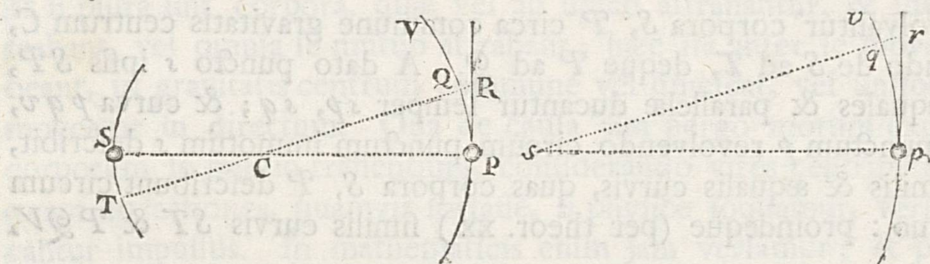


quas eadem corpora describunt circum commune gravitatis centrum *C*: idque quia proportiones linearum *SC*, *CP*, & *SP* vel *sp* ad invicem dantur.

Cas. 1. Commune illud gravitatis centrum *C*, per legum corollarium quartum, vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo, quod id quiescit, inque *s* & *p* locentur corpora

De Motu Corporum

duo, immobile in *s*, mobile in *p*, corporibus *S* & *P* ſimilia & æqualia. Dein tangant rectæ *PR* & *pr* curvas *PQ* & *pq* in *P* & *p*, & producantur *CQ* & *sq* ad *R* & *r*. Et ob ſimilitudinem figurarum *CPRQ*, *sprq* erit *RQ* ad *rq* ut *CP* ad *sp*, ideoque in data ratione. Proinde ſi vis, qua corpus *P* verſus corpus *S*, atque ideo verſus centrum intermedium *C* attrahitur, eſſet ad vim, qua corpus *p* verſus centrum *s* attrahitur, in eadem illa ratione data; hæ vires æqualibus temporibus attraherent ſemper corpora de tangentibus *PR*, *pr* ad arcus *PQ*, *pq* per intervalla ipſis proportionalia *RQ*, *rq*, ideoque vis poſterior efficeret, ut corpus *p* gyraretur in curva *pqv*, quæ ſimilis eſſet curvæ *PQV*, in qua vis prior efficit, ut corpus *P* gyretur; & revolutiones iiſdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non ſunt ad invicem in ratione *CP* ad *sp*, ſed (ob ſimilitudinem & æqualitatem corporum *S* & *s*, *P* & *p*, & æqualitatem diſtantiarum *SP*, *sp*) ſibi mutuo æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: & propterea, ut



corpus poſterius *p* trahatur per intervallum majus *rq*, requiritur tempus majus, idque in ſubduplicata ratione intervallorum; propterea quod (per lemma decimum) ſpatia ipſo motus initio deſcripta ſunt in duplicata ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis *p* eſſe ad velocitatem corporis *P* in ſubduplicata ratione diſtantiæ *sp* ad diſtantiam *CP*, eo ut temporibus, quæ ſint in eadem ſubduplicata ratione, deſcribantur arcus *pq*, *PQ*, qui ſunt in ratione integra: Et corpora *P*, *p* viribus æqualibus ſemper attracta deſcribent circum centra quieſcentia *C* & *s* figuras ſimiles *PQV*, *pqv*, quarum poſterior *pqv* ſimilis eſt & æqualis figuræ, quam corpus *P* circum corpus mobile *S* deſcribit. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, una cum ſpatio in quo corpora moventur inter ſe, progreditur uniformiter

miter

miter in directum; & (per legum corollarium sextum) motus omnes in hoc spatio peragentur ut prius, ideoque corpora describent circum se mutuo figuras easdem ac prius, & propterea figuræ pqv similes & æquales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc corpora duo viribus distantiæ suæ proportionalibus se mutuo trahentia, describunt (per prop. x.) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, ellipses concentricas; & vice versa, si tales figuræ describuntur, sunt vires distantiæ proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo, viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus, describunt (per prop. XI. XII. XIII.) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, sectiones conicas umbilicum habentes in centro, circum quod figuræ describuntur. Et vice versa, si tales figuræ describuntur, vires centripetæ sunt quadrato distantiæ reciproce proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad se mutuo ductis, describunt areas temporibus proportionales.

PROPOSITIO LIX. THEOREMA XXII.

Corporum duorum S & P, *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium, tempus periodicum esse ad tempus periodicum corporis alterutrius* P, *circa alterum immotum* S *gyrantis, & figuris, quæ corpora circum se mutuo describunt, figuram similem & æqualem describentis, in subduplicata ratione corporis alterius* S, *ad summam corporum* S+P.

Namque, ex demonstratione superioris propositionis, tempora, quibus arcus quivis similes PQ & pq describuntur, sunt in subduplicata ratione distantiarum CP & SP vel sp, hoc est, in subduplicata ratione corporis S ad summam corporum $S+P$. Et componendo, summæ temporum quibus arcus omnes similes PQ & pq describuntur, hoc est, tempora tota, quibus figuræ totæ similes describuntur, sunt in eadem subduplicata ratione. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LX. THEOREMA XXIII.

Si corpora duo S & P, viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus, se mutuo trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod ellipseos, quam corpus alterutrum P hoc motu circa alterum S describit, axis principalis erit ad axem principalem ellipseos, quam corpus idem P circa alterum quiescens S eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum S+P ad primum duorum medie proportionalium inter hanc summam & corpus illud alterum S.

Nam si descriptæ ellipses essent sibi invicem æquales, tempora periodica (per theorema superius) forent in subduplicata ratione corporis S ad summam corporum $S+P$. Minuatur in hac ratione tempus periodicum in ellipsi posteriore, & tempora periodica evadent æqualia; ellipseos autem axis principalis (per prop. xv.) minuetur in ratione, cujus hæc est sesquiplicata, id est in ratione, cujus ratio S ad $S+P$ est triplicata; ideoque erit ad axem principalem ellipseos alterius, ut primum duorum medie proportionalium inter $S+P$ & S ad $S+P$. Et inverse, axis principalis ellipseos circa corpus mobile descriptæ erit ad axem principalem descriptæ circa immobile, ut $S+P$ ad primum duorum medie proportionalium inter $S+P$ & S. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXI. THEOREMA XXIV.

Si corpora duo viribus quibusvis se mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocunque moveantur; motus eorum perinde se habebunt, ac si non traherent se mutuo, sed utrumque a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto viribus iisdem traheretur: Et virium trahentium eadem erit lex respectu distantiæ corporum a centro illo communi atque respectu distantiæ totius inter corpora.

Nam

Nam vires illæ, quibus corpora ſe mutuo trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium; ideoque eædem ſunt, ac ſi a corpore intermedio manarent. *Q.E.D.* Et quoniam datur ratio diſtantiæ corporis utriuſvis a centro illo communi ad diſtantiam inter corpora, dabitur ratio cujuſvis poteſtatis diſtantiæ unius ad eandem poteſtatem diſtantiæ alterius; ut & ratio quantitatis cujuſvis, quæ ex una diſtantia & quantitatibus datis utcunque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex altera diſtantia, & quantitatibus totidem datis, datamque illam diſtantiarum rationem ad priores habentibus ſimiliter derivatur. Proinde ſi vis, qua corpus unum ab altero trahitur, ſit directe vel inverſe ut diſtantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus diſtantiæ poteſtas; vel denique ut quantitas quævis ex hac diſtantia & quantitatibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, qua corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directe itidem vel inverſe ut corporis attracti diſtantia a centro illo communi, vel ut eadem diſtantiæ hujus poteſtas, vel denique ut quantitas ex hac diſtantia & analogis quantitatibus datis ſimiliter derivata. Hoc eſt, vis trahentis eadem erit lex reſpectu diſtantiæ utriuſque. *Q.E.D.*

PROPOSITIO LXII. PROBLEMA XXXVIII.

Corporum duorum, quæ viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus ſe mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare motus.

Corpora (per theorema noviſſimum) perinde movebuntur, ac ſi a corpore tertio in communi gravitatis centro conſtituto traherentur; & centrum illud ipſo motus initio quieſcet per hypotheſin; & propterea (per legum corol. 4.) ſemper quieſcet. Determinandi ſunt igitur motus corporum (per prob. xxv.) perinde ac ſi a viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum ſe mutuo trahentium. *Q.E.I.*

PROPO-

PROPOSITIO LXIII. PROBLEMA XXXIX.

Corporum duorum quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahunt, deque locis datis, secundum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.

Ex datis corporum motibus sub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus spatii, quod una cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii. Motus autem subsequentes (per legum corollarium quintum, & theorema novissimum) perinde fiunt in hoc spatio, ac si spatium ipsum una cum communi illo gravitatis centro quiesceret, & corpora non traherent se mutuo, sed a corpore tertio sito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc spatio mobili, de loco dato, secundum datam rectam, data cum velocitate exeuntis, & vi centripeta ad centrum illud tendente correpti, determinandus est motus per problema nonum & vicesimum sextum : & habebitur simul motus corporis alterius circum idem centrum. Cum hoc motu componendus est uniformis ille systematis spatii & corporum in eo gyrantium motus progressivus supra inventus, & habebitur motus absolutus corporum in spatio immobili. *Q. E. I.*

PROPOSITIO LXIV. PROBLEMA XL.

Viribus quibus corpora se mutuo trahunt crescentibus in simplici ratione distantiarum a centris : requiruntur motus plurium corporum inter se.

Ponantur primo corpora duo *T* & *L* commune habentia gravitatis centrum *D*. Describent hæc (per corollarium primum theorematis XXI.) ellipses centra habentes in *D*, quarum magnitudo ex problemate V. innotescit.

Trahat jam corpus tertium *S* priora duo *T* & *L* viribus acceleratricibus *ST*, *SL*, & ab ipsis vicissim trahatur. Vis *ST* (per legum

corol.

corol. 2.) resolvitur in vires *SD*, *DT*; & vis *SL* in vires *SD*, *DL*. Vires autem *DT*, *DL*, quæ sunt ut ipsarum summa *TL*, atque ideo ut vires acceleratrices quibus corpora *T* & *L* se mutuo trahunt, additæ his viribus corporum *T* & *L*, prior priori & posterior posteriori, componunt vires distantiis *DT* ac *DL* proportionales, ut prius, sed viribus prioribus majores; ideoque (per corol. 1. prop. x. & corol. 1. & 8. prop. iv.) efficiunt ut corpora illa describant ellipses ut prius, sed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices *SD* & *SD*, actionibus motricibus *SD* x *T* & *SD* x *L*, quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & secundum lineas *TI*, *LK*, ipsi *DS* parallelas, nil mutant situs eorum ad invicem, sed faciunt ut ipsa æqualiter accedant ad lineam *IK*; quam ductam concipe per medium corporis *S*, & lineæ *DS* perpendicularem. Impedietur autem iste ad lineam *IK* accessus faciendo ut systema corporum *T* & *L* ex una parte, & corpus *S* ex altera, justis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum *C*. Tali motu corpus *S*, eo quod summa virium motricium *SD* x *T* & *SD* x *L*, distantiæ *CS* proportionalium, tendit versus centrum *C*, describit ellipsin circa idem *C*; & punctum *D*, ob proportionales *CS*, *CD*, describet ellipsin consimilem e regione. Corpora autem *T* & *L* viribus motricibus *SD* x *T* & *SD* x *L*, prius priore, posterius posteriore, æqualiter & secundum lineas parallelas *TI* & *LK*, ut dictum est, attracta, pergent (per legum corollarium quintum & sextum) circa centrum mobile *D* ellipses suas describere, ut prius. *Q. E. I.*

Liber Primus.

Addatur jam corpus quartum *V*, & simili argumento concludetur hoc & punctum *C* ellipses circa omnium commune centrum gravitatis *B* describere; manentibus motibus priorum corporum *T*, *L* & *S* circa centra *D* & *C*, sed acceleratis. Et eadem methodo corpora plura adjungere licebit. *Q. E. I.*

Hæc ita se habent, etsi corpora *T* & *L* trahunt se mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam quibus trahunt corpora reliqua pro ratione distantiarum. Sunto mutuæ omnium attractiones

nes

nes acceleratrices ad invicem ut diſtantiæ ductæ in corpora trahentia, & ex præcedentibus facile deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis ellipſes varias, circa omnium commune gravitatis centrum *B*, in plano immobili deſcribunt. *Q. E. I.*

PROPOSITIO LXV. THEOREMA XXV.

Corpora plura, quorum vires decreſcunt in duplicata ratione diſtantiarum ab eorundem centris, moveri poſſe inter ſe in ellipſibus; & radiis ad umbilicos ductis areas deſcribere temporibus proportionales quam proxime.

In propoſitione ſuperiore demonſtratus eſt caſus ubi motus plures peraguntur in ellipſibus accurate. Quo magis recedit lex virium a lege ibi poſita, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri poteſt, ut corpora, ſecundum legem hic poſitam ſe mutuo trahentia, moveantur in ellipſibus accurate, niſi ſervando certam proportionem diſtantiarum ab invicem. In ſequentibus autem caſibus non multum ab ellipſibus errabitur.

Caſ. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo diſtantias revolvi, tendantque ad ſingula vires abſolutæ proportionales iiſdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per legum corol. quartum) vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva eſſe, ut corpus maximum nunquam diſtet ſenſibiliter ab hoc centro: & maximum illud vel quieſcet, vel movebitur uniformiter in directum, ſine errore ſenſibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in ellipſibus, atque radiis ad idem ductis deſcribent areas temporibus proportionales; niſi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi a communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in ſe mutuo. Diminui autem poſſunt corpora minora, uſque donec error iſte, & actiones mutuæ ſint datis quibuſvis minores; atque ideo donec orbes cum ellipſibus quadrent, & areæ reſpondeant temporibus, ſine errore, qui non ſit minor quovis dato. *Q. E. O.*

Caſ.

Cas. 2. Fingamus jam ſyſtema corporum minorum modo jam deſcripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum ſe mutuo revolventium corporum ſyſtema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longe maximi & ad magnam diſtantiam ſiti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora ſecundum lineas parallelas urgentur, non mutant ſitus corporum ad invicem, ſed ut ſyſtema totum, ſervatis partium motibus inter ſe, ſimul transferatur, efficiunt: manifeſtum eſt quod, ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorſus orietur mutatio motus attractorum inter ſe, niſi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, ſecundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum eſſe inter ſe reciproce ut quadrata diſtantiarum; & augendo corporis maximi diſtantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum differentiæ reſpectu earum longitudinis, & inclinationes ad invicem minores ſint, quam datæ quævis; perſeverabunt motus partium ſyſtematis inter ſe ſine erroribus, qui non ſint quibuſvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem diſtantiam, ſyſtema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hac attractione ad modum corporis unius; hoc eſt, centro ſuo gravitatis deſcribet circa corpus maximum ſectionem aliquam conicam (*viz.* Hyperbolam vel parabolam attractione languida, ellipſin fortiore) & radio ad maximum ducto deſcribet areas temporibus proportionales, ſine ullis erroribus, niſi quas partium diſtantiæ, perexiguæ ſane & pro lubitu minuendæ, valeant efficere. *Q. E. O.*

Simili argumento pergere licet ad caſus magis compoſitos in infinitum.

Corol. 1. In caſu ſecundo, quo propius accedit corpus omnium maximum ad ſyſtema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium ſyſtematis inter ſe; propterea quod linearum a corpore maximo ad has ductarum jam major eſt inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maxime autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium ſyſtematis, verſus corpus omnium maximum, non ſint ad invicem reciproce ut quadrata diſtantiarum a corpore illo maximo; præſertim ſi proportionis hujus inæqualitas major ſit

quam inæqualitas proportionis distantiarum a corpore maximo. Nam si vis acceleratrix, æqualiter & secundum lineas parallelas agendo, nil perturbat motus inter se, necesse est, ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque sit, vel minor pro majore, vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum, agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, necessario mutabunt situm eorum inter se. Et hæc perturbatio addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde si systematis hujus partes in ellipsibus, vel circulis sine perturbatione insigni moveantur; manifestum est, quod eædem a viribus acceleratricibus, ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur nisi levissime, aut urgentur æqualiter, & secundum lineas parallelas quamproxime.

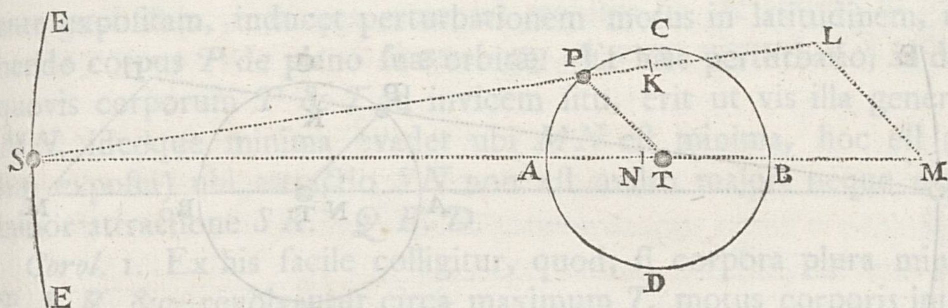
PROPOSITIO LXVI. THEOREMA XXVI.

Si corpora tria, quorum vires decrescunt in duplicata ratione distantiarum, se mutuo trahant; & attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint inter se reciproce ut quadrata distantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipsum ductis, describet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam ellipseos umbilicum in concursu radiorum habentis magis accedentem; si corpus maximum his attractionibus agitetur; quam si maximum illud vel a minoribus non attractum quiescat, vel multo minus vel multo magis attractum, aut multo minus, aut multo magis agitetur.

Liquet fere ex demonstratione corollarii secundi propositionis præcedentis; sed argumento magis distincto & latius cogente sic evincitur.

Cas. 1. Revolvantur corpora minora *P* & *S* in eodem plano circa maximum *T*, quorum *P* describat orbem interiorem *PAB*, & *S* exteriorem

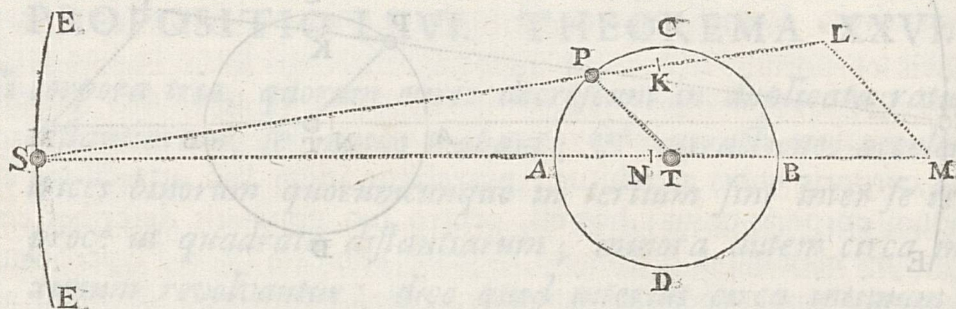
teriorem ESE. Sit SK mediocris distantia corporum P & S; & corporis P versus S attractio acceleratrix, in mediocri illa distantia, exponatur per eandem. In duplicata ratione SK ad SP capiatur SL ad SK, & erit SL attractio acceleratrix corporis P versus S in distantia quavis SP. Junge PT, eique parallelam age LM occurrentem ST in M; & attractio SL resolvetur (per legum corol. 2.) in attractiones SM, LM. Et sic urgebitur corpus P vi acceleratrice triplici. Vis una tendit ad T, & oritur a mutua attractione corporum T & P. Hac vi sola corpus P circum corpus T, sive immotum, sive hac attractione agitatum, describere deberet & areas, radio PT, temporibus proportionales, & ellipsin cui umbilicus est in centro corporis T. Patet hoc per prop. XI. & corollaria 2. & 3. theor. XXI. Vis altera est attractionis LM, quæ quoniam tendit a P ad T, super-



peraddita vi priori coincidet cum ipsa, & sic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales describantur per corol. 3. theor. XXI. At quoniam non est quadrato distantiæ PT reciproce proportionalis, componet ea cum vi priore vim ab hac proportione aberrantem, idque eo magis, quo major est proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per prop. XI. & per corol. 2. theor. XXI.) vis, qua ellipsis circa umbilicum T describitur, tendere debeat ad umbilicum illum, & esse quadrato distantiæ PT reciproce proportionalis; vis illa composita, aberrando ab hac proportione, faciet ut orbis PAB aberret a forma ellipseos umbilicum habentis in T; idque eo magis, quo major est aberratio ab hac proportione; atque ideo etiam quo major est proportio vis secundæ LM ad vim primam, cæteris paribus. Jam vero vis tertia SM, trahendo corpus P secundum lineam ipsi ST parallelam, componet cum viribus prioribus vim, quæ non amplius dirigitur a P in T;

De Motu Corporum

quæque ab hac determinatione tanto magis aberrat, quanto major est proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus: atque ideo quæ faciet ut corpus *P*, radio *TP*, areas non amplius temporibus proportionales describat; atque ut aberratio ab hac proportionalitate tanto major sit, quanto major est proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis vero *PAB* aberrationem a forma elliptica præfata hæc vis tertia duplici de causa adaugebit, tum quod non dirigatur a *P* ad *T*, tum etiam quod non sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ *PT*. Quibus intellectis, manifestum est, quod areæ temporibus tum maxime fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, fit minima; & quod orbis *PAB* tum maxime accedit ad præfatam formam ellipticam, ubi vis tam secunda quam tertia, sed præcipue vis tertia fit minima, vi prima manente.



Exponatur corporis *T* attractio acceleratrix versus *S* per lineam *SN*; & si attractiones acceleratrices *SM*, *SN* æquales essent; hæ, trahendo corpora *T* & *P* æqualiter & secundum lineas parallelas, nil mutarent situm eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter se (per legum corol. VI.) ac si hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione si attractio *SN* minor esset attractione *SM*, tolleret ipsa attractionis *SM* partem *SN*, & maneret pars sola *MN*, qua temporum & arearum proportionalitas & orbitæ forma illa elliptica perturbaretur. Et similiter si attractio *SN* major esset attractione *SM*, oriretur ex differentia sola *MN* perturbatio proportionalitatis & orbitæ. Sic per attractionem *SN* reducitur semper attractio tertia superior *SM* ad attractionem *MN*, attractione prima & secunda manentibus prorsus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & orbita *PAB* ad formam præ-

fatam

fitam ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio *MN* vel nulla est, vel quam fieri possit minima; hoc est, ubi corporum *P* & *T* attractiones acceleratrices, factæ versus corpus *S*, accedunt quantum fieri potest ad æqualitatem; id est, ubi attractio *SN* non est nulla, neque minor minima attractionum omnium *SM*, sed inter attractionum omnium *SM* maximam & minimam quasi mediocris, hoc est, non multo major neque multo minor attractione *SK*. *Q.E.D.*

Cas. 2. Revolvantur jam corpora minora *P*, *S* circa maximum *T* in planis diversis; & vis *LM*, agendo secundum lineam *PT* in plano orbitæ *PAB* sitam, eundem habebit effectum ac prius, neque corpus *P* de plano orbitæ suæ deturbabit. At vis altera *NM*, agendo secundum lineam quæ ipsi *ST* parallela est (atque ideo, quando corpus *S* versatur extra lineam nodorum, inclinatur ad planum orbitæ *PAB*) præter perturbationem motus in longitudinem jam ante expositam, inducet perturbationem motus in latitudinem, trahendo corpus *P* de plano suæ orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum *P* & *T* ad invicem situ, erit ut vis illa generans *MN*, ideoque minima evadet ubi *MN* est minima, hoc est (uti jam exposui) ubi attractio *SN* non est multo major, neque multo minor attractione *SK*. *Q.E.D.*

Corol. 1. Ex his facile colligitur, quod, si corpora plura minora *P*, *S*, *R*, &c. revolvantur circa maximum *T*, motus corporis intimi *P* minime perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum *T* pariter a cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitatur, atque cætera a se mutuo.

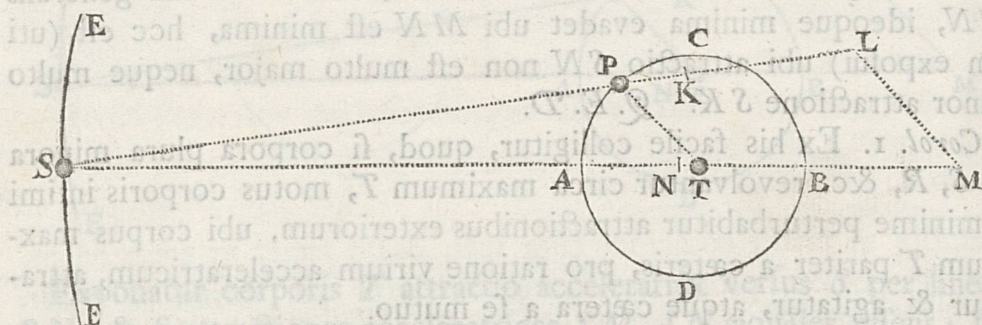
Corol. 2. In systemate vero trium corporum *T*, *P*, *S*, si attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum; corpus *P*, radio *PT*, aream circa corpus *T* velocius describet prope conjunctionem *A* & oppositionem *B*, quam prope quadraturas *C*, *D*. Namque vis omnis qua corpus *P* urgetur & corpus *T* non urgetur, quæque non agit secundum lineam *PT* accelerat vel retardat descriptionem areæ, perinde ut ipsa in consequentia vel in antecedentia dirigitur. Talis est vis *NM*. Hæc in transitu corporis *P* a *C* ad *A* tendit in consequentia, motumque accelerat; dein usque ad *D* in antecedentia, & motum retardat; tum in consequentia usque ad *B*, & ultimo in antecedentia transeundo a *B* ad *C*.

Corol.

Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus *P*, cæteris paribus, velocius movetur in conjunctione & oppositione quam in quadraturis.

Corol. 4. Orbita corporis *P*, cæteris paribus, curvior est in quadraturis quam in conjunctione & oppositione. Nam corpora velociora minus deflectunt a recto tramite. Et præterea vis *KL*, vel *NM*, in conjunctione & oppositione contraria est vi, qua corpus *T* trahit corpus *P*; ideoque vim illam minuit; corpus autem *P* minus deflectet a recto tramite, ubi minus urgetur in corpus *T*.

Corol. 5. Unde corpus *P*, cæteris paribus, longius recedet a corpore *T* in quadraturis, quam in conjunctione & oppositione. Hæc ita se habent excluso motu excentricitatis. Nam si orbita corporis *P* excentrica sit, excentricitas ejus (ut mox in hujus corol. 9. ostendetur) evadet maxima ubi apsides sunt in syzygiis; indeque fieri potest ut corpus *P*, ad apsidem summam appellans, absit longius a corpore *T* in syzygiis quam in quadraturis.



Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis *T*, qua corpus *P* retinetur in orbe suo, augetur in quadraturis per additionem vis *LM*, ac diminuitur in syzygiis per ablationem vis *KL*, & ob magnitudinem vis *KL*, magis diminuitur quam augetur; est autem vis illa centripeta (per corol. 2. prop. IV.) in ratione composita ex ratione simplici radii *TP* directe & ratione duplicata temporis periodici inverse: patet hanc rationem compositam diminui per actionem vis *KL*; ideoque tempus periodicum, si maneat orbis radius *TP*, augeri, idque in subduplicata ratione, qua vis illa centripeta diminuitur: auctoque ideo vel diminuto hoc radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in radii hujus ratione sesqui-

ſeſquiplicata, (per corol. VI. prop. IV.) Si vis illa corporis centralis paulatim langueſceret, corpus *P* minus ſemper & minus attractum perpetuo recederet longius a centro *T*; & contra, ſi vis illa augeretur, accederet propius. Ergo ſi actio corporis longinqui *S*, qua vis illa diminuitur, augeatur ac diminuatur per vices: augebitur ſimul ac diminuetur radius *TP* per vices; & tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compoſita ex ratione ſeſquiplicata radii, & ratione ſubduplicata, qua vis illa centripeta corporis centralis *T*, per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui *S*, diminuitur vel augetur.

Corol. 7. Ex præmiſſis conſequitur etiam, quod ellipſeos a corpore *P* deſcriptæ axis, ſeu apſidum linea, quoad motum angularem, progreditur & regreditur per vices, ſed magis tamen progreditur, & per exceſſum progreſſionis fertur in conſequentia. Nam vis qua corpus *P* urgetur in corpus *T* in quadraturis, ubi vis *MN* evanuit, componitur ex vi *LM* & vi centripeta, qua corpus *T* trahit corpus *P*. Vis prior *LM*, ſi augeatur diſtantia *PT*, augetur in eadem fere ratione cum hac diſtantia, & vis poſterior decreſcit in duplicata illa ratione, ideoque ſumma harum virium decreſcit in minore quam duplicata ratione diſtantiæ *PT*, & propterea (per corol. I. prop. XLV.) efficit ut aux, ſeu apſis ſumma, regrediatur. In conjunctione vero & oppoſitione vis, qua corpus *P* urgetur in corpus *T*, differentia eſt inter vim, qua corpus *T* trahit corpus *P*, & vim *KL*; & differentia illa, propterea quod vis *KL* augetur quamproxime in ratione diſtantiæ *PT*, decreſcit in majore quam duplicata ratione diſtantiæ *PT*, ideoque (per corol I. prop. XLV.) efficit ut aux progrediatur. In locis inter ſyzygias & quadraturas pendet motus augis ex cauſa utraque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius exceſſu progrediatur ipſa vel regrediatur. Unde cum vis *KL* in ſyzygiis ſit quaſi duplo major quam vis *LM* in quadraturis, exceſſus erit penes vim *KL*, transferetque augem in conſequentia. Veritas autem hujus & præcedentis corollarii facilius intelligetur concipiendo ſyſtema corporum duorum *T*, *P* corporibus pluribus *S*, *S*, *S*, &c. in orbe *ESE* conſiſtentibus, undique cingi. Namque horum actionibus actio ipſius *T* minuetur undique, decreſcetque in ratione pluſquam duplicata diſtantiæ.

Corol. 8. Cum autem pendeat apſidum progreſſus vel regreſſus a decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicata ratione diſtantiæ *TP*, in tranſitu corporis ab apſide ima ad apſidem ſummam; ut & a ſimili incremento in reditu ad apſidem imam; atque ideo maximus ſit ubi proportio vis in apſide ſumma ad vim in apſide ima maxime recedit a duplicata ratione diſtantiarum inverſa: manifeſtum eſt quod apſides in ſyzygiis ſuis, per vim ablatitiam *KL* ſeu *NM* — *LM*, progredientur velocius, inque quadraturis ſuis tardius recedent per vim addititiam *LM*. Ob diuturnitatem temporis, quo velocitas progreſſus vel tarditas regreſſus continuatur, fit hæc inæqualitas longe maxima.

Corol. 9. Si corpus aliquod, vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ a centro, revolveretur circa hoc centrum in ellipſi; & mox, in deſcenſu ab apſide ſumma ſeu auge ad apſidem imam, vis illa per acceſſum perpetuum vis novæ augeretur in ratione pluſquam duplicata diſtantiæ diminutæ: manifeſtum eſt quod corpus, perpetuo acceſſu vis illius novæ impulſum ſemper in centrum, magis vergeret in hoc centrum, quam ſi urgeretur vi ſola creſcente in duplicata ratione diſtantiæ diminutæ; ideoque orbem deſcriberet orbe elliptico interiorem, & in apſide ima propius accederet ad centrum quam prius. Orbis igitur, acceſſu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis, in receſſu corporis ab apſide ima ad apſidem ſummam, decreſceret iiſdem gradibus quibus ante creverat, rediret corpus ad diſtantiam priorem, ideoque ſi vis decreſcat in majori ratione, corpus jam minus attractum aſcendet ad diſtantiam majorem & ſic orbis excentricitas adhuc magis augebitur. Quare ſi ratio incrementi & decrementi vis centripetæ ſingulis revolutionibus augeatur, augebitur ſemper excentricitas; & contra, dimi-

diminuetur eadem, si ratio illa decrescat. Jam vero in systemate corporum *T*, *P*, *S*, ubi apsides orbis *PAB* sunt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima est, & maxima fit ubi apsides sunt in syzygiis. Si apsides constituantur in quadraturis, ratio prope apsides minor est & prope syzygias major quam duplicata distantiarum, & ex ratione illa majori oritur augis motus directus, uti jam dictum est. At si consideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progressu inter apsides, hæc minor est quam duplicata distantiarum. Vis in apside ima est ad vim in apside summa in minore quam duplicata ratione distantiæ apsidis summæ ab umbilico ellipseos ad distantiam apsidis imæ ab eodem umbilico: & contra, ubi apsides constituuntur in syzygiis, vis in apside ima est ad vim in apside summa in majore quam duplicata ratione distantiarum. Nam vires *LM* in quadraturis additæ viribus corporis *T* componunt vires in ratione minore, & vires *KL* in syzygiis subductæ a viribus corporis *T* relinquunt vires in ratione majore. Est igitur ratio decrementi & incrementi totius, in transitu inter apsides, minima in quadraturis, maxima in syzygiis: & propterea in transitu apsidum a quadraturis ad syzygias perpetuo augetur, augetque excentricitatem ellipseos; inque transitu a syzygiis ad quadraturas perpetuo diminuitur, & excentricitatem diminuit.

Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fingamus planum orbis *EST* immobile manere; & ex errorum exposita causa manifestum est, quod ex viribus *NM*, *ML*, quæ sunt causa illa tota, vis *ML* agendo semper secundum planum orbis *PAB*, nunquam perturbat motus in latitudinem; quodque vis *NM*, ubi nodi sunt in syzygiis, agendo etiam secundum idem orbis planum, non perturbat hos motus; ubi vero sunt in quadraturis, eos maxime perturbat, corpusque *P* de plano orbis sui perpetuo trahendo, minuit inclinationem plani in transitu corporis a quadraturis ad syzygias, augetque vicissim eandem in transitu a syzygiis ad quadraturas. Unde fit ut corpore in syzygiis existente inclinatio evadat omnium minima, redeatque ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad nodum proximum accedit. At si nodi constituantur in octantibus post quadraturas, id est, inter *C* & *A*, *D* & *B*, intelligetur ex modo expositis, quod, in transitu corporis *P* a nodo alterutro ad gradum inde nonagesimum, inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in

transitu per proximos 45 gradus, usque ad quadraturam proximam, inclinatio augetur, & postea denuo in transitu per alios 45 gradus, usque ad nodum proximum, diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quam augetur, & propterea minor est semper in nodo subsequente quam in præcedente. Et simili ratiocinio, inclinatio magis augetur, quam diminuitur, ubi nodi sunt in octantibus alteris inter *A* & *D*, *B* & *C*. Inclinatio igitur ubi nodi sunt in syzygiis est omnium maxima. In transitu eorum a syzygiis ad quadraturas, in singulis corporis ad nodos appulsibus, diminuitur; fitque omnium minima, ubi nodi sunt in quadraturis, & corpus in syzygiis: dein crescit iisdem gradibus, quibus antea decreverat; nodisque ad syzygias proximas appulsis, ad magnitudinem primam revertitur.

Corol. 11. Quoniam corpus *P*, ubi nodi sunt in quadraturis, perpetuo trahitur de plano orbis sui, idque in partem versus *S* in transitu suo a nodo *C* per conjunctionem *A* ad nodum *D*; & in contrariam partem in transitu a nodo *D* per oppositionem *B* ad nodum *C*: manifestum est, quod in motu suo a nodo *C* corpus perpetuo recedit ab orbis sui plano primo *CD*, usque dum perventum est ad nodum proximum; ideoque in hoc nodo, longissime distans a plano illo primo *CD*, transit per planum orbis *EST* non in plani illius nodo altero *D*, sed in puncto quod inde vergit ad partes corporis *S*, quodque proinde novus est nodi locus in anteriora vergens. Et simili argumento pergent nodi recedere in transitu corporis de hoc nodo in nodum proximum. Nodi igitur in quadraturis constituti perpetuo recedunt; in syzygiis, ubi motus in latitudinem nil perturbatur, quiescunt; in locis intermediis, conditionis utriusque participes,

cipes, recedunt tardius: ideoque, semper vel retrogradi, vel statio- narii singulis revolutionibus feruntur in antecedentia. Liber Primus.

Corol. 12. Omnes illi in his corollariis descripti errores sunt paulo majores in conjunctione corporum *P*, *S*, quam in eorum oppositione; idque ob majores vires generantes *NM* & *ML*.

Corol. 13. Cumque rationes horum corollariorum non pendeant a magnitudine corporis *S*, obtinent præcedentia omnia, ubi corporis *S* tanta statuitur magnitudo, ut circa ipsum revolvatur corporum duorum *T* & *P* systema. Et ex aucto corpore *S*, auctaque ideo ipsius vi centripeta, a qua errores corporis *P* oriuntur, evadent errores illi omnes, paribus distantiis, majores in hoc casu quam in altero, ubi corpus *S* circum systema corporum *P* & *T* revolvitur.

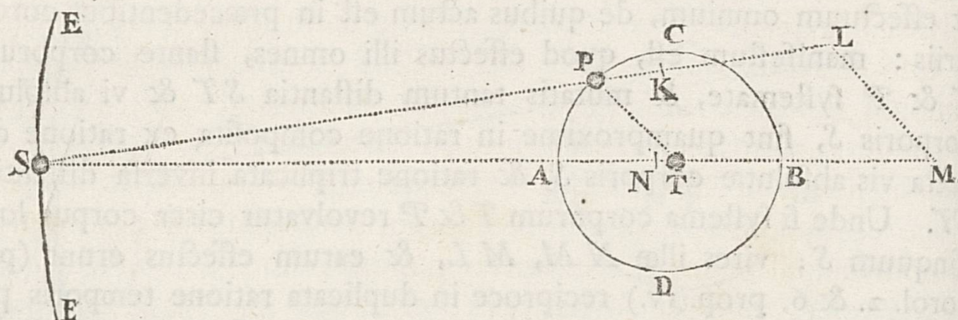
Corol. 14. Cum autem vires *NM*, *ML*, ubi corpus *S* longinquum est, sint quamproxime ut vis *SK* & ratio *PT* ad *ST* conjunctim, hoc est, si detur tum distantia *PT*, tum corporis *S* vis absoluta, ut *ST cub.* reciproce; sint autem vires illæ *NM*, *ML* causæ errorum & effectuum omnium, de quibus actum est in præcedentibus corollariis: manifestum est, quod effectus illi omnes, stante corporum *T* & *P* systemate, & mutatis tantum distantia *ST* & vi absoluta corporis *S*, sint quamproxime in ratione composita ex ratione directa vis absolutæ corporis *S*, & ratione triplicata inversa distantiæ *ST*. Unde si systema corporum *T* & *P* revolvatur circa corpus longinquum *S*; vires illæ *NM*, *ML*, & earum effectus erunt (per corol. 2. & 6. prop. IV.) reciproce in duplicata ratione temporis periodici. Et inde etiam, si magnitudo corporis *S* proportionalis sit ipsius vi absolutæ, erunt vires illæ *NM*, *ML*, & earum effectus directe ut cubus diametri apparentis longinqui corporis *S* e corpore *T* spectati, & vice versa. Namque hæ rationes eædem sunt, atque ratio superior composita.

Corol. 15. Et quoniam si, manentibus orbium *ESE* & *PAB* forma, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, & si corporum *S* & *T* vel maneant, vel mutentur vires in data quavis ratione; hæ vires (hoc est, vis corporis *T*, qua corpus *P* de recto tramite in orbitam *PAB* deflectere, & vis corporis *S*, qua corpus idem *P* de orbita illa deviare cogitur) agunt semper eodem modo, & eadem proportione: necesse est ut similes & proportionales sint effectus omnes, & proportionalia effectuum tempora;

De Motu Corporum

pora; hoc est, ut errores omnes lineares sint ut orbium diametri, angulares vero iidem, qui prius, & errorum linearium similium, vel angularium æqualium tempora ut orbium tempora periodica.

Corol. 16. Unde, si dentur orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutentur utcunque corporum magnitudines, vires & distantiæ; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno casu, colligi possunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proxime: sed brevius hac methodo. Vires *NM*, *ML*, cæteris stantibus, sunt ut radius *TP*, & harum effectus periodici (per corol. 2. lem. x.) ut vires, & quadratum temporis periodici corporis *P* conjunctim. Hi sunt errores lineares corporis *P*; & hinc errores angulares e centro *T* spectati (id est, tam motus augis & nodorum, quam omnes in longitudinem & latitudinem errores apparentes) sunt, in qualibet revolutione corporis *P*, ut quadratum temporis revolutionis quam proxime. Conjungantur hæ rationes cum rationibus corollarii XIV.



& in quolibet corporum *T*, *P*, *S* systemate, ubi *P* circum *T* sibi propinquum, & *T* circum *S* longinquum revolvitur, errores angulares corporis *P*, de centro *T* apparentes, erunt, in singulis revolutionibus corporis illius *P*, ut quadratum temporis periodici corporis *P* directe & quadratum temporis periodici corporis *T* inverse. Et inde motus medius augis erit in data ratione ad motum medium nodorum; & motus uterque erit ut tempus periodicum corporis *P* directe & quadratum temporis periodici corporis *T* inverse. Augendo vel minuendo excentricitatem & inclinationem orbis *PAB* non mutantur motus augis & nodorum sensibiliter, nisi ubi eædem sunt nimis magnæ.

Corol.

Corol. 17. Cum autem linea *LM* nunc major ſit nunc minor quam radius *PT*, exponatur vis mediocris *L M* per radium illum *PT*; & erit hæc ad vim mediocrem *SK* vel *SN* (quam exponere licet per *ST*) ut longitudo *PT* ad longitudinem *ST*. Eſt autem vis mediocris *SN* vel *ST*, qua corpus *T* retinetur in orbe ſuo circum *S*, ad vim, qua corpus *P* retinetur in orbe ſuo circum *T*, in ratione compoſita ex ratione radii *ST* ad radium *PT*, & ratione duplicata temporis periodici corporis *P* circum *T* ad tempus periodicum corporis *T* circum *S*. Et ex æquo, vis mediocris *LN* ad vim, qua corpus *P* retinetur in orbe ſuo circum *T* (quave corpus idem *P*, eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile *T* ad diſtantiam *PT* revolvi poſſet) eſt in ratione illa duplicata periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis una cum diſtantia *PT*, datur vis mediocris *LM*; & ea data, datur etiam vis *MN* quamproxime per analogiam linearum *PT*, *MN*.

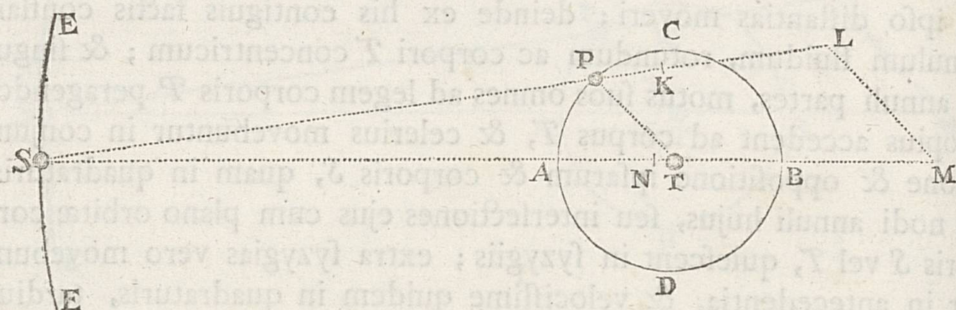
Corol. 18. Iiſdem legibus, quibus corpus *P* circum corpus *T* revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem *T* ad æquales ab ipſo diſtantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari annulum fluidum, rotundum ac corpori *T* concentricum; & ſingulæ annuli partes, motus ſuos omnes ad legem corporis *P* peragendo, propius accedent ad corpus *T*, & celerius movebuntur in conjunctione & oppoſitione ipſarum & corporis *S*, quam in quadraturis. Et nodi annuli hujus, ſeu interſectiones ejus cum plano orbitæ corporis *S* vel *T*, quieſcent in ſyzygiis; extra ſyzygias vero movebuntur in antecedentia, & velociſſime quidem in quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, & axis ejus ſingulis revolutionibus oſcillabitur, completaque revolutione ad priſtinum ſitum redibit, niſi quatenus per præceſſionem nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam globum corporis *T*, ex materia non fluida conſtantem, ampliari & extendi uſque ad hunc annulum, & alveo per circuitum excavato continere aquam, motuque eodem periodico circa axem ſuum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in ſuperiore corollario) in ſyzygiis velocior erit, in quadraturis tardior quam ſuperficies globi, & ſic fluet in alveo refluetque ad modum maris. Aqua, revolvendo circa globi centrum quieſcens, ſi tollatur attractio corporis *S*, nullum acquiret

motum

motum fluxus & refluxus. Par eſt ratio globi uniformiter progredientis in directum, & interea revolventis circa centrum ſuum (per legum corol. v.) ut & globi de curſu rectilineo uniformiter tracti, (per legum corol. 6.) Accedat autem corpus *S*, & ab ipſius inæquabili attractione mox turbabitur aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. Vis autem *LM* trahet aquam deorſum in quadraturis, facietque ipſam deſcendere uſque ad ſyzygias; & vis *KL* trahet eandem ſurſum in ſyzygiis, ſiſtetque deſcenſum ejus, & faciet ipſam aſcendere uſque ad quadraturas: niſi quatenus motus fluendi & refluendi ab alveo aquæ dirigatur, & per frictionem aliquatenus retardetur.

Corol. 20. Si annulus jam rigeat, & minuatur globus, ceſſabit motus fluendi & refluendi; ſed oſcillatorius ille inclinationis motus & præceſſio nodorum manebunt. Habeat globus eundem axem cum annulo, gyroſque compleat iiſdem temporibus, & ſuperficie ſua contingat ipſum interius, eique inhæreat; & participando motum ejus,



compages utriuſque oſcillabitur, & nodi regredientur. Nam globus, ut mox dicetur, ad ſuſcipiendas impreſſiones omnes indifferens eſt. Annuli globo orbati maximus inclinationis angulus eſt, ubi nodi ſunt in ſyzygiis. Inde in progreſſu nodorum ad quadraturas conatur is inclinationem ſuam minuere, & iſto conatu motum imprimit globo toti. Retinet globus motum impreſſum, uſque dum annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: Atque hac ratione maximus decreſcentis inclinationis motus fit in quadraturis nodorum, & minimus inclinationis angulus in octantibus poſt quadraturas; dein maximus reclinationis motus in ſyzygiis, & maximus angulus in octantibus proximis. Et eadem

eadem est ratio globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior est paulo quam juxta polos, vel constat ex materia paulo densiore. Supplet enim vicem annuli iste materiæ in æquatoris regionibus excessus. Et quanquam, aucta utcunque globi hujus vi centripeta, tendere supponantur omnes ejus partes deorsum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen phænomena hujus & præcedentis corollarii vix inde mutabuntur; nisi quod loca maximarum & minimarum altitudinum aquæ diversa erunt. Aqua enim jam in orbe suo sustinetur & permanet, non per vim suam centrifugam, sed per alveum in quo fluit. Et præterea vis LM trahit aquam deorsum maxime in quadraturis, & vis KL seu $NM - LM$ trahit eandem sursum maxime in syzygiis. Et hæ vires conjunctæ desinunt trahere aquam deorsum & incipiunt trahere aquam sursum in octantibus ante syzygias, ac desinunt trahere aquam sursum incipiuntque trahere aquam deorsum in octantibus post syzygias. Et inde maxima aquæ altitudo evenire potest in octantibus post syzygias, & minima in octantibus post quadraturas circiter; nisi quatenus motus ascendendi vel descendendi ab his viribus impressus vel per vim insitam aquæ paulo diutius perseveret, vel per impedimenta alvei paulo citius sistatur.

Corol. 21. Eadem ratione, qua materia globi juxta æquatorem redundans efficit ut nodi regrediantur, atque ideo per hujus incrementum augetur iste regressus, per diminutionem vero diminuitur, & per ablationem tollitur; si materia plusquam redundans tollatur, hoc est, si globus juxta æquatorem vel depressior reddatur, vel rarior quam juxta polos, orietur motus nodorum in consequentia.

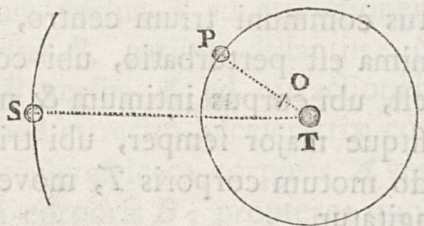
Corol. 22. Et inde vicissim, ex motu nodorum innotescit constitutio globi. Nimirum si globus polos eosdem constanter servat, & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; si in consequentia, deficit. Pone globum uniformem & perfecte circinatum in spatiis liberis primo quiescere; dein impetu quocunque oblique in superficiem suam facto propelli, & motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam globus iste ad axes omnes per centrum suum transeuntes indifferenter se habet, neque propensior est in unum axem, unumve axis situm, quam in alium quemvis; perspicuum est, quod is axem suum, axisque inclinationem vi propria nunquam mutabit. Impellatur jam globus oblique,

que, in eadem illa ſuperficiei parte, qua prius, impulſu quocunque novo; & cum citior vel ſerior impulſus effectum nil mutet, manifeſtum eſt, quod hi duo impulſus ſucceſſive impreſſi eundem producent motum, ac ſi ſimul impreſſi fuiſſent, hoc eſt, eundem, ac ſi globus vi ſimplici ex utroque (per legum corol. 2.) compoſita impulſus fuiſſet, atque ideo ſimplicem, circa axem inclinatione datum. Et par eſt ratio impulſus ſecundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulſus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulſus ſecundus ſine primo generaret; atque ideo impulſuum amborum factorum in loca quæcunque: generabunt hi eundem motum circularem ac ſi ſimul & ſemel in locum interſectionis æquatorum motuum illorum, quos ſeorſim generarent, fuiſſent impreſſi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures diſtinctos, ſed impreſſos omnes componit & ad unum reducit, & quatenus in ſe eſt, gyratur ſemper motu ſimplici & uniformi circa axem unicum, inclinatione ſemper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare poteſt. Si globus plano quocunque, per centrum ſuum & centrum in quod vis dirigitur tranſeunte, dividi intelligatur in duo hemiſphæria; urgebit ſemper vis illa utrumque hemiſphærium æqualiter, & propterea globum, quoad motum rotationis, nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum & æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi a centro ſui motus, turbabit motum globi, facietque ut poli ejus errent per ipſius ſuperficiem, & circulos circum ſe punctumque ſibi oppoſitum perpetuo deſcribant. Neque corrigetur iſta vagationis enormitas, niſi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in caſu (per corol. XXI.) nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, qua ratione (per corol. XX.) nodi regredientur; vel denique ex altera axis parte addendo materiam novam, qua mons inter movendum libretur, & hoc pacto nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia ſunt vel polo vel æquatori propiores.

PROPO-

PROPOSITIO LXVII. THEOREMA XXVII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, *circa interiorum* P, T *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales & orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum* T, *radiis ad ipsum ductis, describere potest.*



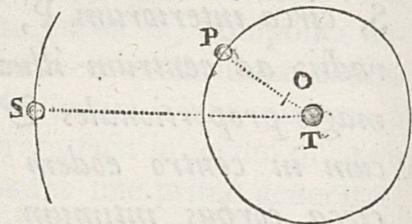
Nam corporis *S* attractiones versus *T* & *P* componunt ipsius attractionem absolutam, quæ magis dirigitur in corporum *T* & *P* commune gravitatis centrum *O*, quam in corpus maximum *T*, quæque quadrato distantiæ *SO* magis est proportionalis reciproce, quam quadrato distantiæ *ST*: ut rem perpendenti facile constabit.

PROPOSITIO LXVIII. THEOREMA XXVIII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, *circa interiorum* P & T *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, & orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quam si id vel non attractum quiescat, vel multo magis aut multo minus attractum aut multo magis aut multo minus agitetur.*

Demonstratur eodem fere modo cum prop. LXVI. sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Sufficeret rem sic æstimare. Ex demonstratione propositionis novissimæ liquet centrum, in quod

corpus *S* conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus *S* ex una parte, & commune centrum aliorum duorum ex altera parte, circa commune omnium centrum quiescens, ellipses accuratas. Liquet hoc per corollarium secundum propositionis LVIII. collatum cum demonstratis in prop. LXIV. & LXV. Perturbatur iste motus ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum a centro, in quod tertium *S* attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio, ubi commune trium centrum quiescit; hoc est, ubi corpus intimum & maximum *T* lege cæterorum attrahitur: fitque major semper, ubi trium commune illud centrum, minuendo motum corporis *T*, moveri incipit, & magis deinceps magisque agitatur.



Corol. Et hinc, si corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod orbitæ descriptæ propius accedent ad ellipticas, & arearum descriptiones fient magis æquabiles, si corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt ut eorum vires absolutæ directe & quadrata distantiarum inverse, se mutuo trahant agitentque, & orbitæ cujusque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum (nimirum umbilicus orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille orbitæ secundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iste tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum; & sic deinceps) quam si corpus intimum quiescat & statuatur communis umbilicus orbitarum omnium.

PROPOSITIO LXIX. THEOREMA XXIX.

In systemate corporum plurium A, B, C, D, *&c. si corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B, C, D, *&c. viribus acceleratricibus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a tra-*

a trahente; & corpus aliud B *trahit etiam cætera* A, C, D, *&c. viribus quæ ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a trahente: erunt abſolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut ſunt ipſa corpora* A, B, *quorum ſunt vires.*

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium *B, C, D* verſus *A*, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur ex hypotheſi; & ſimiliter attractiones acceleratrices corporum omnium verſus *B*, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur. Eſt autem abſoluta vis attractiva corporis *A* ad vim abſolutam attractivam corporis *B*, ut attractio acceleratrix corporum omnium verſus *A* ad attractionem acceleratricem corporum omnium verſus *B*, paribus diſtantiis; & ita eſt attractio acceleratrix corporis *B* verſus *A*, ad attractionem acceleratricem corporis *A* verſus *B*. Sed attractio acceleratrix corporis *B* verſus *A* eſt ad attractionem acceleratricem corporis *A* verſus *B*, ut maſſa corporis *A* ad maſſam corporis *B*; propterea quod vires motrices, quæ (per definitionem ſecundam, ſeptimam & octavam) ſunt ut vires acceleratrices & corpora attracta conjunctim, hic ſunt (per motus legem tertiam) ſibi invicem æquales. Ergo abſoluta vis attractiva corporis *A* eſt ad abſolutam vim attractivam corporis *B*, ut maſſa corporis *A* ad maſſam corporis *B*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi ſingula ſyſtematis corpora *A, B, C, D,* &c. ſeorſim ſpectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a trahente; erunt corporum illorum omnium vires abſolutæ ad invicem ut ſunt ipſa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, ſi ſingula ſyſtematis corpora *A, B, C, D,* &c. ſeorſim ſpectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ ſunt vel reciproce, vel directe in ratione dignitatis cujuſcunque diſtantiarum a trahente, quæve ſecundum legem quamcunque communem ex diſtantiis ab unoquoque trahente definiuntur; conſtat quod corporum illorum vires abſolutæ ſunt ut corpora.

Corol. 3. In ſyſtemate corporum, quorum vires decreſcunt in ratione duplicata diſtantiarum, ſi minora circa maximum in ellipſibus, umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, quam fieri poteſt accuratiſſimis revolvantur; & radiis ad maximum illud

De Motu Corporum

ductis describant areas temporibus quam maxime proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accurate aut quamproxime, in ratione corporum; & contra. Patet per corol. prop. LXVIII. collatum cum hujus corol. 1.

Scholium.

His propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas, & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent. Rationi enim consentaneum est, ut vires, quæ ad corpora diriguntur, pendeant ab eorundem natura & quantitate, ut fit in magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ erunt corporum attractiones, assignando singulis eorum particulis vires proprias, & colligendo summas virium. Vocem attractionis hic generaliter usurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem: sive conatus iste fiat ab actione corporum, vel se mutuo petentium, vel per spiritus emissos se invicem agitantium; sive is ab actione ætheris, aut aëris, mediive cujuscunque seu corporei seu incorporei oriatur corpora innatantia in se invicem utcunque impellentis. Eodem sensu generali usurpo vocem impulsus, non species virium & qualitates physicas, sed quantitates & proportiones mathematicas in hoc tractatu expendens, ut in definitionibus explicui. In mathesi investigandæ sunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuscunque positis consequentur: deinde, ubi in physicam descenditur, conferendæ sunt hæ rationes cum phænomenis; ut innotescat quænam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium speciebus, causis & rationibus physicis tutius disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora sphærica, ex particulis modo jam exposito attractivis constantia, debeant in se mutuo agere; & quales motus inde consequantur.

SECTIO

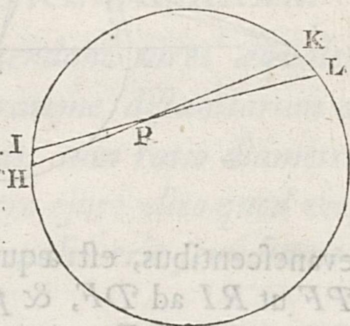
SECTIO XII.

De corporum sphæricorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXX. THEOREMA XXX.

Si ad sphæricæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur.

Sit *HIKL* superficies illa sphærica, & *P* corpusculum intus constitutum. Per *P* agantur ad hanc superficiem lineæ duæ *HK*, *IL*, arcus quam minimos *HI*, *KL* intercipientes; &, ob triangula *HPI*, *LPK* (per corol. 3. lem. VII.) similia, arcus illi erunt distantiis *HP*, *LP* proportionales; & superficiei sphæricæ particulæ quævis ad *HI* & *KL*, rectis per punctum *P* transeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicata illa ratione. Ergo vires harum particularum in corpus *P* exercitæ sunt inter se æquales. Sunt enim ut particulæ directe, & quadrata distantiarum inverse. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, se mutuo destruunt. Et simili argumento, attractiones omnes per totam sphæricam superficiem a contrariis attractionibus destruuntur. Proinde corpus *P* nullam in partem his attractionibus impellitur. *Q. E. D.*

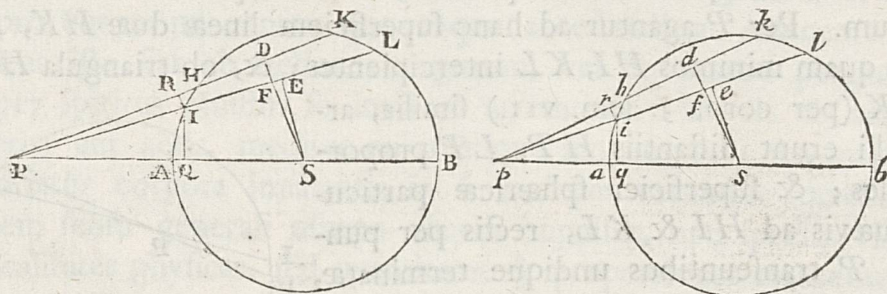


PROPOSITIO LXXI. THEOREMA XXXI.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra sphæricam superficiem constitutum attrahitur ad centrum sphæræ, vi reci-

proce proportionali quadrato distantiæ suæ ab eodem centro.

Sint *AHKB*, *ahkb* æquales duæ superficies sphæricæ, centris *S*, *s*, diametris *AB*, *ab* descriptæ, & *P*, *p* corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur a corpusculis lineæ *PHK*, *PIL*, *phk*, *pil*, auferentes a circulis maximis *AHB*, *ahb*, æquales arcus *HK*, *hk* & *IL*, *il*: Et ad eas demittantur perpendicula *SD*, *sd*; *SE*, *se*; *IR*, *ir*; quorum *SD*, *sd* secent *PL*, *pl* in *F* & *f*: Demittantur etiam ad diametros perpendicula *IQ*, *iq*. Evanescant anguli *DPE*, *dpe*: & ob æquales *DS* & *ds*, *ES* & *es*, lineæ *PE*, *PF* & *pe*, *pf* & lineola *DF*, *df* pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis *DPE*, *dpe* simul



evanescentibus, est æqualitatis. His itaque constitutis, erit *PI* ad *PF* ut *RI* ad *DF*, & *pf* ad *pi* ut *df* vel *DF* ad *ri*; & ex æquo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut *RI* ad *ri*, hoc est (per corol. 3. lem. VII.) ut arcus *IH* ad arcum *ih*. Rursus *PI* ad *PS* ut *IQ* ad *SE*, & *ps* ad *pi* ut *se* vel *SE* ad *iq*; & ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut *IQ* ad *iq*. Et conjunctis rationibus *PI quad.* $\times pf \times ps$ ad *pi quad.* $\times PF \times PS$, ut $IH \times IQ$ ad $ih \times iq$; hoc est, ut superficies circularis, quam arcus *IH* convolutione semicirculi *AKB* circa diametrum *AB* describet, ad superficiem circularem, quam arcus *ih* convolutione semicirculi *akb* circa diametrum *ab* describet. Et vires, quibus hæ superficies secundum lineas ad se tendentes attrahunt corpuscula *P* & *p*, sunt (per hypothesin) ut ipsæ superficies directe, & quadrata distantiarum superficierum a corporibus inverse, hoc est, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntque hæ vires ad ipsarum partes obliquas,

quas, quæ (facta per legum corol 2. resolutione virium) secundum lineas *PS*, *ps* ad centra tendunt, ut *PI* ad *PQ*, & *pi* ad *pq*; id est (ob similia triangula *PIQ* & *PSF*, *piq* & *psf*) ut *PS* ad *PF* & *ps* ad *pf*. Unde, ex æquo, fit attractio corpusculi hujus *P* versus *S* ad attractionem corpusculi *p* versus *s*, ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc est, ut *ps quad.* ad *PS quad.* Et simili argumento vires, quibus superficies convolutione arcuum *KL*, *kl* descriptæ trahunt corpuscula, erunt ut *ps quad.* ad *PS quad.* inque eadem ratione erunt vires superficierum omnium circularium in quas utraque superficies sphærica, capiendo semper *sd* æqualem *SD* & *se* æqualem *SE*, distingui potest. Et, per compositionem, vires totarum superficierum sphæricarum in corpuscula exercitæ erunt in eadem ratione. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXII. THEOREMA XXXII.

Si ad sphæræ cujusvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis; ac detur tum sphæræ densitas, tum ratio diametri sphæræ ad distantiam corpusculi a centro ejus: dico quod vis, qua corpusculum attrahitur, proportionalis erit semidiametro sphæræ.

Nam concipe corpuscula duo seorsim a sphæris duabus attrahi, unum ab una & alterum ab altera, & distantias eorum a sphærarum centris proportionales esse diametris sphærarum respective, sphæras autem resolvi in particulas similes & similiter positas ad corpuscula. Et attractiones corpusculi unius, factæ versus singulas particulas sphæræ unius, erunt ad attractiones alterius versus analogas totidem particulas sphæræ alterius, in ratione composita ex ratione particularum directe & ratione duplicata distantiarum inverse. Sed particulæ sunt ut sphæræ, hoc est, in ratione triplicata diametrorum, & distantiæ sunt ut diametri; & ratio prior directe una cum ratione posteriore bis inverse est ratio diametri ad diametrum. *Q. E. D.*

Corol.

Corol. 1. Hinc ſi corpuſcula in circulis, circa ſphæras ex materia æqualiter attractiva conſtantes, revolvantur; ſintque diſtantiæ a centris ſphærarum proportionales earundem diametris: Tempora periodica erunt æqualia.

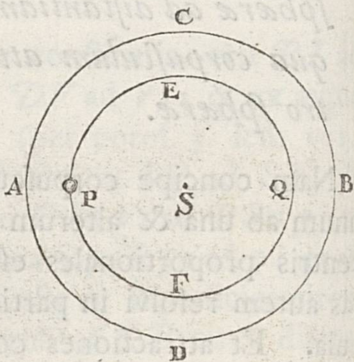
Corol. 2. Et vice verſa, ſi tempora periodica ſunt æqualia; diſtantiæ erunt proportionales diametris. Conſtant hæc duo per corol. 3. prop. IV.

Corol. 3. Si ad ſolidorum duorum quorumvis, ſimilium & æqualiter denſorum, puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis; vires, quibus corpuſcula, ad ſolida illa duo ſimiliter ſita, attrahentur ab iiſdem, erunt ad invicem ut diametri ſolidorum.

PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA XXXIII.

Si ad ſphæræ alicujus datæ puncta ſingula tendant æquales vires centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis: dico quod corpuſculum intra ſphæram conſtitutum attrahitur vi proportionali diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.

In ſphæra *ABCD*, centro *S* deſcripta, locetur corpuſculum *P*; & centro eodem *S*, intervallo *SP*, concipe ſphæram interiorem *PEQF* deſcribi. Manifeſtum eſt, (per prop. LXX.) quod ſphæricæ ſuperficies concentricæ, ex quibus ſphærarum differentia *AEBF* componitur, attractionibus ſuis per attractiones contrarias deſtructis, nil agunt in corpus *P*. Reſtat ſola attractio ſphæræ interioris *PEQF*. Et (per prop. LXXII.) hæc eſt ut diſtantia *PS*. *Q.E.D.*



Scholium.

Superficies, ex quibus ſolida componuntur, hic non ſunt pure mathematicæ, ſed orbes adeo tenues, ut eorum craſſitudo inſtar nihili

nihili sit; nimirum orbes evanescentes, ex quibus sphæra ultimo constat, ubi orbium illorum numerus augetur & crassitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, superficies, & solida componi dicuntur, intelligendæ sunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA XXXIV.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra sphæram constitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro.

Nam distinguatur sphæra in superficies sphæricas innumeras concentricas, & attractiones corpusculi a singulis superficiebus oriundæ erunt reciproce proportionales quadrato distantiæ corpusculi a centro (per prop. LXXI.) Et componendo fiet summa attractionum, hoc est attractio corpusculi in sphæram totam, in eadem ratione. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in æqualibus distantiis a centris homogenearum sphærarum attractiones sunt ut sphæræ. Nam (per prop. LXXII.) si distantiæ sunt proportionales diametris sphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur distantia major in illa ratione; &, distantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicata illa ratione; ideoque erit ad attractionem alteram in triplicata illa ratione, hoc est, in ratione sphærarum.

Corol. 2. In distantiis quibusvis attractiones sunt ut sphæræ applicatæ ad quadrata distantiarum.

Corol. 3. Si corpusculum, extra sphæram homogeneam positum, trahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro, constet autem sphæra ex particulis attractivis; decrescet vis particulæ cujusque in duplicata ratione distantiæ a particula.

PROPOSITIO LXXV. THEOREMA XXXV.

Si ad sphæræ datæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ, decrescentes in duplicata ratione distantiarum a

punctis; dico quod sphæra quævis alia similaris ab eadem attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ centrorum.

Nam particulæ cujusvis attractio est reciproce ut quadratum distantiæ suæ a centro sphæræ trahentis, (per prop. LXXIV.) & propterea eadem est, ac si vis tota attrahens manaret de corpusculo unico sito in centro hujus sphæræ. Hæc autem attractio tanta est, quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem, si modo illud a singulis sphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur, qua ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio (per prop. LXXIV.) reciproce proportionalis quadrato distantiæ suæ a centro sphæræ; ideoque huic æqualis attractio sphæræ est in eadem ratione. *Q.E.D.*

Corol. 1. Attractiones sphærarum, versus alias sphæras homogeneas, sunt ut sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum centrorum suorum a centris earum, quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet, ubi sphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta singula trahent singula alterius eadem vi, qua ab ipsis vicissim trahuntur; ideoque cum in omni attractione urgeatur (per legem 3.) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conservatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicum conicarum sectionum demonstrata sunt, obtinent, ubi sphæra attrahens locatur in umbilico, & corpora moventur extra sphæram.

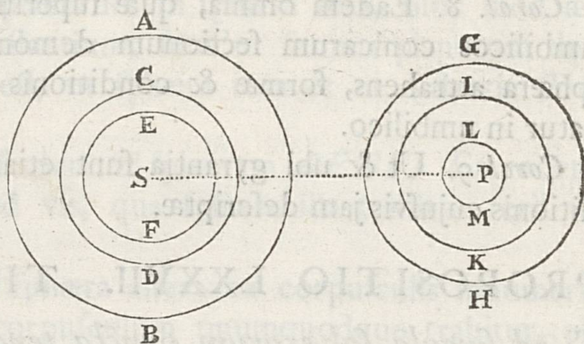
Corol. 4. Ea vero, quæ de motu corporum circa centrum conicarum sectionum demonstrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra sphæram.

PROPOSITIO LXXVI. THEOREMA XXXVI.

Si sphæræ in progressu a centro ad circumferentiam (quoad materiæ densitatem & vim attractivam) utcunque dissimilares, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sunt undique similares; & vis attractiva puncti cujusque decrescit in duplicata ratione distantiæ corporis

poris attracti: dico quod vis tota, qua hujusmodi sphæra una attrahit aliam, sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ centrorum. Liber Primus.

Sunto sphæræ quotcunque concentricæ similares *AB*, *CD*, *EF*, &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam densiorem versus centrum, vel subductæ relinquant tenuiorem; & hæ (per prop. LXXV.) trahent sphæras alias quotcunque concentricas similares *GH*, *IK*, *LM*, &c. singulæ singulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato distantiæ *SP*. Et componendo vel dividendo, summa virium illarum omnium, vel excessus aliquarum supra alias; hoc est, vis, qua sphæra tota, ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis composita *AB*, trahit totam ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis compositam *GH*; erit in eadem ratione. Augeatur numerus sphærarum concentricarum in infinitum sic, ut materiæ densitas una cum vi attractiva, in progressu a circumferentia ad centrum, secundum legem quamcunque crescat vel decrescat; &, addita materia non attractiva, compleatur ubivis densitas deficiens, eo ut sphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis, qua harum una attrahet alteram, erit etiamnum, per argumentum superius, in eadem illa distantiæ quadratæ ratione inversa. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc si ejusmodi sphæræ complures, sibi invicem per omnia similes, se mutuo trahant; attractiones acceleratrices singularum in singulas erunt, in æqualibus quibusvis centrorum distantiis, ut sphæræ attrahentes.

Corol. 2. Inque distantiis quibusvis inæqualibus, ut sphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata distantiarum inter centra.

Corol. 3. Attractiones vero motrices, seu pondera sphærarum in sphæras erunt, in æqualibus centrorum distantiis, ut sphæræ attra-

 hentes

De Motu Corporum

hentes & attractæ conjunctim, id est, ut contenta sub sphæris per multiplicationem producta.

Corol. 4. Inque distantiis inæqualibus, ut contenta illa directe & quadrata distantiarum inter centra inverse.

Corol. 5. Eadem valent, ubi attractio oritur a sphæræ utriusque virtute attractiva mutuo exercita in sphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione servata.

Corol. 6. Si hujusmodi sphæræ aliquæ circa alias quiescentes revolvantur, singulæ circa singulas; sintque distantiæ inter centra revolventium & quiescentium proportionales quiescentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

Corol. 7. Et vicissim, si tempora periodica sunt æqualia; distantiæ erunt proportionales diametris.

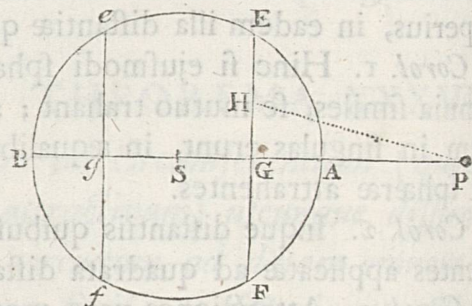
Corol. 8. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicos conicarum sectionum demonstrata sunt, obtinent; ubi sphæra attrahens, formæ & conditionis cujusvis jam descriptæ, locatur in umbilico.

Corol. 9. Ut & ubi gyrantia sunt etiam sphæræ attrahentes, conditionis cujusvis jam descriptæ.

PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA XXXVII.

Si ad singula sphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales distantiis punctorum a corporibus attractis: dico quod vis composita, qua sphæræ duæ se mutuo trahent, est ut distantia inter centra sphærarum.

Cas. 1. Sit $AEBF$ sphæra; S centrum ejus; P corpusculum attractum, $PASB$ axis sphæræ per centrum corpusculi transiens; EF, ef plana duo, quibus sphæra secatur, huic axi perpendicularia, & hinc inde æqualiter distantia a centro sphæræ; G, g intersectiones planorum & axis; & H punctum quodvis in plano EF. Puncti H vis centripeta in corpusculum P, secundum lineam PH exercita, est



est ut distantia PH; & (per legum corol. 2.) secundum lineam PG, seu versus centrum S, ut longitudo PG. Igitur punctorum omnium in plano EF, hoc est plani totius vis, qua corpusculum P trahitur versus centrum S, est ut distantia PG multiplicata per numerum punctorum, id est, ut solidum quod continetur sub plano ipso EF & distantia illa PG. Et similiter vis plani ef, qua corpusculum P trahitur versus centrum S, est ut planum illud ductum in distantiam suam Pg, sive ut huic æquale planum EF ductum in distantiam illam Pg; & summa virium plani utriusque ut planum EF ductum in summam distantiarum $PG+Pg$, id est, ut planum illud ductum in duplam centri & corpusculi distantiam PS, hoc est, ut duplum planum EF ductum in distantiam PS, vel ut summa æqualium planorum $EF+ef$ ducta in distantiam eandem. Et simili argumento, vires omnium planorum in sphæra tota, hinc inde æqualiter a centro sphæræ distantium, sunt ut summa planorum ducta in distantiam PS, hoc est, ut sphæra tota & ut distantia PS conjunctim. *Q. E. D.*

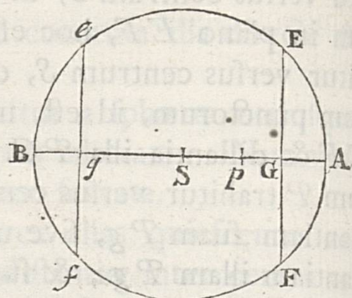
Cas. 2. Trahat jam corpusculum P sphæram $AEBF$. Et eodem argumento probabitur quod vis, qua sphæra illa trahitur, erit ut distantia PS. *Q. E. D.*

Cas. 3. Componatur jam sphæra altera ex corpusculis innumeris P; & quoniam vis, qua corpusculum unumquodque trahitur, est ut distantia corpusculi a centro sphæræ primæ & ut sphæra eadem conjunctim, atque ideo eadem est, ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro sphæræ; vis tota, qua corpuscula omnia in sphæra secunda trahuntur, hoc est, qua sphæra illa tota trahitur, eadem erit, ac si sphæra illa traheretur vi prodeunte de corpusculo unico in centro sphæræ primæ, & propterea proportionalis est distantiæ inter centra sphærarum. *Q. E. D.*

Cas. 4. Trahant sphæræ se mutuo, & vis geminata proportionem priorem servabit. *Q. E. D.*

Cas. 5. Locetur jam corpusculum p intra sphæram $AEBF$; & quoniam vis plani ef in corpusculum est ut solidum contentum sub plano illo & distantia pg; & vis contraria plani EF ut solidum contentum sub plano illo & distantia pG; erit vis ex utraque composita ut differentia solidorum, hoc est, ut summa æqualium planorum ducta in semissem differentiæ distantiarum, id est,

ut summa illa ducta in pS distantiam corpusculi a centro sphæræ. Et simili argumento, attractio planorum omnium EF, ef in sphæra tota, hoc est, attractio sphæræ totius, est conjunctim ut summa planorum omnium, seu sphæra tota, & ut pS distantia corpusculi a centro sphæræ. *Q. E. D.*



Cas. 6. Et si ex corpusculis innumeris p componatur sphæra nova, intra sphæram priorem $AEBF$ sita; probabitur ut prius quod attractio, sive simplex sphæræ unius in alteram, sive mutua utriusque in se invicem, erit ut distantia centrorum pS. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXVIII. THEOREMA XXXVIII.

Si sphæræ in progressu a centro ad circumferentiam sint utcunque dissimilares & inæquabiles in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sint undique similares; & vis attractiva puncti cujusque sit ut distantia corporis attracti: dico quod vis tota qua hujusmodi sphæræ duæ se mutuo trahunt sit proportionalis distantiæ inter centra sphærarum.

Demonstratur ex propositione præcedente eodem modo, quo propositio LXXVI. ex propositione LXXV. demonstrata fuit.

Corol. Quæ superius in propositionibus X. & LXIV. de motu corporum circa centra conicarum sectionum demonstrata sunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi corporum sphæricorum conditionis jam descriptæ, & attracta corpora sunt sphæræ conditionis ejusdem.

Scholium.

Attractionum casus duos insigniores jam dedi expositos; nimirum ubi vires centripetæ decrescunt in duplicata distantiarum ratione, vel crescunt in distantiarum ratione simplici; efficientes in utroque casu ut corpora gyrentur in conicis sectionibus, & componentes corporum sphæricorum vires centripetas eadem lege, in

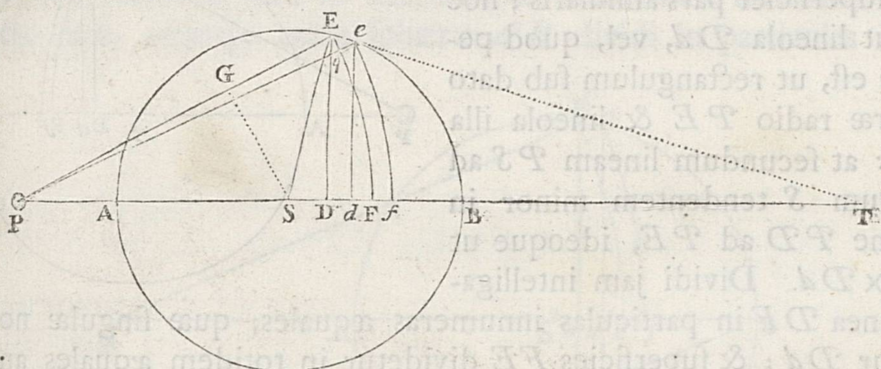
recessu

recessu a centro, decrescentes vel crescentes cum seipsis: Quod est notatu dignum. Casus cæteros, qui conclusiones minus elegantes exhibent, sigillatim percurrere longum esset. Malim cunctos methodo generali simul comprehendere ac determinare, ut sequitur.

LEMMA XXIX.

Si describantur centro S *circulus quilibet* AEB, *&* *centro* P *circuli duo* EF, ef, *secantes priorem in* E, e, *lineamque* PS *in* F, f; *&* *ad* PS *demittantur perpendicula* ED, ed: *dico quod, si distantia arcuum* EF, ef *in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evanescentis* Dd *ad lineam evanescentem* Ff *ea sit, quæ lineæ* PE *ad lineam* PS.

Nam si linea *Pe* secet arcum *EF* in *q*; & recta *Ee*, quæ cum arcu evanescente *Ee* coincidit, producta occurrat rectæ *PS* in *T*; & ab *S* demittatur in *PE* normalis *SG*: ob similia triangula *DTE*, *dTe*, *DES*; erit *Dd* ad *Ee*, ut *DT* ad *TE*, seu *DE* ad *ES*;



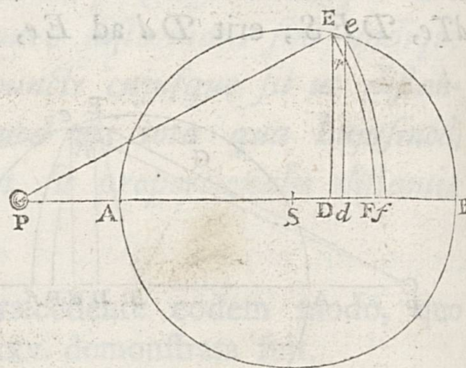
& ob triangula *Eeq*, *ESG* (per lem. VIII. & corol 3. lem. VII.) similia, erit *Ee* ad *eq* seu *Ff* ut *ES* ad *SG*; & ex æquo, *Dd* ad *Ff* ut *DE* ad *SG*; hoc est (ob similia triangula *PDE*, *PGS*) ut *PE* ad *PS*. *Q.E.D.*

PROPO-

PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA XXXIX.

Si superficies ob latitudinem infinite diminutam jamjam evanescens E F f e, *convolutione sui circa axem* P S, *describat solidum sphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod vis, qua solidum illud trahit corpusculum situm in* P, *est in ratione composita ex ratione solidi* $DEq \times Ff$, *&* *ratione vis qua particula data in loco* F f *traheret idem corpusculum.*

Nam si primo consideremus vim superficiei sphæricæ FE, quæ convolutione arcus FE generatur, & a linea de ubivis secatur in r; erit superficiei pars annularis, convolutione arcus rE genita, ut lineola Dd, manente sphæræ radio PE (uti demonstravit *Archimedes* in lib. de *Sphæra* & *Cylindro*.) Et hujus vis, secundum lineas PE vel Pr undique in superficie conica sitas exercita, ut hæc ipsa superficiei pars annularis; hoc est, ut lineola Dd, vel, quod perinde est, ut rectangulum sub dato sphæræ radio PE & lineola illa Dd: at secundum lineam PS ad centrum S tendentem minor in ratione PD ad PE, ideoque ut $PD \times Dd$. Dividi jam intelligatur linea DF in particulas innumeras æquales, quæ singulæ nominentur Dd; & superficies FE dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut summa omnium $PD \times Dd$, hoc est, ut $\frac{1}{2}PFq - \frac{1}{2}PDq$, ideoque ut $DE\,quad$. Ducatur jam superficies FE in altitudinem Ff; & fiet solidi $EFfe$ vis exercita in corpusculum P ut $DEq \times Ff$: puta si detur vis quam particula aliqua data Ff in distantia PF exercet in corpusculum P. At si vis illa non detur, fiet vis solidi $EFfe$ ut solidum $DEq \times Ff$ & vis illa non data conjunctim. *Q. E. D.*



PROPO-

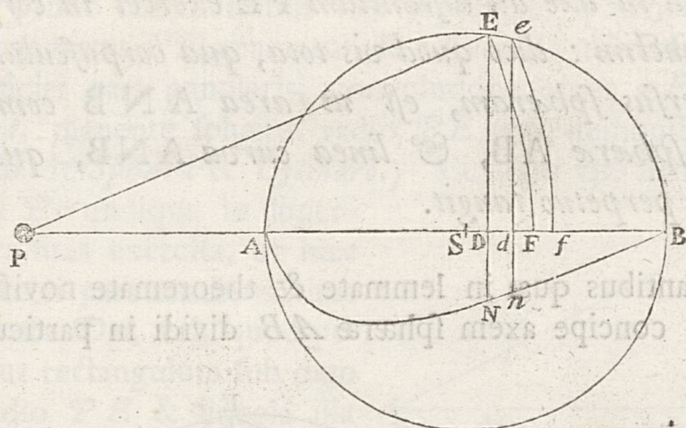
PROPOSITIO LXXX. THEOREMA XL.

Si ad ſphæræ alicujus ABE, *centro* S *deſcriptæ, particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad ſphæræ axem* AB, *in quo corpuſculum aliquod* P *locatur, erigantur de punctis ſingulis* D *perpendicula* DE, *ſphæræ occurrentia in* E, *& in ipſis capiantur longitudines* DN, *quæ ſint ut quantitas* $\frac{DEq \times PS}{PE}$ *& vis, quam ſphæræ particula ſita in axe ad diſtantiam* PE *exercet in corpuſculum* P, *conjunctim : dico quod vis tota, qua corpuſculum* P *trahitur verſus ſphæram, eſt ut area* ANB *comprehenſa ſub axe ſphæræ* AB, *& linea curva* ANB, *quam punctum* N *perpetuo tangit.*

Etenim ſtantibus quæ in lemmate & theoremate noviſſimo conſtructa ſunt, concipe axem ſphæræ *AB* dividi in particulas innumeras æquales *Dd*, & ſphæram totam dividi in totidem laminas ſphæricas concavo-convexas *EFfe* ; & erigatur perpendiculum *dn*. Per theorema ſuperius vis, qua lamina *EFfe* trahit corpuſculum *P*, eſt ut *DEq* × *Ff* & vis particulæ unius ad diſtantiam *PE* vel *PF*

D d

exercita conjunctim. Est autem (per lemma novissimum) Dd ad Ff ut PE ad PS, & inde Ff æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & $DEq \times Ff$ æquale Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$, & propterea vis laminæ $EFfe$ est ut Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad distantiam PF exercita conjunctim, hoc est (ex hypothesi) ut $DN \times Dd$, seu area evanescens $DNnd$. Sunt igitur laminarum omnium vires, in corpus P exercitæ, ut areæ omnes $DNnd$, hoc est, sphæræ vis tota ut area tota ANB. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc si vis centripeta, ad particulas singulas tendens, eadem semper maneat in omnibus distantiis, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE}$; erit vis tota, qua corpusculum a sphæra attrahitur, ut area ANB.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta sit reciproce ut distantia corpusculi a se attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEq}$; erit vis, qua corpusculum P a sphæra tota attrahitur, ut area ANB.

Corol. 3. Si particularum vis centripeta sit reciproce ut cubus distantiæ corpusculi a se attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEqq}$; erit vis, qua corpusculum a tota sphæra attrahitur, ut area ANB.

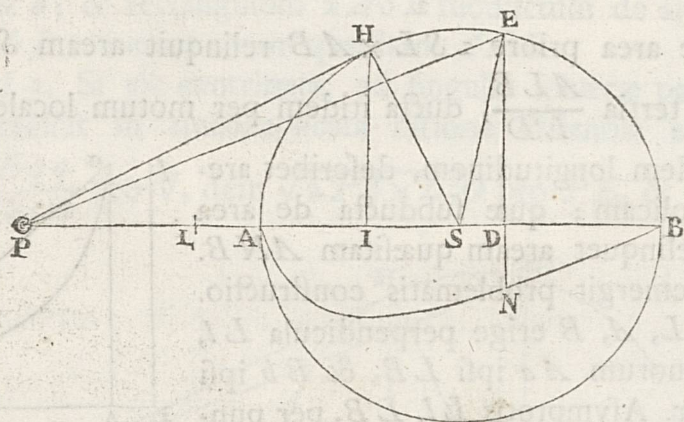
Corol.

Corol. 4. Et universaliter si vis centripeta ad singulas sphæræ particulas tendens ponatur esse reciproce ut quantitas V, fiat autem DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$; erit vis, qua corpusculum a sphæra tota attrahitur, ut area ANB.

PROPOSITIO LXXXI. PROBLEMA XLI.

Stantibus jam positis, mensuranda est area ANB.

A puncto P ducatur recta PH sphæram tangens in H, & ad axem PAB demissa normali HI, bisecetur PI in L; & erit (per prop. XII. lib. 2. elem.) PEq æquale $PSq + SEq + 2PSD$. Est autem SEq seu SHq (ob similitudinem triangulorum SPH, SHI) æquale rectangulo PSI. Ergo PEq æquale est contento sub PS & $PS + SI + 2SD$, hoc est, sub PS & $2LS + 2SD$, id est, sub PS & $2LD$. Porro DE *quad.* æquale est $SEq - SDq$, seu $SEq -$

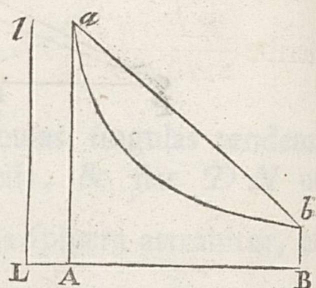


$LSq + 2SLD - LDq$, id est, $2SLD - LDq - ALB$. Nam $LSq - SEq$ seu $LSq - SAq$ (per prop. VI. lib. 2. elem.) æquatur rectangulo ALB. Scribatur itaque $2SLD - LDq - ALB$ pro DEq; & quantitas $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$, quæ secundum corollarium quartum propositionis præcedentis est ut longitudo ordinatim applicatæ DN, resolvet sese in tres partes $\frac{2SLD \times PS}{PE \times V} -$

 LDq

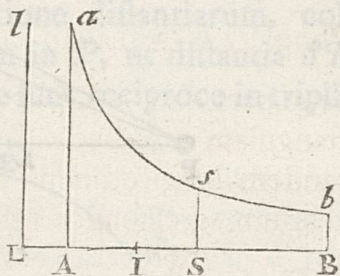
$\frac{LDq \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: ubi si pro V scribatur ratio inversa vis centripetæ, & pro PE medium proportionale inter PS & $2LD$; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, quarum areæ per methodos vulgatas innotescunt. *Q. E. F.*

Exempl. 1. Si vis centripeta ad singulas sphæræ particulas tendens sit reciproce ut distantia; pro V scribe distantiam PE; dein $2PS \times LD$ pro PEq, & fiet DN ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2LD}$. Pone DN æqualem ejus duplo $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data $2SL$ ducta in longitudinem AB describet aream rectangulam $2SL \times AB$; & pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, ea lege ut inter movendum crescendo vel decrescendo æquetur semper longitudini LD, describet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$, id est, aream $SL \times AB$; quæ subducta de area priore $2SL \times AB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$, ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, describet aream hyperbolicam; quæ subducta de area $SL \times AB$ relinquet aream quæsitam ANB. Unde talis emergit problematis constructio. Ad puncta L, A, B erige perpendicula Ll, Aa, Bb, quorum Aa ipsi LB, & Bb ipsi LA æquetur. Asymptotis Ll, LB, per puncta $a\ b$ describatur hyperbola ab. Et acta chorda ba claudet aream aba areæ quæsitæ ANB æqualem.

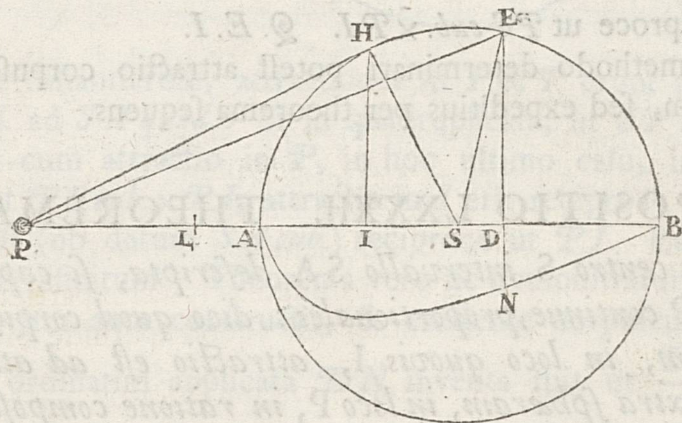


Exempl. 2. Si vis centripeta ad singulas sphæræ particulas tendens sit reciproce ut cubus distantiæ, vel (quod perinde est) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; scribe $\frac{PE\,cub.}{2ASq}$ pro V, dein $2PS \times LD$ pro PEq; & fiet DN ut $\frac{SL \times ASq}{PS \times LD} - \frac{ASq}{2PS} - \frac{ALB}{}$

$-\frac{ALB \times ASq}{2PS \times LDq}$, id est (ob continue proportionales PS, AS, SI) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2LDq}$. Si ducantur hujus partes tres in longitudinem AB, prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream hyperbolicam; secunda $\frac{1}{2}SI$ aream $\frac{1}{2}AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2LDq}$ aream $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, id est $\frac{1}{2}AB \times SI$. De prima subducatur summa secundæ & tertiæ, & manebit area quæsita ANB. Unde talis emergit problematis constructio. Ad puncta L, A, S, B erige perpendicula Ll, Aa, Ss, Bb, quorum Ss ipsi SI æquetur, perque punctum s asymptotis Ll, LB describatur hyperbola asb occurrens perpendiculis Aa, Bb in a & b; & rectangulum $2ASI$ subductum de area hyperbolica $AasbB$ relinquet aream quæsitam ANB.



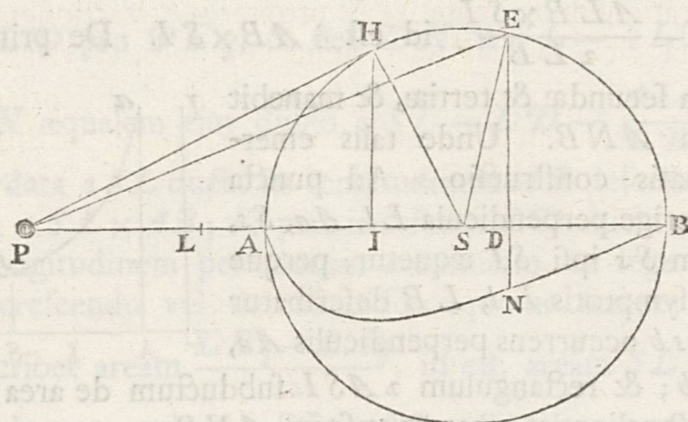
Exempl. 3. Si vis centripeta, ad singulas sphæræ particulas tendens, decrescit in quadruplicata ratione distantiæ a particulis; scribe $\frac{PEqq}{2AS\,cub.}$ pro V, dein $\sqrt{2PS \times LD}$ pro PE, & fiet DN ut



$$\frac{SIq \times SL}{\sqrt{2}SI} \times \frac{1}{\sqrt{LDc}} - \frac{SIq}{2\sqrt{2}SI} \times \frac{1}{\sqrt{LD}} - \frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2}SI} \times \frac{1}{\sqrt{LDqc}}.$$

Cujus

Cujus tres partes ductæ in longitudinem *AB*, producunt areas totidem, *viz.* $\frac{2SIq \times SL}{\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$; $\frac{SIq}{\sqrt{2SI}}$ in $\sqrt{LB} - \sqrt{LA}$; & $\frac{SIq \times ALB}{3\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA\,cub.}} - \frac{1}{\sqrt{LB\,cub.}}$. Et hæ post debitam reductionem fiunt $\frac{2SIq \times SL}{LI}$, SIq, & $SIq + \frac{2SI\,cub.}{3LI}$. Hæ vero,



subductis posterioribus de priore, evadunt $\frac{4SI\,cub.}{3LI}$. Proinde vis tota, qua corpusculum *P* in sphæræ centrum trahitur, est ut $\frac{SI\,cub.}{PI}$, id est, reciproce ut $PS\,cub. \times PI$. *Q.E.I.*

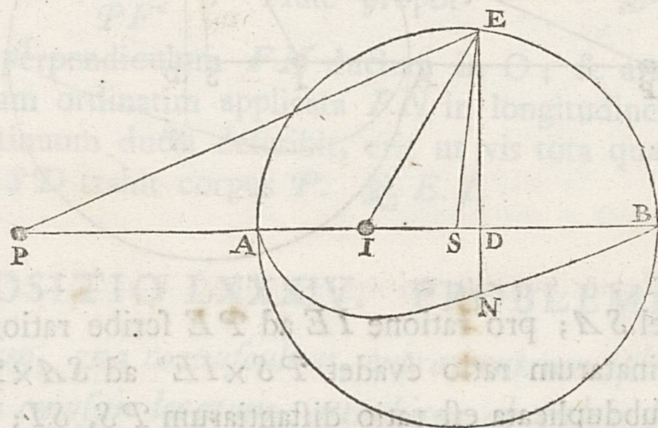
Eadem methodo determinari potest attractio corpusculi siti intra sphæram, sed expeditius per theorema sequens.

PROPOSITIO LXXXII. THEOREMA XLI.

In sphæra centro S *intervallo* SA *descripta, si capiantur* SI, SA, SP *continue proportionales: dico quod corpusculi intra sphæram, in loco quovis* I, *attractio est ad attractionem ipsius extra sphæram, in loco* P, *in ratione composita ex subduplicata ratione distantiarum a centro* IS, PS, *&* *subduplicata ratione virium centripetarum, in locis illis* P *&* I, *ad centrum tendentium.*

Ut,

Ut, si vires centripetæ particularum sphæræ sint reciproce ut distantiæ corpusculi a se attracti; vis, qua corpusculum situm in I trahitur a sphæra tota, erit ad vim, qua trahitur in P, in ratione composita ex subduplicata ratione distantiæ SI ad distantiam SP, & ratione subduplicata vis centripetæ in loco I, a particula aliqua in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco P ab eadem in centro particula oriundam, id est, ratione subduplicata distantiarum SI, SP ad invicem reciproce. Hæ duæ rationes subduplicatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in I & P a sphæra tota factæ æquantur. Simili computo, si vires particularum sphæræ sunt reciproce in duplicata ratione distantiarum, colligetur quod attractio in I sit ad attractionem in P, ut distantia SP ad sphæræ semidiametrum SA: Si vires illæ sunt reciproce in tripli-



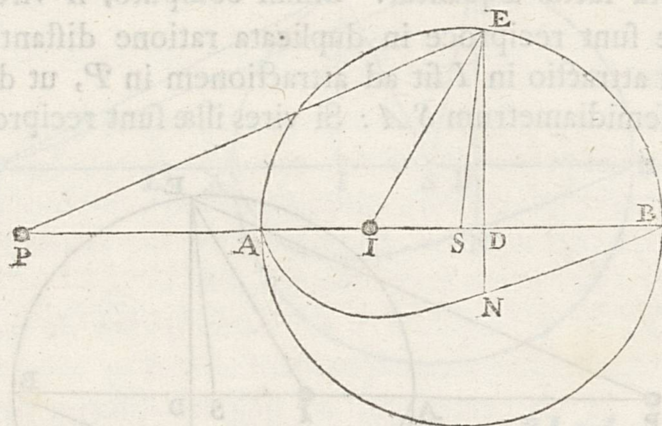
cata ratione distantiarum, attractiones in I & P erunt ad invicem ut SP *quad.* ad SA *quad.*: Si in quadruplicata, ut SP *cub.* ad SA *cub.* Unde cum attractio in P, in hoc ultimo casu, inventa fuit reciproce ut PS *cub.* $\times PI$, attractio in I erit reciproce ut SA *cub.* $\times PI$, id est (ob datum SA *cub.*) reciproce ut PI. Et similis est progressus in infinitum. Theorema vero sic demonstratur.

Stantibus jam ante constructis, & existente corpusculo in loco quovis P, ordinatim applicata DN inventa fuit ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$. Ergo si agatur IE, ordinata illa pro alio quovis corpusculi loco I, mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq \times IS}{IE \times V}$. Pone vires centripetas, e

sphæræ

De Motu Corporum

ſphæræ puncto quovis E manantes, eſſe ad invicem in diſtantiis IE, PE, ut PE^n ad IE^n (ubi numerus n deſignet indicem poteſtatum PE & IE) & ordinatæ illæ fient ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times PE^n}$ & $\frac{DEq \times IS}{IE \times IE^n}$, quarum ratio ad invicem eſt ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob continue proportionales SI, SE, SP, ſimilia ſunt triangula SPE, SEI, & inde fit IE ad PE ut



IS ad SE vel SA; pro ratione IE ad PE ſcribe rationem IS ad SA; & ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. Sed PS ad SA ſubduplicata eſt ratio diſtantiarum PS, SI; & IE^n ad PE^n (ob proportionales IE ad PE ut IS ad SA) ſubduplicata eſt ratio virium in diſtantiis PS, IS. Ergo ordinatæ, & propterea areæ quas ordinatæ deſcribunt, hiſque proportionales attractiones, ſunt in ratione compoſita ex ſubduplicatis illis rationibus. *Q.E.D.*

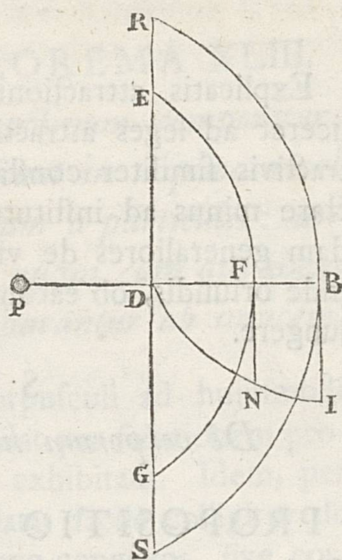
PROPOSITIO LXXXIII. PROBLEMA XLII.

Invenire vim qua corpuſculum in centro ſphæræ locatum ad ejus ſegmentum quodcunque attrahitur.

Sit P corpus in centro ſphæræ, & $RBSD$ ſegmentum ejus plano RDS & ſuperficie ſphærica RBS contentum. Superficie ſphærica EFG centro P deſcripta ſecetur DB in F, ac diſtin-

guatur

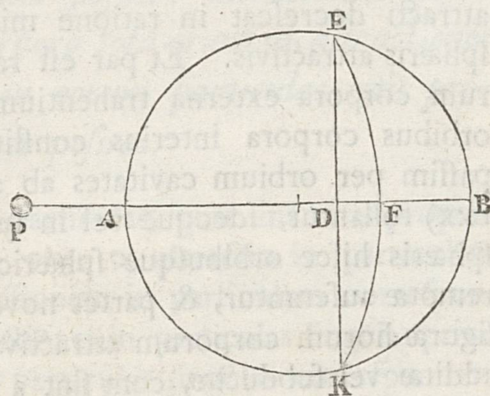
guatur ſegmentum in partes *BREFGS*, *FEDG*. Sit autem ſuperficies illa non pure mathematica, ſed phyſica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur iſta profunditas O, & erit hæc ſuperficies (per demonſtrata *Archimedis*) ut $PF \times DF \times O$. Ponamus præterea vires attractivas particularum ſphæræ eſſe reciproce ut diſtantiarum dignitas illa, cujus index eſt n; & vis, qua ſuperficies *EFG* trahit corpus *P*, erit (per prop. LXXIX.) ut $\frac{DEq \times O}{PF^n}$, id eſt, ut $\frac{2DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DFq \times O}{PF^n}$. Huic proportionale ſit perpendiculum *FN* ductum in O; & area curvilinea *BDI*, quam ordinatim applicata *FN* in longitudinem *DB* per motum continuum ducta deſcribit, erit ut vis tota qua ſegmentum totum *RBSD* trahit corpus *P*. *Q. E. I.*



PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA XLIII.

Invenire vim, qua corpuſculum, extra centrum ſphæræ in axe ſegmenti cujuſvis locatum, attrahitur ab eodem ſegmento.

A ſegmento *EBK* trahatur corpus *P* in ejus axe *ADB* locatum. Centro *P* intervallo *PE* deſcribatur ſuperficies ſphærica *EFK*, qua diſtinguatur ſegmentum in partes duas *EBKFE* & *EFKDE*. Quæratur vis partis prioris per prop. LXXXI. & vis partis poſterioris per prop. LXXXIII; & ſumma virium erit vis ſegmenti totius *EBKDE*. *Q. E. I.*



Scholium.

Explicatis attractionibus corporum sphæricorum, jam pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis similiter constantium corporum; sed ista particulatim tractare minus ad institutum spectat. Suffecerit propositiones quasdam generaliores de viribus hujusmodi corporum, deque motibus inde oriundis, ob earum in rebus philosophicis aliqualem usum, subjungere.

SECTIO XIII.

De corporum non sphæricorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longe fortior sit, quam cum vel minimo intervallo separantur ab invicem: vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicata distantiarum a particulis.

Nam si vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum a particulis; attractio versus corpus sphæricum, propterea quod (per prop. LXXIV.) sit reciproce ut quadratum distantiæ attracti corporis a centro sphæræ, haud sensibiliter augebitur ex contactu; atque adhuc minus augebitur ex contactu, si attractio in recessu corporis attracti decrescat in ratione minore. Patet igitur propositio de sphæris attractivis. Et par est ratio orbium sphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res constat in orbibus corpora interius constituta trahentibus, cum attractiones passim per orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per prop. LXX) tollantur, ideoque vel in ipso contactu nullæ sunt. Quod si sphæris hisce orbibusque sphæricis partes quælibet a loco contactus remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari possunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel subductæ, cum sint a loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis excessum, qui ex contactu oritur. Constat igitur propositio de corporibus figurarum omnium. *Q. E. D.*

PROPO-

PROPOSITIO LXXXVI. THEOREMA XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in recessu corporis attracti decrescunt in triplicata vel plusquam triplicata ratione distantiarum a particulis: attractio longe fortior erit in contactu, quam cum attrahens & attractum intervallo vel minimo separantur ab invicem.

Nam attractionem in accessu attracti corpusculi ad hujusmodi sphæram trahentem augeri in infinitum, constat per solutionem problematis XLI. in exemplo secundo ac tertio exhibitam. Idem, per exempla illa & theorema XLI. inter se collata, facile colligitur de attractionibus corporum versus orbes concavo-convexos, sive corpora attracta collocentur extra orbes, sive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his sphæris & orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eo ut corpora attractiva induant figuram quamvis assignatam, constabit propositio de corporibus universis. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXXVII. THEOREMA XLIV.

Si corpora duo sibi invicem similia, & ex materia æqualiter attractiva constantia, seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis proportionalia & ad se similiter posita: attractiones acceleratrices corpusculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpusculorum in eorum particulas totis proportionales, & in totis similiter positas.

Nam si corpora distinguantur in particulas, quæ sint totis proportionales, & in totis similiter sitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correspondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas singulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas singulas correspondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus ad attractionem in totum secundum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo si vires attractivæ particularum, augendo distantias corpusculorum attractorum, decrescant in ratione dignitatis cujusvis distantiarum; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directe, & distantiarum dignitates illæ inverse. Ut si vires particularum decrescant in ratione duplicata distantiarum a corpusculis attractis, corpora autem sint ut *A cub.* & *B cub.* ideoque tum corporum latera cubica, tum corpusculorum attractorum distantiæ a corporibus, ut *A* & *B*: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A\,cub.}{A\,quad.}$ & $\frac{B\,cub.}{B\,quad.}$, id est, ut corporum latera illa cubica *A* & *B*. Si vires particularum decrescant in ratione triplicata distantiarum a corpusculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A\,cub.}{A\,cub.}$ & $\frac{B\,cub.}{B\,cub.}$, id est, æquales. Si vires decrescant in ratione quadruplicata; attractiones in corpora erunt ut $\frac{A\,cub.}{Aqq.}$ & $\frac{B\,cub.}{Bqq.}$, id est, reciproce ut latera cubica *A* & *B*. Et sic in cæteris.

Corol. 2. Unde vicissim, ex viribus, quibus corpora similia trahunt corpuscula ad se similiter posita, colligi potest ratio decrementi virium particularum attractivarum in recessu corpusculi attracti; si modo decrementum illud sit directe vel inverse in ratione aliqua distantiarum.

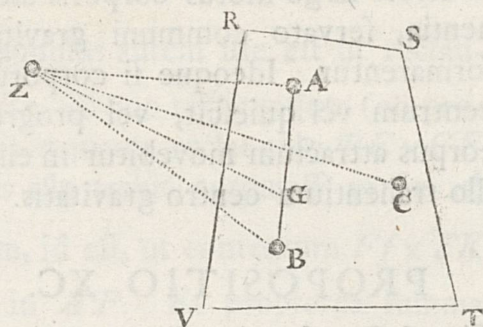
PROPOSITIO LXXXVIII. THEOREMA XLV.

Si particularum æqualium corporis cujuscunque vires attractivæ sint ut distantiæ locorum a particulis: vis corporis totius tendet ad ipsius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi globi ex materia consimili & æquali constantis, & centrum habentis in ejus centro gravitatis.

Corporis *RSTV* particulæ *A*, *B* trahant corpusculum aliquod *Z* viribus, quæ, si particulæ æquantur inter se, sint ut distantiæ *AZ*, *BZ*; sin particulæ statuantur inæquales, sint ut hæ particulæ & ipsarum distantiæ *AZ*, *BZ* conjunctim, sive (si ita loquar) ut hæ particulæ in distantias suas *AZ*, *BZ* respective ductæ. Et exponantur

hæ

hæ vires per contenta illa $A \times AZ$ & $B \times BZ$. Jungatur AB, & secetur ea in G ut sit AG ad BG ut particula B ad particulam A; & erit G commune centrum gravitatis particularum A & B. Vis $A \times AZ$ (per legum corol. 2) resolvitur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$ & vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$ & $B \times BG$, ob proportionales A ad B & BG ad AG, æquantur; ideoque cum dirigantur in partes contrarias, se mutuo destruunt. Restant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab Z versus centrum G, & vim $\overline{A+B} \times GZ$ componunt; hoc est, vim eandem ac si particulæ attractivæ A & B consisterent in eorum communi gravitatis centro G, globum ibi componentes.



Eodem argumento, si adjungatur particula tertia C, & componatur hujus vis cum vi $\overline{A+B} \times GZ$ tendente ad centrum G; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius in G & particulæ C; hoc est, ad commune centrum gravitatis trium particularum A, B, C; & eadem erit, ac si globus & particula C consisterent in centro illo communi, globum majorem ibi componentes. Et sic pergitur in infinitum. Eadem est igitur vis tota particularum omnium corporis cujuscunque $RSTV$, ac si corpus illud, servato gravitatis centro, figuram globi indueret. *Q. E. D.*

Corol. Hinc motus corporis attracti Z idem erit, ac si corpus attrahens $RSTV$ esset sphæricum: & propterea si corpus illud attrahens vel quiescat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum movebitur in ellipsi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

PROPOSITIO LXXXIX. THEOREMA XLVI.

Si corpora sint plura ex particulis æqualibus constantia, quarum vires sunt ut distantiæ locorum a singulis: vis ex omnium viribus composita, qua corpusculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis; & eadem

dem erit, ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.

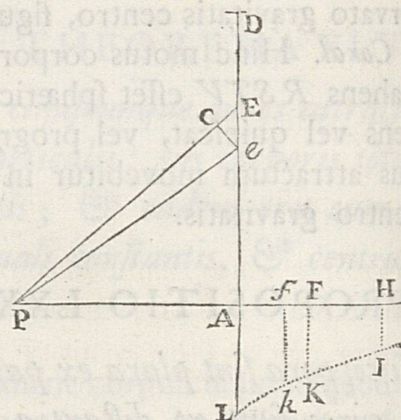
Demonstratur eodem modo, atque propositio superior.

Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit, ac si corpora trahentia, servato communi gravitatis centro, coirent & in globum formarentur. Ideoque si corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quiescit, vel progreditur uniformiter in linea recta; corpus attractum movebitur in ellipsi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

PROPOSITIO XC. PROBLEMA XLIV.

Si ad singula circuli cujuscunque puncta tendant vires æquales centripetæ, crescentes vel decrescentes in quacunque distantiarum ratione: invenire vim, qua corpusculum attrahitur ubivis positum in recta, quæ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter insistit.

Centro *A* intervallo quovis *AD*, in plano, cui recta *AP* perpendicularis est, describi intelligatur circulus; & invenienda sit vis, qua corpusculum quodvis *P* in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis *E* ad corpusculum attractum *P* agatur recta *PE*. In recta *PA* capiatur *PF* ipsi *PE* æqualis, & erigatur normalis *FK*, quæ sit ut vis qua punctum *E* trahit corpusculum *P*. Sitque *IKL* curva linea quam punctum *K* perpetuo tangit. Occurrat eadem circuli plano in *L*. In *PA* capiatur *PH* æqualis *PD*, & erigatur perpendiculum *HI* curvæ prædictæ occurrens in *I*; & erit corpusculi *P* attractio in circulum ut area *AHIL* ducta in altitudinem *AP*. *Q.E.I.*



Etenim in *AE* capiatur linea quam minima *Ee*. Jungatur *Pe*, & in *PE*, *PA* capiantur *PC*, *Pf* ipsi *Pe* æquales. Et quoniam vis,

vis, qua annuli centro A intervallo AE in plano prædicto descripti punctum quodvis E trahit ad se corpus P, ponitur esse ut FK, & inde vis, qua punctum illud trahit corpus P versus A, est ut $\frac{AP \times FK}{PE}$, & vis, qua annulus totus trahit corpus P versus A, ut annulus & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; annulus autem iste est ut rectangulum sub radio AE & latitudine Ee, & hoc rectangulum (ob proportionales PE & AE, Ee & CE) æquatur rectangulo $PE \times CE$ seu $PE \times Ff$; erit vis, qua annulus iste trahit corpus P versus A, ut $PE \times Ff$ & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim, id est, ut contentum $Ff \times FK \times AP$, sive ut area $FKkf$ ducta in AP. Et propterea summa virium, quibus annuli omnes in circulo, qui centro A & intervallo AD describitur, trahunt corpus P versus A, est ut area tota $AHIKL$ ducta in AP. *Q. E. D.*

LIBER PRIMUS.

Corol. 1. Hinc si vires punctorum decrescunt in duplicata distantiarum ratione, hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{PF\,quad.}$, atque ideo area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; erit attractio corpusculi P in circulum ut $1 - \frac{PA}{PH}$, id est, ut $\frac{AH}{PH}$.

Corol. 2. Et universaliter, si vires punctorum ad distantias D sint reciproce ut distantiarum dignitas quælibet D^n, hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{D^n}$, ideoque area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$; erit attractio corpusculi P in circulum ut $\frac{1}{PA^{n-2}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

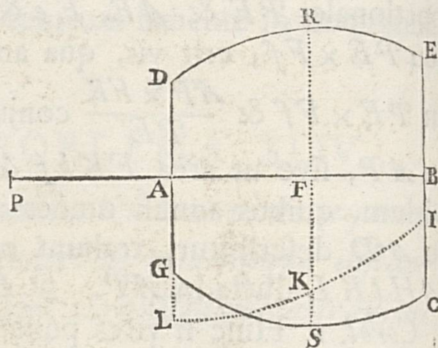
Corol. 3. Et si diameter circuli augeatur in infinitum, & numerus n sit unitate major; attractio corpusculi P in planum totum infinitum erit reciproce ut PA^{n-2}, propterea quod terminus alter $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ evanescet.

PROPO-

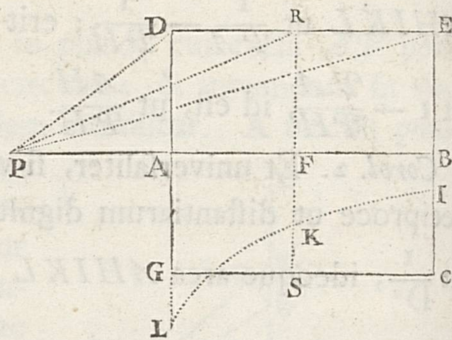
PROPOSITIO XCI. PROBLEMA XLV.

Invenire attractionem corpusculi siti in axe solidi rotundi, ad cujus puncta singula tendunt vires æquales centripetæ in quacunque distantiarum ratione decrescentes.

In solidum *DECG* trahatur corpusculum *P*, situm in ejus axe *AB*. Circulo quolibet *RFS* ad hunc axem perpendiculari secetur hoc solidum, & in ejus semidiametro *FS*, in plano aliquo *PALKB* per axem transeunte, capiatur (per prop. xc.) longitudo *FK* vi, qua corpusculum *P* in circulum illum attrahitur, proportionalis. Tangat autem punctum *K* curvam lineam *LKI*, planis extimorum circulorum *AL* & *BI* occurrentem in *L* & *I*; & erit attractio corpusculi *P* in solidum ut area *LABI*. Q. E. I.

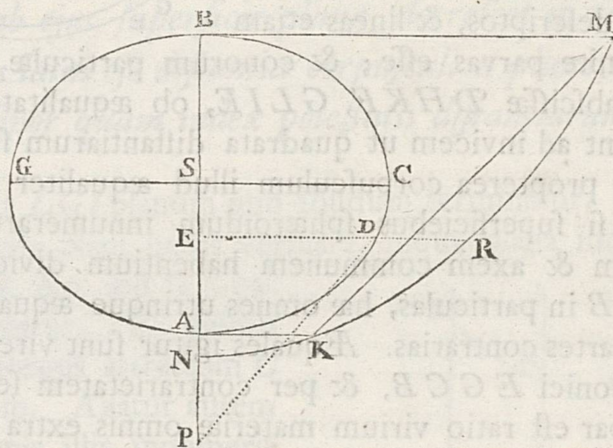


Corol. 1. Unde si solidum cylindrus sit, parallelogrammo *ADEB* circa axem *AB* revoluto descriptus, & vires centripetæ in singula ejus puncta tendentes sint reciproce ut quadrata distantiarum a punctis: erit attractio corpusculi *P* in hunc cylyndrum ut $AB - PE + PD$. Nam ordinatim applicata *FK* (per corol. 1. prop. xc.) erit ut $1 - \frac{PF}{PR}$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem *AB*, describit aream $1 \times AB$: & pars altera $\frac{PF}{PR}$ ducta in longitudinem *PB*, describit aream 1 in $\overline{PE - AD}$, id quod ex curvæ *LKI* quadratura facile ostendi potest;) & similiter pars eadem ducta in longitudinem *PA* describit aream 1 in $\overline{PD - AD}$, ductaque in ipsarum *PB*, *PA* differentiam *AB* describit arearum differentiam 1 in $\overline{PE - PD}$. De contento primo $1 \times AB$ auferatur contentum



tentum postremum 1 in $\overline{PE - PD}$, & restabit area $LABI$ æqualis 1 in $\overline{AB - PE + PD}$. Ergo vis, huic areæ proportionalis, est ut $AB - PE + PD$.

Corol. 2. Hinc etiam vis innotescit, qua sphærois $AGBC$ attrahit corpus quodvis P, exterius in axe suo AB situm. Sit $NKRM$ sectio conica cujus ordinatim applicata ER, ipsi PE perpendicularis, æquetur semper longitudini PD, quæ ducitur ad punctum illud D, in quo applicata ista sphæroidem secat. A sphæroidis verticibus A, B ad ejus axem AB erigantur perpendicula AK, BM ipsis AP, BP æqualia respective, & propterea sectioni conicæ occurrentia in K & M; & jungatur KM auferens ab eadem segmentum $KMRK$.

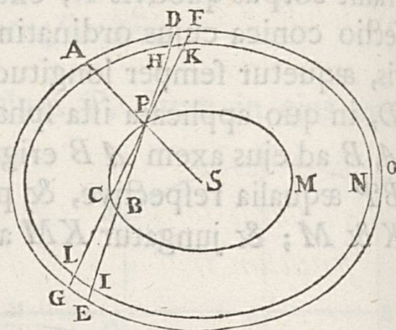


Sit autem sphæroidis centrum S & semidiameter maxima SC: & vis, qua sphærois trahit corpus P, erit ad vim, qua sphæra diametro AB descripta trahit idem corpus, ut $\frac{AS \times CSq - PS \times KMRK}{PSq + CSq - ASq}$ ad $\frac{AS\ cub.}{3PS\ quad.}$. Et eodem computandi fundamento invenire licet vires segmentorum sphæroidis.

Corol. 3. Quod si corpusculum intra sphæroidem in axe collocetur; attractio erit ut ipsius distantia a centro. Id quod facilius hoc argumento colligitur, sive particula in axe sit, sive in alia quavis diametro data. Sit $AGOF$ sphærois attrahens, S centrum ejus, & P corpus attractum. Per corpus illud P agantur tum semidiameter SPA, tum rectæ duæ quævis DE, FG sphæroidi hinc inde occur-

 rentes

rentes in *D* & *E*, *F* & *G*; ſintque *PCM*, *HLN* ſuperficies ſphæroidum duarum interiorum, exteriori ſimilium & concentricarum, quarum prior tranſeat per corpus *P*, & ſecet rectas *DE* & *FG* in *B* & *C*, poſterior ſecet eaſdem rectas in *H*, *I* & *K*, *L*. Habeant autem ſphæroides omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc inde interceptæ *DP* & *BE*, *FP* & *CG*, *DH* & *IE*, *FK* & *LG* ſibi mutuo æquales; propterea quod rectæ *DE*, *PB* & *HI* biſecantur in eodem puncto, ut & rectæ *FG*, *PC* & *KL*. Concipe jam *DPF*, *EPG* deſignare conos oppoſitos, angulis verticalibus *DPF*, *EPG* infinite parvis deſcriptos, & lineas etiam *DH*, *EI* infinite parvas eſſe; & conorum particulæ ſphæroidum ſuperficiebus abſciſſæ *DHKF*, *GLIE*, ob æqualitatem linearum *DH*, *EI*, erunt ad invicem ut quadrata diſtantiarum ſuarum a corpuſculo *P*, & propterea corpuſculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, ſi ſuperficiebus ſphæroidum innumerarum ſimilium concentricarum & axem communem habentium dividantur ſpatia *DPF*, *EGCB* in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus *P* in partes contrarias. Æquales igitur ſunt vires coni *DPF* & ſegmenti conici *EGCB*, & per contrarietatem ſe mutuo deſtruunt. Et par eſt ratio virium materiæ omnis extra ſphæroidem intimam *PCBM*. Trahitur igitur corpus *P* a ſola ſphæroide intima *PCBM*, & propterea (per corol. 3. prop. LXXII.) attractio ejus eſt ad vim, qua corpus *A* trahitur a ſphæroide tota *AGOD*, ut diſtantia *PS* ad diſtantiam *AS*. *Q. E. D.*



PROPOSITIO XCII. PROBLEMA XLVI.

Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta ſingula tendentium.

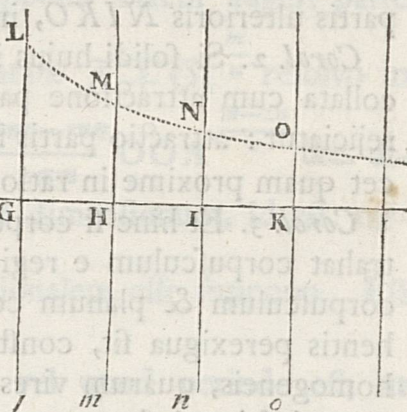
E corpore dato formanda eſt ſphæra vel cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per prop. LXXX. LXXXI. & XCI.) inveniri poteſt. Dein factis experimentis invenienda eſt vis attractionis in diverſis diſtantiis, & lex attractionis

attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singularum, quam invenire oportuit.

PROPOSITIO XCIII. THEOREMA XLVII.

Si solidum ex una parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu a solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquam quadraticæ, & vi solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie plana, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi a plano, & index ternario minor quam index potestatis distantiarum.

Cas. 1. Sit LGl planum quo solidum terminatur. Jaceat solidum autem ex parte plani hujus versus I, inque plana innumera mHM, nIN, oKO, &c. ipsi GL parallela resolvatur. Et primo collocetur corpus attractum C extra solidum. Agatur autem $CGHI$ planis illis innumeris perpendicularis, & decrescant vires attractivæ punctorum solidi in ratione potestatis distantiarum, cujus index sit numerus n ternario non minor. Ergo (per corol. 3. prop. xc.) vis, qua planum quodvis mHM trahit punctum C, est reciproce ut CH^{n-2}. In plano mHM capiatur longitudo HM ipsi CH^{n-2} reciproce proportionalis, & erit vis illa ut HM. Similiter in planis singulis lGL, nIN, oKO, &c. capiantur longitudines GL, IN, KO, &c. ipsis CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2}, &c. reciproce proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, ideoque summa virium ut summa longitudinum, hoc est, vis solidi totius ut area



GLOK in infinitum verſus *OK* producta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) eſt reciproce ut CG^{n-3}, & propterea vis ſolidi totius eſt reciproce ut CG^{n-3}. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Collocetur jam corpuſculum *C* ex parte plani *lGL* intra ſolidum, & capiatur diſtantia *CK* æqualis diſtantiæ *CG*. Et ſolidi pars *LGloKO*, planis parallelis *lGL*, *oKO* terminata, corpuſculum *C* in medio ſitum nullam in partem trahet, contrariis oppoſitorum punctorum actionibus ſe mutuo per æqualitatem tollentibus. Proinde corpuſculum *C* ſola vi ſolidi ultra planum *OK* ſiti trahitur. Hæc autem vis (per caſum primum) eſt reciproce ut CK^{n-3}, hoc eſt (ob æquales *CG*, *CK*) reciproce ut CG^{n-3}. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi ſolidum *LGIN* planis duobus infinitis parallelis *LG*, *IN* utrinque terminetur; innoteſcit ejus vis attractiva, ſubducendo de vi attractiva ſolidi totius infiniti *LGKO* vim attractivam partis ulterioris *NIKO*, in infinitum verſus *KO* productæ.

Corol. 2. Si ſolidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene eſt momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo diſtantiam decreſcet quam proxime in ratione poteſtatis CG^{n-3}.

Corol. 3. Et hinc ſi corpus quodvis finitum & ex una parte planum trahat corpuſculum e regione medii illius plani, & diſtantia inter corpuſculum & planum collata cum dimenſionibus corporis attrahentis perexigua ſit, conſtet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis pluſquam quadruplicatæ diſtantiarum; vis attractiva corporis totius decreſcet quamproxime in ratione poteſtatis, cujus latus ſit diſtantia illa perexigua, & index ternario minor quam index poteſtatis prioris. De corpore ex particulis conſtante, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis triplicatæ diſtantiarum, aſſertio non valet; propterea quod, in hoc caſu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in corollario ſecundo, ſemper eſt infinite major quam attractio partis citerioris.

Scholium.

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter verſus planum datum trahatur, & ex data lege attractionis quæratur motus corporis: ſolvetur problema quærendo (per prop. xxxix.) motum corporis recta deſcendentis ad hoc planum, & (per legum corol. 2.) componendo motum iſtum cum uniformi motu, ſecundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contra, ſi quæratur lex attractionis in planum ſecundum lineas perpendiculares factæ, ea conditione ut corpus attractum in data quacunque curva linea moveatur, ſolvetur problema operando ad exemplum problematis tertii.

Operationes autem contrahi ſolent reſolvendo ordinatim applicatas in ſeries convergentes. Ut ſi ad baſem A in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ ſit ut baſis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quæratur vis qua corpus, ſecundum poſitionem ordinatim applicatæ, vel in baſem attractum vel a baſi fugatum, moveri poſſit in curva linea, quam ordinatim applicata termino ſuo ſuperiore ſemper attingit: Suppono baſem augeri parte quam minima O, & ordinatim applicatam $\overline{A+O}|^{\frac{m}{n}}$ reſolvo in ſeriem infinitam $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} OA^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atque hujus termino in quo O duarum eſt dimenſionum, id eſt, termino $\frac{mm-mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ vim proportionalem eſſe ſuppono. Eſt igitur vis quæſita ut $\frac{mm-mn}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde eſt, ut $\frac{mm-mn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut ſi ordinatim applicata parabolam attingat, exiſtente $m=2$, & $n=1$: fiet vis ut data $2B^0$, ideoque dabitur. Data igitur vi corpus movebitur in parabola, quemadmodum *Galilæus* demonſtravit. Quod ſi ordinatim applicata hyperbolam attingat, exiſtente $m=0-1$, & $n=1$; fiet vis ut $2A^{-3}$ ſeu $2B^3$: ideoque vi, quæ ſit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in hyper-

hyperbola. Sed missis hujusmodi propositionibus, pergo ad alias quasdam de motu, quas nondum attigi.

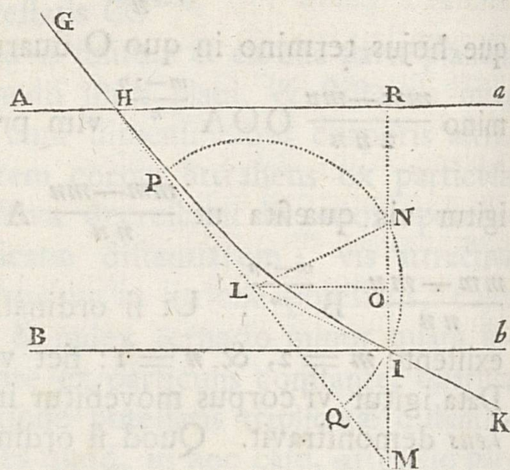
SECTIO XIV.

De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

PROPOSITIO XCIV. THEOREMA XLVIII.

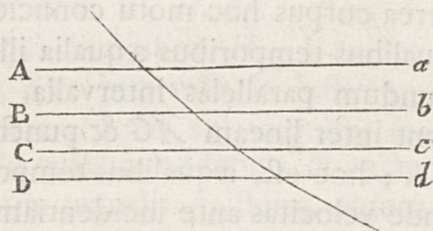
Si media duo similaria, spatio planis parallelis utrinque terminato, distinguantur ab invicem, & corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus medium alterutrum, neque ulla alia vi agitetur vel impediatur; sit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano distantiis ad eandem ipsius partem captis, ubique eadem: dico quod sinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad sinum emergentiæ ex plano altero in ratione data.

Cas. 1. Sunto Aa, Bb plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius Aa secundum lineam GH, ac toto suo per spatium intermedium transitu attrahatur vel impellatur versus medium incidentiæ, eaque actione describat lineam curvam HI, & emergat secundum lineam IK. Ad planum emergentiæ Bb erigatur perpendiculum IM, occurrens tum lineæ incidentiæ GH productæ in M, tum plano incidentiæ Aa in R; & linea emergentiæ KI producta occurrat HM in L. Centro L intervallo LI describatur circulus, secans tam HM in P & Q, quam MI productam in N; & primo si attractio vel impulsus ponatur



ponatur uniformis, erit (ex demonſtratis *Galilæi*) curva *HI* parabola, cujus hæc eſt proprietas, ut rectangulum ſub dato latere recto & linea *IM* æquale ſit *HM* quadrato; ſed & linea *HM* biſecabitur in *L*. Unde ſi ad *MI* demittatur perpendiculum *LO*, æquales erunt *MO*, *OR*; & additis æqualibus *ON*, *OI*, fient totæ æquales *MN*, *IR*. Proinde cum *IR* detur, datur etiam *MN*; eſtque rectangulum *NMI* ad rectangulum ſub latere recto & *IM*, hoc eſt, ad *HMq*, in data ratione. Sed rectangulum *NMI* æquale eſt rectangulo *PMQ*, id eſt, differentiæ quadratorum *MLq*, & *PLq* ſeu *LIq*; & *HMq* datam rationem habet ad ſui ipſius quartam partem *MLq*: ergo datur ratio *MLq*—*LIq* ad *MLq*, & convertendo ratio *LIq* ad *MLq*, & ratio dimidiata *LI* ad *ML*. Sed in omni triangulo *LMI*, ſinus angulorum ſunt proportionales lateribus oppoſitis. Ergo datur ratio ſinus anguli incidentiæ *LMR* ad ſinum anguli emergentiæ *LIR*. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Tranſeat jam corpus ſucceſſive per ſpatia plura parallelis planis terminata, *AabB*, *BbcC*, &c. & agitetur vi quæ ſit in ſingulis ſeparatim uniformis, at in diverſis diverſa; & per jam demonſtrata, ſinus incidentiæ in planum primum *Aa* erit ad ſinum emergentiæ ex plano ſecundo *Bb*, in data ratione; & hic ſinus, qui eſt ſinus incidentiæ in planum ſecundum *Bb*, erit ad ſinum emergentiæ ex plano tertio *Cc*, in data ratione; & hic ſinus ad ſinum emergentiæ ex plano quarto *Dd*, in data ratione; & ſic in infinitum: & ex æquo, ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo in data ratione. Minuantur jam planorum intervalla & augeatur numerus in infinitum, eo ut attractionis vel impulſus actio, ſecundum legem quamcunque aſſignatam, continua reddatur; & ratio ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo, ſemper data exiſtens, etiamnum dabitur. *Q. E. D.*

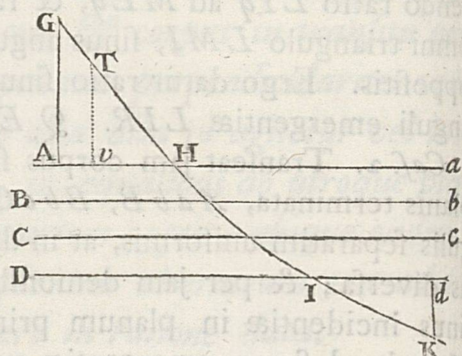


PROPO-

PROPOSITIO XCV. THEOREMA XLIX.

Iisdem positis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam est ad ejus velocitatem post emergentiam, ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ.

Capiantur *AH*, *Id* æquales, & erigantur perpendicula *AG*, *dK* occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ *GH*, *IK*, in *G* & *K*. In *GH* capiatur *TH* æqualis *IK*, & ad planum *Aa* demittatur normaliter *Tv*. Et (per legum. corol. 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum planis *Aa*, *Bb*, *Cc*, &c. perpendicularem, alterum iisdem parallelum. Vis attractionis vel impulsus, agendo secundum lineas perpendiculares, nil mutat motum secundum parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa secundum parallelas intervalla, quæ sunt inter lineam *AG* & punctum *H*, interque punctum *I* & lineam *dK*; hoc est, æqualibus temporibus describet lineas *GH*, *IK*. Proinde velocitas ante incidentiam est ad velocitatem post emergentiam, ut *GH* ad *IK* vel *TH*, id est, ut *AH* vel *Id* ad *vH*, hoc est (respectu radii *TH* vel *IK*) ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ. *Q.E.D.*



PROPOSITIO XCVI. THEOREMA L.

Iisdem positis, & quod motus ante incidentiam velocior sit quam postea: dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

Nam concipe corpus inter parallela plana *Aa*, *Bb*, *Cc*, &c. describere arcus parabolicos, ut supra; sintque arcus illi *HP*, *PQ*, *QR*, &c. Et sit ea lineæ incidentiæ *GH* obliquitas ad planum primum

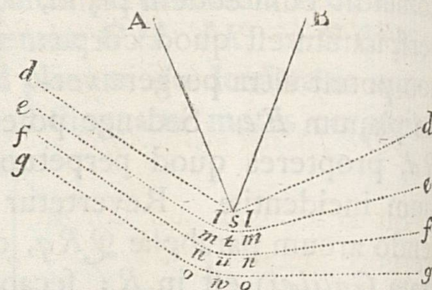
mum *Aa*, ut ſinus incidentiæ ſit ad radium circuli, cujus eſt ſinus, in ea ratione quam habet idem ſinus incidentiæ ad ſinum emergentiæ ex plano *Dd*, in ſpatium *DdeE*: & ob ſinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, ideoque linea emergentiæ coincidet cum plano *Dd*. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto *R*; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perſpicuum eſt quod corpus non poteſt ultra pergere verſus planum *Ee*. Sed nec poteſt idem pergere in linea emergentiæ *Rd*, propterea quod perpetuo attrahitur vel impellitur verſus medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana *Cc*, *Dd*, deſcribendo arcum parabolæ *QRq*, cujus vertex principalis (juxta demonſtrata *Galilæi*) eſt in *R*; ſecabit planum *Cc* in eodem angulo in *q*, ac prius in *Q*; dein pergendo in arcubus parabolicis *qp*, *ph*, &c. arcubus prioribus *QP*, *PH* ſimilibus & æqualibus, ſecabit reliqua plana in iiſdem angulis in *p*, *h*, &c. ac prius in *P*, *H*, &c. emergetque tandem eadem obliquitate in *h*, qua incidit in *H*. Concipe jam planorum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulſus ſecundum legem quamcunque aſſignatam continua reddatur; & angulus emergentiæ ſemper angulo incidentiæ æqualis exiſtens, eidem etiamnum manebit æqualis. *Q. E. D.*

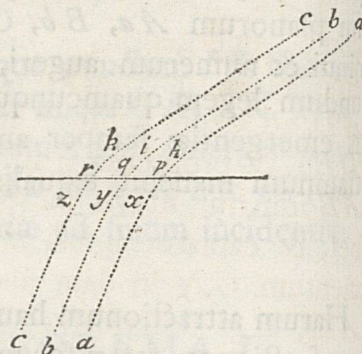
Scholium.

Harum attractionum haud multum diſſimiles ſunt lucis reflexiones & refractiones, factæ ſecundum datam ſecantium rationem, ut invenit *Snellius*, & per conſequens ſecundum datam ſinuum rationem, ut expoſuit *Carteſius*. Namque lucem ſucceſſive propagari & ſpatio quaſi ſeptem vel octo minutorum primorum a ſole ad terram venire, jam conſtat per phænomena ſatellitum *Jovis*, obſervationibus diverſorum aſtronomorum confirmata. Radii autem in aëre exiſtentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebroſum cubiculum admiſſa, invenit, & ipſe quoque expertus ſum) in tranſitu ſuo prope corporum vel opacorum vel perſpicuorum angulos (quales ſunt nummorum ex auro, argento & ære cuſorum termini

De Motu Corporum

rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quasi attracti in eadem; & ex his radiis, qui in transitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, quasi magis attracti, ut ipse etiam diligenter observavi. Et qui transeunt ad majores distantias minus incurvantur; & ad distantias adhuc majores incurvantur aliquantulum ad partes contrarias, & tres colorum fascias efformant. In figura designat *s* aciem cultri vel cunei cujusvis *AsB*; & *gowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlsld* sunt radii, arcubus *owo*, *nun*, *mtm*, *lsl* versus cultrum incurvati; idque magis vel minus pro distantia eorum a cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par est ratio incidentium in vitrum. Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, sed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, postquam illud ingressi sunt: uti in radiis *ckzc*, *biyb*, *ahxa* incidentibus ad *r*, *q*, *p*, & inter *k* & *z*, *i* & *y*, *h* & *x* incurvatis, delineatum est. Igitur ob analogiam quæ est inter propagationem radiorum lucis & progressum corporum, visum est propositiones sequentes in usus opticos subjungere; interea de natura radiorum (utrum sint corpora necne) nihil omnino disputans, sed trajectorias corporum trajectoriis radiorum persimiles solummodo determinans.

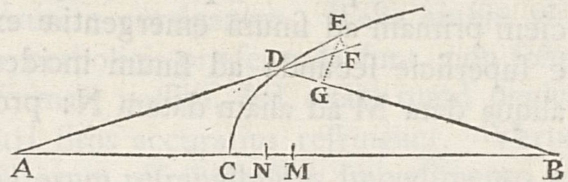




PROPOSITIO XCVII. PROBLEMA XLVII.

Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in data ratione; quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit: determinare superficiem, quæ corpuscula omnia de loco dato successive manantia convergere faciat ad alium locum datum.

Sit *A* locus a quo corpuscula divergunt; *B* locus in quem convergere debent; *CDE* curva linea quæ circa axem *AB* revoluta describat superficiem quæsitam; *D*, *E* curvæ illius puncta duo quævis; & *EF*, *EG* perpendicula in corporis vias *AD*, *DB* demissa. Accedat punctum *D* ad punctum *E*; & lineæ *DF*, qua *AD* augetur, ad lineam *DG*, qua *DB* diminuitur, ratio ultima erit eadem, quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ. Datur ergo ratio incrementi lineæ *AD* ad decrementum lineæ *DB*; & propterea si in axe *AB* sumatur ubivis punctum *C*, per quod curva *CDE* transire debet, & capiatur ipsius *AC* incrementum *CM* ad ipsius *BC* decrementum *CN* in data illa ratione, centrisque *A*, *B*, & intervallis *AM*, *BN* describantur circuli duo se mutuo secantes in *D*; punctum illud *D* tanget curvam quæsitam *CDE*, eandemque ubivis tangendo determinabit. *Q. E. I.*



Corol. 1. Faciendo autem ut punctum *A* vel *B* nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti *C*, habebuntur figuræ illæ omnes, quas *Cartesius* in optica & geometria ad refractiones exposuit. Quarum inventionem cum *Cartesius* celaverit, visum fuit hac propositione exponere.

Corol. 2. Si corpus in superficiem quamvis *CD*, secundum lineam rectam *AD*, lege quavis ductam incidens, emergat secundum aliam quamvis rectam *DK*, & a puncto *C* duci intelligantur lineæ

curvæ *CP*, *CQ* ipsis *AD*, *DK* ſemper perpendiculares: erunt incrementa linearum *PD*, *QD*, atque ideo lineæ ipſæ *PD*, *QD*, incrementis iſtis genitæ, ut ſinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contra.

PROPOSITIO XCVIII. PROBLEMA XLVIII.

Iiſdem poſitis, & circa axem AB *deſcripta ſuperficie quacunque attractiva* CD, *regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato* A *exeuntia tranſire debent: invenire ſuperficiem ſecundam attractivam* EF, *quæ corpora illa ad locum datum* B *convergere faciat.*

Juncta *AB* ſecet ſuperficiem primam in *C* & ſecundam in *E*, puncto *D* utcunque aſſumpto. Et poſito ſinu incidentiæ in ſuperficiem primam ad ſinum emergentiæ ex eadem, & ſinu emergentiæ e ſuperficie ſecunda ad ſinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N: produc tum *AB* ad *G*, ut ſit *BG* ad *CE* ut M—N ad N; tum *AD* ad *H*, ut ſit *AH* æqualis *AG*; tum etiam *DF* ad *K*, ut ſit *DK* ad *DH* ut N ad M. Junge *KB*, & centro *D* intervallo *DH* deſcribe circulum occurrentem *KB* productæ in *L*, ipſique *DL* parallelam age *BF*: & punctum *F* tanget lineam *EF*, quæ circa axem *AB* revoluta deſcribet ſuperficiem quæſitam. *Q. E. F.*

Nam

Nam concipe lineas *CP*, *CQ* ipsis *AD*, *DF* respective, & lineas *ER*, *ES* ipsis *FB*, *FD* ubique perpendiculares esse, ideoque *QS* ipsi *CE* semper æqualem; & erit (per corol. 2. prop. xcvii.) *PD* ad *QD* ut M ad N, ideoque ut *DL* ad *DK* vel *FB* ad *FK*; & divisim ut $DL - FB$ seu $PH - PD - FB$ ad *FD* seu $FQ - QD$; & composite ut $PH - FB$ ad *FQ*, id est (ob æquales *PH* & *CG*, *QS* & *CE*) $CE + BG - FR$ ad $CE - FS$. Verum (ob proportionales *BG* ad *CE* & M—N ad N) est etiam $CE + BG$ ad *CE* ut M ad N; ideoque divisim *FR* ad *FS* ut M ad N; & propterea (per corol. 2. prop. xcvii.) superficies *EF* cogit corpus, in ipsam secundum lineam *DF* incidens, pergere in linea *FR* ad locum *B*. *Q. E. D.*

Scholium.

Eadem methodo pergere liceret ad superficies tres vel plures. Ad usus autem opticos maxime accommodatæ sunt figuræ sphæricæ. Si perspicillorum vitra objectiva ex vitris duobus sphærice figuratis & aquam inter se claudentibus conflentur; fieri potest ut a refractionibus aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum superficiebus extremis, satis accurate corrigantur. Talia autem vitra objectiva vitris ellipticis & hyperbolicis præferenda sunt, non solum quod facilius & accuratius formari possint, sed etiam quod penicillos radiorum extra axem vitri sitos accuratius refringant. Veruntamen diversa diversorum radiorum refrangibilitas impedimento est, quo minus optica per figuras vel sphæricas vel alias quascunque perfici possit. Nisi corrigi possint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis imperite collocabitur.

DE MOTU CORPORUM LIBER SECUNDUS.

SECTIO I.

De motu corporum quibus resistitur in ratione velocitatis.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resistentia amissus est ut spatium movendo confectum.

NAM cum motus singulis temporis particulis æqualibus amissus sit ut velocitas, hoc est, ut itineris confecti particula: erit, componendo, motus toto tempore amissus ut iter totum. *Q. E. D.*

Corol. Quare si corpus, gravitate omni destitutum, in spatiis liberis sola vi insita moveatur; ac detur tum motus totus sub initio, tum etiam motus reliquus post spatium aliquod confectum: dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest. Erit enim spatium illud ad spatium jam descriptum, ut motus totus sub initio ad motus illius partem amissam.

LEMMA I.

Quantitates differentiis suis proportionales sunt continue proportionales.

Sit A ad A — B ut B ad B — C & C ad C — D, &c. & convertendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D, &c. *Q. E. D.*

PROPO-

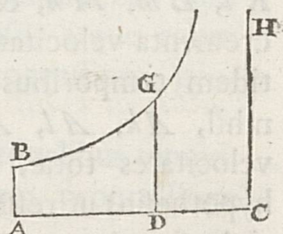
PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Si corpori resistitur in ratione velocitatis, & idem sola vi insita per medium similare moveatur, sumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressione geometrica, & spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.

Cas. 1. Dividatur tempus in particulas æquales; & si ipsis particularum initiis agat vis resistentiæ impulsu unico, quæ sit ut velocitas: erit decrementum velocitatis singulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis suis proportionales, & propterea (per lem. 1. lib. II) continue proportionales. Proinde si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipsis temporum initiis, ut termini in progressione continua, qui per saltum capiuntur, omisso passim æquali terminorum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex rationibus inter se iisdem terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea eæ quoque rationes compositæ inter se eædem sunt. Igitur velocitates, his terminis proportionales, sunt in progressione geometrica. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ, & augeatur earum numerus in infinitum, eo ut resistentiæ impulsus reddatur continuus; & velocitates in principiis æqualium temporum, semper continue proportionales, erunt in hoc etiam casu continue proportionales. *Q. E. D.*

Cas. 2. Et divisim velocitatum differentiæ, hoc est, earum partes singulis temporibus amissæ, sunt ut totæ: spatia autem singulis temporibus descripta sunt ut velocitatum partes amissæ (per prop. I. lib. II.) & propterea etiam ut totæ. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si asymptotis rectangulis *AC, CH* describatur hyperbola *BG*, sintque *AB, DG* ad asymptoton *AC* perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum resistentia medii, ipso motus initio, per lineam quamvis datam *AC*, elapso autem tempore aliquo per lineam indefinitam *DC*: exponi potest tempus per aream *ABGD*, & spatium



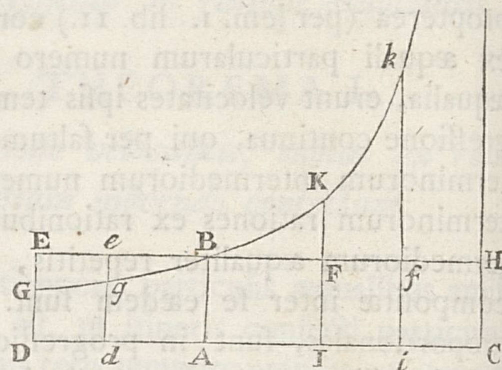
eo

eo tempore descriptum per lineam *AD*. Nam si area illa per motum puncti *D* augeatur uniformiter ad modum temporis, decrescet recta *DC* in ratione geometrica ad modum velocitatis, & partes rectæ *AC* æqualibus temporibus descriptæ decrescent in eadem ratione.

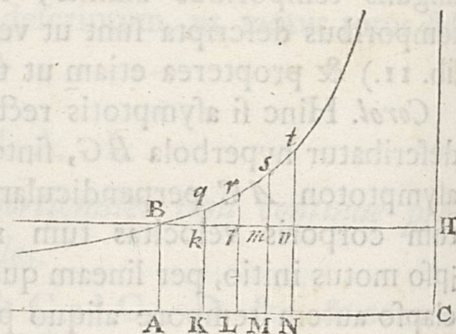
PROPOSITIO III. PROBLEMA I.

Corporis, cui, dum in medio similari recta ascendit vel descendit, resistitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.

Corpore ascendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum *BACH*, & resistentia medii initio ascensus per rectangulum *BADE* sumptum ad contrarias partes rectæ *AB*. Asymptotis rectangulis *AC*, *CH*, per punctum *B* describatur hyperbola secans perpendicula *DE*, *de* in *G*, *g*; & corpus ascendendo tempore *DGgd* describet spatium *EGge*, tempore *DGBA* spatium ascensus totius *EGB*; tempore *ABKI* spatium descensus *BFK*, atque tempore *IKki* spatium descensus *KFfk*; & velocitates corporis (resistentiæ medii proportionales) in horum temporum periodis erunt *ABED*, *ABed*, nulla, *ABFI*, *ABfi* respective; atque maxima velocitas, quam corpus descendendo potest acquirere, erit *BACH*.



Resolvatur enim rectangulum *BACH* in rectangula innumera *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn*, &c. quæ sint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, *Ak*, *Al*, *Am*, *An*, &c. ut velocitates totæ, atque ideo (per hypothesin) ut resistentiæ medii principio singulorum temporum æqualium.



um. Fiat *AC* ad *AK* vel *ABHC* ad *ABkK* ut vis gravitatis ad resistentiam in principio temporis secundi, deque vi gravitatis subducantur resistentiæ, & manebunt *ABHC*, *KkHC*, *LlHC*, *MmHC*, &c. ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum urgetur, atque ideo (per motus legem II.) ut incrementa velocitatum, id est, ut rectangula *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn*, &c. & propterea (per lem. I. lib. II.) in progressione geometrica. Quare si rectæ *Kk*, *Ll*, *Mm*, *Nn*, &c. productæ occurrant hyperbolæ in *q*, *r*, *s*, *t*, &c. erunt areæ *ABqK*, *KqrL*, *LrsM*, *MstN*, &c. æquales, ideoque tum temporibus tum viribus gravitatis semper æqualibus analogæ. Est autem area *ABqK* (per corol. 3. lem. VII. & lem. VIII. lib. I.) ad aream *Bkq* ut *Kq* ad $\frac{1}{2}kq$ seu *AC* ad $\frac{1}{2}AK$, hoc est, ut vis gravitatis ad resistentiam in medio temporis primi. Et simili argumento areæ *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. sunt ad areas *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. ut vires gravitatis ad resistentias in medio temporis secundi, tertii, quarti, &c. Proinde cum areæ æquales *BAKq*, *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. sint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ *Bkq*, *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. resistentiis in mediis singulorum temporum, hoc est (per hypothesin) velocitatibus, atque ideo descriptis spatiis analogæ. Sumantur analogarum summæ, & erunt areæ *Bkq*, *Blr*, *Bms*, *Bnt*, &c. spatiis totis descriptis analogæ; necnon areæ *ABqK*, *ABrL*, *ABsM*, *ABtN*, &c. temporibus. Corpus igitur inter descendendum, tempore quovis *ABrL*, describit spatium *Blr*, & tempore *LrtN* spatium *rlnt*. *Q. E. D.* Et similis est demonstratio motus expositi in ascensu. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo potest acquirere, est ad velocitatem dato quovis tempore acquisitam, ut vis data gravitatis, qua corpus illud perpetuo urgetur, ad vim resistentiæ, qua in fine temporis illius impeditur.

Corol. 2. Tempore autem aucto in progressione arithmetica, summa velocitatis illius maximæ ac velocitatis in ascensu, atque etiam earundem differentia in descensu decrescit in progressione geometrica.

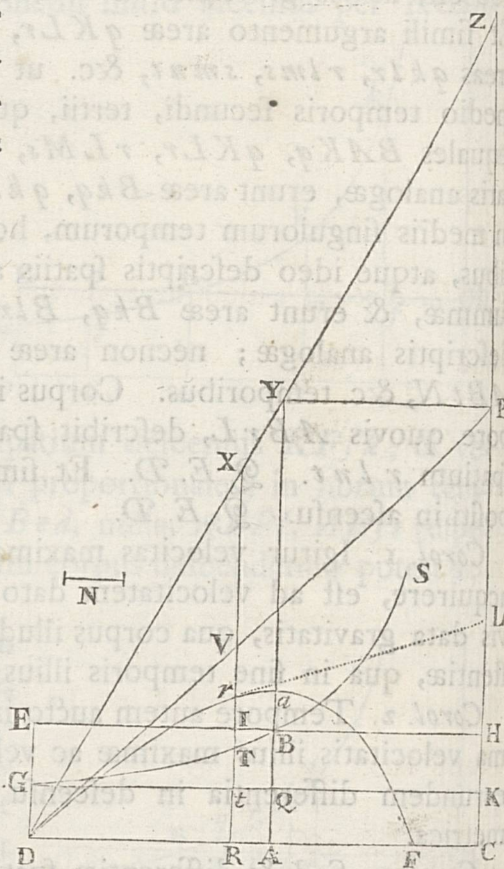
Corol. 3. Sed & differentiæ spatiorum, quæ in æqualibus temporum differentiis describuntur, decrescunt in eadem progressione geometrica.

Corol. 4. Spatium vero a corpore descriptum differentia est duorum spatiorum, quorum alterum est ut tempus sumptum ab initio descensus, & alterum ut velocitas, quæ etiam ipso descensus initio æquantur inter se.

PROPOSITIO IV. PROBLEMA II.

Posito quod vis gravitatis in medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum horizontis; definire motum projectilis in eodem, resistentiam velocitati proportionalem patientis.

E loco quovis *D* egrediatur projectile secundum lineam quamvis rectam *DP*, & per longitudinem *DP* exponatur ejusdem velocitas sub initio motus. A puncto *P* ad lineam horizontalem *DC* demittatur perpendiculum *PC*, & secetur *DC* in *A*, ut sit *DA* ad *AC* ut resistentia medii, ex motu in altitudinem sub initio orta, ad vim gravitatis; vel (quod perinde est) ut sit rectangulum sub *DA* & *DP* ad rectangulum sub *AC* & *CP* ut resistentia tota sub initio motus ad vim gravitatis. Asymptotis *DC*, *CP* describatur hyperbola quævis *GTBS* secans perpendicula *DG*, *AB* in *G* & *B*; & compleatur parallelogrammum *DGKC*, cujus latus *GK* secet *AB* in *Q*. Capiatur linea N in ratione ad *QB* qua *DC* sit ad *CP*; & ad rectæ *DC* punctum quodvis *R* erecto perpendiculo *RT*, quod hyperbolæ in *T*, & rectis *EH*, *GK*, *DP* in *I*, *t* & *V* occurrat; in eo cape *Vr* æqualem *tGT*,



$\frac{tGT}{N}$, vel quod perinde eſt, cape Rr æqualem $\frac{GTIE}{N}$; & projectile tempore $DRTG$ perveniet ad punctum r, deſcribens curvam lineam $DraF$, quam punctum r ſemper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem a in perpendiculo AB, & poſtea ſemper appropinquans ad aſymptoton PC. Eſtque velocitas ejus in puncto quovis r ut curvæ tangens rL. *Q. E. I.*

Eſt enim N ad QB ut DC ad CP ſeu DR ad RV, ideoque RV æqualis $\frac{DR \times QB}{N}$, & Rr (id eſt $RV - Vr$ ſeu $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$) æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream $RDGT$, & (per legum corol. 2.) diſtinguatur motus corporis in duos, unum aſcenſus, alterum ad latus. Et cum reſiſtentia ſit ut motus, diſtinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias: ideoque longitudo, a motu ad latus deſcripta, erit (per prop. II. hujus) ut linea DR, altitudo vero (per prop. III. hujus) ut area $DR \times AB - RDGT$, hoc eſt, ut linea Rr. Ipſo autem motus initio area $RDGT$ æqualis eſt rectangulo $DR \times AQ$, ideoque linea illa Rr (ſeu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) tunc eſt ad DR ut $AB - AQ$ ſeu QB ad N, id eſt, ut CP ad DC; atque ideo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem ſub initio. Cum igitur Rr ſemper ſit ut altitudo, ac DR ſemper ut longitudo, atque Rr ad DR ſub initio ut altitudo ad longitudinem: neceſſe eſt ut Rr ſemper ſit ad DR ut altitudo ad longitudinem, & propterea ut corpus moveatur in linea $DraF$, quam punctum r perpetuo tangit. *Q. E. D.*

Corol. 1. Eſt igitur Rr æqualis $\frac{DR \times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$: ideoque ſi producatur RT ad X ut ſit RX æqualis $\frac{DR \times AB}{N}$; id eſt, ſi compleatur parallelogrammum $ACPY$, jungatur DY ſecans CP in Z, & producatur RT donec occurrat DY in X; erit Xr æqualis $\frac{RDGT}{N}$, & propterea tempori proportionalis.

Corol. 2. Unde ſi capiantur innumeræ CR, vel, quod perinde eſt, innumeræ ZX in progreſſione geometrica; erunt totidem Xr in progreſ-

progressione arithmetica. Et hinc curva $DraF$ per tabulam logarithmorum facile delineatur.

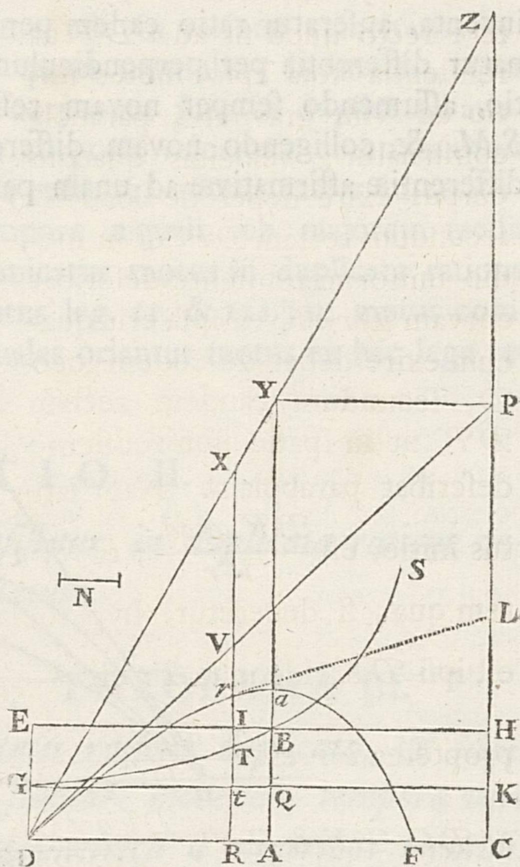
Corol. 3. Si vertice D, diametro DG deorsum producta, & latere recto quod sit ad $2DP$ ut resistentia tota ipso motus initio ad vim gravitatis, parabola construatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco D secundum rectam DP, ut in medio uniformi resistente describat curvam $DraF$, ea ipsa erit quacum exire debet de eodem loco D, secundum eandem rectam DP, ut in spatio non resistente describat parabolam. Nam latus rectum parabolæ hujus, ipso motus initio, est $\frac{DV\ quad.}{Vr}$; & Vr est $\frac{tGT}{N}$ seu $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Recta autem quæ, si duceretur, hyperbolam GTS tangeret in G, parallela est ipsi DK, ideoque Tt est $\frac{CK \times DR}{DC}$, & N erat $\frac{QB \times DC}{CP}$. Et propterea Vr est $\frac{DRq \times CK \times CP}{2DCq \times QB}$, id est (ob proportionales DR & DC, DV & DP) $\frac{DVq \times CK \times CP}{2DPq \times QB}$, & latus rectum $\frac{DV\ quad.}{Vr}$ prodit $\frac{2DPq \times QB}{CK \times CP}$, id est (ob proportionales QB & CK, DA & AC) $\frac{2DPq \times DA}{AC \times CP}$, ideoque ad $2DP$, ut $DP \times DA$ ad $CP \times AC$; hoc est, ut resistentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol. 4. Unde si corpus de loco quovis D, data cum velocitate, secundum rectam quamvis positione datam DP projiciatur; & resistentia medii ipso motus initio detur: inveniri potest curva $DraF$, quam corpus idem describet. Nam ex data velocitate datur latus rectum parabolæ, ut notum est. Et sumendo $2DP$ ad latus illud rectum, ut est vis gravitatis ad vim resistentiæ, datur DP. Dein

secando

ſecando DC in A, ut ſit $CP \times AC$ ad $DP \times DA$ in eadem illa ratione gravitatis ad reſiſtentiam, dabitur punctum A. Et inde datur curva $DraF$.

Corol. 5. Et contra, ſi datur curva $DraF$, dabitur & velocitas corporis & reſiſtentia medii in locis ſingulis r. Nam ex data ratione $CP \times AC$ ad $DP \times DA$, datur tum reſiſtentia medii ſub initio motus, tum latus rectum parabolæ: & inde datur etiam velocitas ſub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis rL, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis reſiſtentia in loco quovis r.

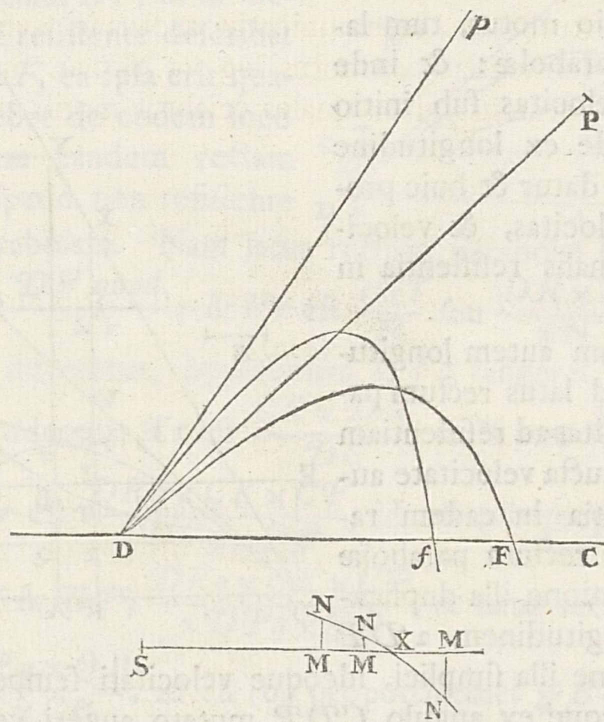


Corol. 6. Cum autem longitudo $2DP$ ſit ad latus rectum parabolæ ut gravitas ad reſiſtentiam in D; & ex aucta velocitate augeatur reſiſtentia in eadem ratione, at latus rectum parabolæ augeatur in ratione illa duplicata: patet longitudinem $2DP$ augeri in ratione illa ſimplici, ideoque velocitati ſemper proportionalem eſſe, neque ex angulo CDP mutato augeri vel minui, niſi mutetur quoque velocitas.

Corol. 7. Unde liquet methodus determinandi curvam $DraF$ ex phænomenis quamproxime, & inde colligendi reſiſtentiam & velocitatem quacum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia eadem cum velocitate, de loco D, ſecundum angulos diverſos CDP, CDp & cognoſcantur loca F, f, ubi incidunt in horizontale planum DC. Tum, aſſumpta quacunque longitudine pro DP vel Dp, fingatur quod reſiſtentia in D ſit ad gravitatem in ratione qualibet, & exponatur ratio illa per longitudinem quamvis SM.

Deinde

Deinde per computationem, ex longitudine illa assumpta *DP*, inveniantur longitudines *DF*, *Df*, ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per calculum inventa, auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & exponatur differentia per perpendiculum *MN*. Idem fac iterum ac tertio, assumendo semper novam resistentiæ ad gravitatem rationem *SM*, & colligendo novam differentiam *MN*. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ *SM*, & negativæ ad



alteram; & per puncta *N*, *N*, *N* agatur curva regularis *NNN* secans rectam *SMMM* in *X*, & erit *SX* vera ratio resistentiæ ad gravitatem, quam invenire oportuit. Ex hac ratione colligenda est longitudo *DF* per calculum; & longitudo, quæ sit ad assumptam longitudinem *DP*, ut longitudo *DF* per experimentum cognita ad longitudinem *DF* modo inventam, erit vera longitudo *DP*. Qua inventa, habetur tum curva linea *DraF* quam corpus describit, tum corporis velocitas & resistentia in locis singulis.

Scholium.

Scholium.

Cæterum, resistentiam corporum esse in ratione velocitatis, hypothesis est magis mathematica quam naturalis. In mediis, quæ rigore omni vacant, resistentiæ corporum sunt in duplicata ratione velocitatum. Etenim actione corporis velocioris communicatur eidem medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; ideoque tempore æquali, ob majorem medii quantitatem perturbatam, communicatur motus in duplicata ratione major; estque resistentia (per motus leg. II. & III.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hac lege resistentiæ.

SECTIO II.

De motu corporum quibus resistitur in duplicata ratione velocitatum.

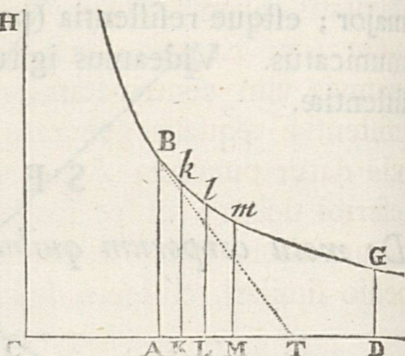
PROPOSITIO V. THEOREMA III.

Si corpori resistitur in velocitatis ratione duplicata, & idem sola vi insita per medium similare movetur; tempora vero sumantur in progressione geometrica a minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio singulorum temporum sunt in eadem progressione geometrica inverse; & quod spatia sunt æqualia, quæ singulis temporibus describuntur.

Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis est resistentia medii, & resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis; si tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum singulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ *AK*, *KL*, *LM*, &c. in recta *CD* sumptæ, & erigantur perpendicula *AB*,

Kk,

Kk, Ll, Mm, &c. hyperbolæ $BklmG$, centro C aſymptotis rectangulis CD, CH deſcriptæ occurrentia in B, k, l, m, &c. & erit AB ad Kk ut CK ad CA, & diviſim $AB-Kk$ ad Kk ut AK ad CA, & viciſſim $AB-Kk$ ad AK ut Kk ad CA, ideoque ut $AB \times Kk$ ad $AB \times CA$. Unde, cum AK & $AB \times CA$ dentur, erit $AB - Kk$ ut $AB \times Kk$; & ultimo, ubi coeunt AB & Kk, ut ABq. Et ſimili argumento erunt $Kk-Ll$, $Ll-Mm$, &c. ut $Kk\,quad$ $Ll\,quad$. &c. Linearum igitur AB, Kk, Ll, Mm quadrata ſunt ut earundem differentiæ; & idcirco cum quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipſarum differentiæ, ſimilis erit ambarum progreſſio. Quo demonſtrato, conſequens eſt etiam ut areæ his lineis deſcriptæ ſint in progreſſione conſimili cum ſpatiis quæ velocitatibus deſcribuntur. Ergo ſi velocitas initio primi temporis AK exponatur per lineam AB, & velocitas initio ſecundi KL per lineam Kk, & longitudo primo tempore deſcripta per aream $AKkB$; velocitates omnes ſubſequentes exponentur per lineas ſubſequentes Ll, Mm, &c. & longitudines deſcriptæ per areas Kl, Lm, &c. Et compoſite, ſi tempus totum exponatur per ſummam partium ſuarum AM, longitudo tota deſcripta exponetur per ſummam partium ſuarum $AMmB$. Concipe jam tempus AM ita dividi in partes AK, KL, LM, &c. ut ſint CA, CK, CL, CM, &c. in progreſſione geometrica; & erunt partes illæ in eadem progreſſione, & velocitates AB, Kk, Ll, Mm, &c. in progreſſione eadem inverſa, atque ſpatia deſcripta Ak, Kl, Lm, &c. æqualia. *Q. E. D.*



Corol. 1. Patet ergo quod, ſi tempus exponatur per aſymptoti partem quamvis AD, & velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam AB; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam DG, & ſpatium totum deſcriptum per aream hyperbolicam adjacentem $ABGD$; necnon ſpatium, quod corpus aliquod eodem tempore AD, velocitate prima AB, in medio non reſiſtente deſcribere poſſet, per rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 2. Unde datur ſpatium in medio reſiſtente deſcriptum, capiendo illud ad ſpatium quod velocitate uniformi AB in medio non

non resistente simul describi posset, ut est area hyperbolica *ABGD* ad rectangulum *AB*×*AD*.

Corol. 3. Datur etiam resistentia medii, statuendo eam ipso motus initio æqualem esse vi uniformi centripetæ, quæ in cadente corpore, tempore *AC*, in medio non resistente, generare posset velocitatem *AB*. Nam si ducatur *BT* quæ tangat hyperbolam in *B*, & occurrat asymptoto in *T*; recta *AT* æqualis erit ipsi *AC*, & tempus exponet, quo resistentia prima uniformiter continuata tollere posset velocitatem totam *AB*.

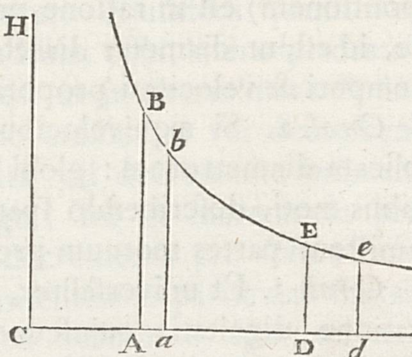
Corol. 4. Et inde datur etiam proportio hujus resistentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol. 5. Et vice versa, si datur proportio resistentiæ ad datam quamvis vim centripetam; datur tempus *AC*, quo vis centripeta resistentiæ æqualis generare possit velocitatem quamvis *AB*: & inde datur punctum *B* per quod hyperbola, asymptotis *CH*, *CD*, describi debet; ut & spatium *ABGD*, quod corpus incipiendo motum suum cum velocitate illa *AB*, tempore quovis *AD*, in medio similari resistente describere potest.

PROPOSITIO VI. THEOREMA IV.

Corpora sphærica homogenea & æqualia, resistentiis in duplicata ratione velocitatum impedita, & solis viribus insitis incitata, temporibus, quæ sunt reciproce ut velocitates sub initio, describunt semper æqualia spatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.

Asymptotis rectangulis *CD*, *CH* descripta hyperbola quavis *BbEe* secante perpendicula *AB*, *ab*, *DE*, *de*, in *B*, *b*, *E*, *e*, exponantur velocitates initiales per perpendicula *AB*, *DE*, & tempora per lineas *Aa*, *Dd*. Est ergo ut *Aa* ad *Dd* ita (per hypothesin) *DE* ad *AB*, & ita (ex natura hyperbolæ) *CA* ad *CD*; & componendo, ita *Ca* ad *Cd*. Ergo areæ *ABba*, *DEed*, hoc est, spatia descripta æquantur



tur inter se, & velocitates primæ *AB*, *DE* sunt ultimis *ab*, *de*, & propterea dividendo partibus etiam suis amissis *AB—ab*, *DE—de* proportionales. *Q. E. D.*

PROPOSITIO VII. THEOREMA V.

Corpora sphærica quibus resistitur in duplicata ratione velocitatum, temporibus, quæ sunt ut motus primi directe & resistentiæ primæ inverse, amittent partes motuum proportionales totis, & spatia describent temporibus istis & velocitatibus primis conjunctim proportionalia.

Namque motuum partes amissæ sunt ut resistentiæ & tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ sint totis proportionales, debebit resistentia & tempus conjunctim esse ut motus. Proinde tempus erit ut motus directe & resistentia inverse. Quare temporum particulis in ea ratione sumptis, corpora amittent semper particulas motuum proportionales totis, ideoque retinebunt velocitates velocitatibus suis primis semper proportionales. Et ob datam velocitatum rationem, describent semper spatia, quæ sunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si æquivelocibus corporibus resistitur in duplicata ratione diametrorum: globi homogenei quibuscunque cum velocitatibus moti, describendo spatia diametris suis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim globi cujusque erit ut ejus velocitas & massa conjunctim, id est, ut velocitas & cubus diametri; resistentia (per hypothesin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (per hanc propositionem) est in ratione priore directe & ratione posteriore inverse, id est, ut diameter directe & velocitas inverse; ideoque spatium, tempori & velocitati proportionale, est ut diameter.

Corol. 2. Si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione sesquiplicata diametrorum: globi homogenei quibuscunque cum velocitatibus moti, describendo spatia in sesquiplicata ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis.

Corol. 3. Et universaliter, si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione dignitatis cujuscunque diametrorum: spatia quibus globi homogenei, quibuscunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum

motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sunto diametri D & E; & ſi reſiſtentiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, ſint ut D^n & E^n: ſpatia quibus globi, quibuſcunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{3-n} & E^{3-n}. Et propterea globi homogenei deſcribendo ſpatia ipſis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eadem ratione ad invicem ac ſub initio.

Corol. 4. Quod ſi globi non ſint homogenei, ſpatium a globo denſiore deſcriptum augeri debet in ratione denſitatis. Motus enim, ſub pari velocitate, major eſt in ratione denſitatis, & tempus (per hanc propoſitionem) augetur in ratione motus directe, ac ſpatium deſcriptum in ratione temporis.

Corol. 5. Et ſi globi moveantur in mediis diverſis; ſpatium in medio, quod cæteris paribus magis reſiſtit, diminuendum erit in ratione majoris reſiſtentiæ. Tempus enim (per hanc propoſitionem) diminuetur in ratione reſiſtentiæ auctæ, & ſpatium in ratione temporis.

LEMMA II.

Momentum genitæ æquatur momentis laterum ſingulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continue ductis.

Genitam voco quantitatem omnem, quæ ex lateribus vel terminis quibuſcunque in arithmetica per multiplicationem, diviſionem, & extractionem radicum; in geometria per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium, ſine additione & ſubductione generatur. Ejuſmodi quantitates ſunt facti, quoti, radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica, & ſimiles. Has quantitates, ut indeterminatas & inſtabiles, & quaſi motu fluxuve perpetuo creſcentes vel decreſcentes, hic conſidero; & earum incrementa vel decrementa momentanea ſub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis ſeu affirmativis, ac decrementa pro ſubductitiis ſeu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non ſunt momenta, ſed quantitates ipſæ ex momentis genitæ. Intelligenda ſunt principia jamjam naſcentia finitarum

rum magnitudinum. Neque enim ſpectatur in hoc lemmate magnitudo momentorum, ſed prima naſcentium proportio. Eodem recidit ſi loco momentorum uſurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hiſce proportionales. Lateris autem cujuſque generantis coefficiens eſt quantitas, quæ oritur applicando genitam ad hoc latus.

Igitur ſenſus lemmatis eſt, ut, ſi quantitatum quarumcunque perpetuo motu creſcentium vel decreſcentium A, B, C, &c. momenta, vel his proportionales mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli AB fuerit $aB + bA$, & geniti contenti ABC momentum fuerit $aBC + bAC + cAB$: & genitarum dignitatum A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2}, & $A^{-\frac{1}{2}}$ momenta $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, & $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$ reſpective. Et generaliter, ut dignitatis cujuſcunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut genitæ A^2B momentum fuerit $2aAB + bA^2$; & genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2 + 4bA^3B^3C^2 + 2cA^3B^4C$; & genitæ $\frac{A^3}{B^2}$ ſive A^3B^{-2} momentum $3aA^2B^{-2} - 2bA^3B^{-3}$: & ſic in cæteris. Demonſtratur vero lemma in hunc modum.

Caſ. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB, ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A - \frac{1}{2}a$ in $B - \frac{1}{2}b$, ſeu $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta ſunt, evadit $A + \frac{1}{2}a$ in $B + \frac{1}{2}b$ ſeu $AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo ſubducatur rectangulum prius, & manebit exceſſus $aB + bA$. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum $aB + bA$. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Ponatur AB ſemper æquale G, & contenti ABC ſeu GC momentum (per caſ. 1.) erit $gC + cG$, id eſt (ſi pro G & g ſcribantur AB & $aB + bA$) $aBC + bAC + cAB$. Et par eſt ratio contenti ſub lateribus quotcunque. *Q. E. D.*

Caſ.

Cas. 3. Ponantur latera A, B, C sibi mutuo semper æqualia; & ipsius A^2, id est rectanguli AB, momentum $aB + bA$ erit $2aA$, ipsius autem A^3, id est contenti ABC, momentum $aBC + bAC + cAB$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuscunque A^n est naA^{n-1}. *Q. E. D.*

Cas. 4. Unde cum $\frac{1}{A}$ in A sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{A}$ ductum in A, una cum $\frac{1}{A}$ ducto in a erit momentum ipsius 1, id est, nihil. Proinde momentum ipsius $\frac{1}{A}$ seu ipsius A^{-1} est $\frac{-a}{A^2}$. Et generaliter cum $\frac{1}{A^n}$ in A^n sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A^n una cum $\frac{1}{A^n}$ in naA^{n-1} erit nihil. Et propterea momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ seu A^{-n} erit $-\frac{na}{A^{n+1}}$. *Q. E. D.*

Cas. 5. Et cum $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ sit A, momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in $2A^{\frac{1}{2}}$ erit a, per cas. 3: ideoque momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ sive $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter si ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B, erit A^m æquale B^n, ideoque maA^{m-1} æquale nbB^{n-1}, & maA^{-1} æquale nbB^{-1} seu $nbA^{-\frac{m}{n}}$, ideoque $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b, id est, æquale momento ipsius $A^{\frac{m}{n}}$. *Q. E. D.*

Cas. 6. Igitur genitæ cujuscunque $A^m B^n$ momentum est momentum ipsius A^m ductum in B^n, una cum momento ipsius B^n ducto in A^m, id est $maA^{m-1}B^n + nbB^{n-1}A^m$; idque sive dignitatum indices m & n sint integri numeri vel fracti, sive affirmativi vel negativi. Et par est ratio contenti sub pluribus dignitatibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in continue proportionalibus, si terminus unus datur, momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multipli-

cati

cati per numerum intervallorum inter ipsos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continue proportionales; & si detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter se ut $-2A$, $-B$, D, 2E, 3F.

Corol. 2. Et si in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum est de lateribus rectanguli cujuscunque dati.

Corol. 3. Et si summa vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciproce ut latera.

In Editionibus ante bellum differentiale Vulgatis, ita habebat hoc Scholium.

In litteris quae mihi cum Geometra peritissimo G. G. Leibnitio, annis abhinc decem intercedebant, cum significarem me compotem esse

Scholium.

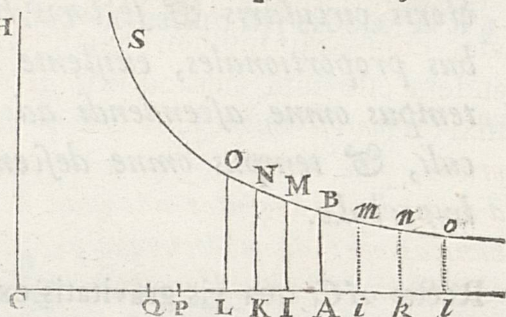
In epistola quadam ad D. *J. Collinium* nostratem 10 Decem. 1672 data, cum descripsissem methodum tangentium quam suspicabar eandem esse cum methodo *Slusii* tum nondum communicata; subjunxi: *Hoc est unum particulare vel corollarium potius methodi generalis, quæ extendit se citra molestum ullum calculum, non modo ad ducendum tangentes ad quasvis curvas sive geometricas sive mechanicas vel quomodocunque rectas lineas aliasve curvas respicientes, verum etiam ad resolvendum alia abstrusiora problematum genera de curvitatibus, areis, longitudinibus, centris gravitatis curvarum &c. neque (quemadmodum* Huddenii *methodus de maximis & minimis) ad solas restringitur æquationes illas quæ quantitatibus surdis sunt immunes. Hanc methodum intertexui alteri isti qua æquationum exegesin instituo reducendo eas ad series infinitas.* Hactenus epistola. Et hæc ultima verba spectant ad tractatum quem anno 1671 de his rebus scripseram. Methodi vero hujus generalis fundamentum continetur in lemmate præcedente.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VI.

Si corpus in medio uniformi, gravitate uniformiter agente, recta ascendat vel descendat, & spatium totum descriptum distinguatur in partes æquales, inque principiis singularum partium (addendo resistentiam medii ad vim gravitatis, quando corpus ascendit, vel subducendo ipsam quando corpus

pus descendit) investigentur vires absolutæ; dico quod vires illæ absolutæ sunt in progressione geometrica. LIBER SECUNDUS.

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam *AC*; resistentia per lineam indefinitam *AK*; vis absoluta in descensu corporis per differentiam *KC*; velocitas corporis per lineam *AP*, quæ sit media proportionalis inter *AK* & *AC*, ideoque in subduplicata ratione resistentiæ; incrementum resistentiæ data temporis particula factum per lineolam *KL*, & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam *PQ*; & centro *C* asymptotis rectangulis *CA*, *CH* describatur hyperbola quævis *BNS*, erectis perpendiculis *AB*, *KN*, *LO* occurrens in *B*, *N*, *O*. Quoniam *AK* est ut *APq*, erit hujus momentum *KL* ut illius momentum 2*APQ*: id est, ut *AP* in *KC*; nam velocitatis incrementum *PQ* (per motus leg. II.) proportionale est vi generanti *KC*. Componatur ratio ipsius *KL* cum ratione ipsius *KN*, & fiet rectangulum *KL*×*KN* ut *AP*×*KC*×*KN*; hoc est, ob datum rectangulum *KC*×*KN*, ut *AP*.



Atqui areæ hyperbolicæ *KNOL* ad rectangulum *KL*×*KN* ratio ultima, ubi coeunt puncta *K* & *L*, est æqualitatis. Ergo area illa hyperbolica evanescens est ut *AP*. Componitur igitur area tota hyperbolica *ABOL* ex particulis *KNOL* velocitati *AP* semper proportionalibus, & propterea spatio velocitate ista descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales *ABMI*, *IMNK*, *KNOL*, &c. & vires absolutæ *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt in progressione geometrica. *Q. E. D.* Et simili argumento, in ascensu corporis, sumendo, ad contrariam partem puncti *A*, æquales areas *ABmi*, *imnk*, *knol*, &c. constabit quod vires absolutæ *AC*, *iC*, *kC*, *lC*, &c. sunt continue proportionales. Ideoque si spatia omnia in ascensu & descensu capiantur æqualia; omnes vires absolutæ *lC*, *kC*, *iC*, *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si spatium descriptum exponatur per aream hyperbolicam *ABNK*; exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis & re-

& reſiſtentia medii per lineas *AC*, *AP* & *AK* reſpective; & vice verſa.

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum deſcendendo poteſt unquam acquirere, exponens eſt linea *AC*.

Corol. 3. Igitur ſi in data aliqua velocitate cognoſcatur reſiſtentia medii, invenietur velocitas maxima, ſumendo ipſam ad velocitatem illam datam in ſubduplicata ratione, quam habet vis gravitatis ad medii reſiſtentiam illam cognitam.

PROPOSITIO IX. THEOREMA VII.

Poſitis jam demonſtratis, dico quod, ſi tangentes angulorum ſectoris circularis & ſectoris hyperbolici ſumantur velocitatibus proportionales, exiſtente radio juſtæ magnitudinis: erit tempus omne aſcendendi ad locum ſummum ut ſector circuli, & tempus omne deſcendendi a loco ſummo ut ſector hyperbolæ.

Rectæ *AC*, qua vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur *AD*. Centro *D* ſemidiametro *AD* deſcribatur tum circuli quadrans *AtE*; tum hyperbola rectangula *AVZ* axem habens *AX*, verticem principalem *A*, & aſymptoton *DC*. Ducantur *Dp*, *DP*, & erit ſector circularis *AtD* ut tempus omne aſcendendi ad locum ſummum; & ſector hyperbolicus *ATD* ut tempus omne deſcendendi a loco ſummo: Si modo ſectorum tangentes *Ap*, *AP* ſint ut velocitates.

Caſ. 1. Agatur enim *Dvq* abſcindens ſectoris *ADt* & trianguli *ADp* momenta, ſeu particulas quam minimas ſimul deſcriptas *tDv* & *qDp*. Cum particulæ illæ, ob angulum communem *D*, ſunt in duplicata ratione laterum, erit particula *tDv* ut $\frac{qDp \times tD \text{ quad.}}{pD \text{ quad.}}$, id eſt, ob datam *tD*, ut $\frac{qDp}{pD\text{quad.}}$. Sed *pD quad.* eſt *AD quad.* + *Ap quad.* id eſt, *AD quad.* + $AD \times Ak$, ſeu $AD \times Ck$; & *qDp* eſt $\frac{1}{2} AD \times pq$. Ergo ſectoris particula *tDv* eſt ut $\frac{pq}{Ck}$; id eſt,

ut

ut velocitatis decrementum quam minimum pq directe, & vis illa Ck quæ velocitatem diminuit inverſe; atque ideo ut particula temporis decremento velocitatis reſpondens. Et componendo fit ſumma particularum omnium tDv in ſectore ADt, ut ſumma particularum temporis ſingulis velocitatis decreſcentis Ap particulis amiſſis pq reſpondentium, uſque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc eſt, ſector totus ADt eſt ut tempus totum aſcendendi ad locum ſummum. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Agatur DQV abſcindens tum ſectoris DAV, tum trianguli DAQ particulas quam minimas TDV & PDQ; & erunt hæ particulæ ad invicem ut DTq ad DPq, id eſt (ſi TX & AP parallelæ ſint) ut DXq ad DAq vel TXq ad APq, & diviſim ut $DXq-TXq$ ad $DAq-APq$. Sed ex natura hyperbolæ DXq $-TXq$ eſt ADq, & per hypotheſin APq eſt $AD\times AK$. Ergo particulæ ſunt ad invicem ut ADq ad $ADq-AD\times AK$; id eſt, ut AD ad $AD-AK$ ſeu AC ad CK: ideoque ſectoris particula TDV eſt $\frac{PDQ\times AC}{CK}$; atque ideo ob datas AC & AD, ut $\frac{PQ}{CK}$, id eſt, ut incrementum velocitatis directe, utque vis generans incrementum inverſe; atque ideo ut particula temporis incremen-

to reſpondens. Et componendo fit ſumma particularum temporis, quibus omnes velocitatis *AP* particulæ *PQ* generantur, ut ſumma particularum ſectoris *ATD*, id eſt, tempus totum ut ſector totus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi *AB* æquetur quartæ parti ipſius *AC*, ſpatium quod corpus tempore quovis cadendo deſcribit, erit ad ſpatium, quod corpus velocitate maxima *AC*, eodem tempore uniformiter progrediendo deſcribere poteſt, ut area *ABNK*, qua ſpatium cadendo deſcriptum exponitur, ad aream *ATD*, qua tempus exponitur. Nam cum ſit *AC* ad *AP* ut *AP* ad *AK*, erit (per corol. 1. lem. 11. hujus) *LK* ad *PQ* ut 2*AK* ad *AP*, hoc eſt, ut 2*AP* ad *AC*, & inde *LK* ad $\frac{1}{2}$*PQ* ut *AP* ad $\frac{1}{4}$*AC* vel *AB*; eſt & *KN* ad *AC* vel *AD* ut *AB* ad *CK*; itaque ex æquo *LKNO* ad *DPQ* ut *AP* ad *CK*. Sed erat *DPQ* ad *DTV* ut *CK* ad *AC*. Ergo rurſus ex æquo *LKNO* eſt ad *DTV* ut *AP* ad *AC*; hoc eſt, ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo poteſt acquirere. Cum igitur arearum *ABNK* & *ATD* momenta *LKNO* & *DTV* ſunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes ſimul genitæ ut ſpatia ſimul deſcripta, ideoque areæ

areæ totæ ab initio genitæ *ABNK* & *ATD* ut ſpatia tota ab initio deſcenſus deſcripta. *Q. E. D.*

Corol. 2. Idem conſequitur etiam de ſpatio quod in aſcenſu deſcribitur. Nimirum quod ſpatium illud omne ſit ad ſpatium, uniformi cum velocitate *AC* eodem tempore deſcriptum, ut eſt area *ABnk* ad ſectorem *ADt*.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore *ATD* cadentis eſt ad velocitatem, quam eodem tempore in ſpatio non reſiſtente acquireret, ut triangulum *APD* ad ſectorem hyperbolicum *ATD*. Nam velocitas in medio non reſiſtente foret ut tempus *ATD*, & in medio reſiſtente eſt ut *AP*, id eſt, ut triangulum *APD*. Et velocitates illæ initio deſcenſus æquantur inter ſe, perinde ut areæ illæ *ATD*, *APD*.

Corol. 4. Eodem argumento velocitas in aſcenſu eſt ad velocitatem, qua corpus eodem tempore in ſpatio non reſiſtente omnem ſuum aſcendendi motum amittere poſſet, ut triangulum *ApD* ad ſectorem circularem *AtD*; ſive ut recta *Ap* ad arcum *At*.

Corol. 5. Eſt igitur tempus, quo corpus in medio reſiſtente cadendo velocitatem *AP* acquirit, ad tempus, quo velocitatem maximam *AC* in ſpatio non reſiſtente cadendo acquirere poſſet, ut ſector *ADT* ad triangulum *ADC*: & tempus, quo velocitatem *Ap* in medio reſiſtente aſcendendo poſſit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in ſpatio non reſiſtente aſcendendo poſſet amittere, ut arcus *At* ad ejus tangentem *Ap*.

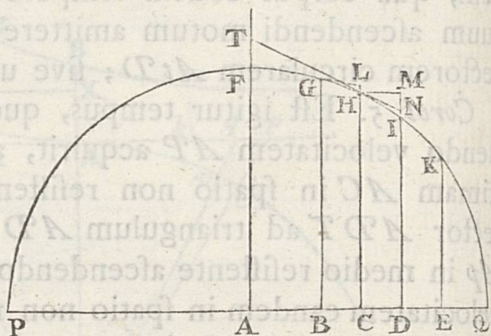
Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur ſpatium aſcenſu vel deſcenſu deſcriptum. Nam corporis in infinitum deſcendentis datur velocitas maxima (per corol. 2. & 3. theor. VI. lib. II.) indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in ſpatio non reſiſtente cadendo poſſet acquirere. Et ſumendo ſectorem *ADT* vel *ADt* ad triangulum *ADC* in ratione temporis dati ad tempus modo inventum; dabitur tum velocitas *AP* vel *Ap*, tum area *ABNK* vel *ABnk*, quæ eſt ad ſectorem *ADT* vel *ADt* ut ſpatium quæſitum ad ſpatium, quod tempore dato, cum velocitate illa maxima jam ante inventa, uniformiter deſcribi poteſt.

Corol. 7. Et regrediendo, ex dato aſcenſus vel deſcenſus ſpatio *ABnk* vel *ABNK*, dabitur tempus *ADt* vel *ADT*.

PROPOSITIO X. PROBLEMA III.

Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum horizontis, sitque resistentia ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur; tum corporis velocitas & medii resistentia in locis singulis.

Sit *PQ* planum illud plano schematis perpendiculare; *PFHQ* linea curva plano huic occurrens in punctis *P* & *Q*; *G*, *H*, *I*, *K* loca quatuor corporis in hac curva ab *F* ad *Q* pergentis; & *GB*, *HC*, *ID*, *KE* ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem demissæ, & lineæ horizontali *PQ* ad puncta *B*, *C*, *D*, *E* insistentes; & sint *BC*, *CD*, *DE* distantiæ ordinatarum inter se æquales. A punctis *G* & *H* ducantur rectæ *GL*, *HN* curvam tangentes in *G* & *H*, & ordinatis *CH*, *DI* sursum productis occurrentes in *L* & *N*, & compleatur parallelogrammum *HCDM*. Et tempora, quibus corpus describit arcus *GH*, *HI*, erunt in subduplicata ratione altitudinum *LH*, *NI*, quas corpus temporibus illis describere posset, a tangentibus cadendo; & velocitates erunt ut longitudines descriptæ *GH*, *HI* directe & tempora inverse. Exponantur tempora per T & *t*, & velocitates per $\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{t}$; & decrementum velocitatis tempore *t* factum exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur a resistentia corpus retardante, & gravitate corpus accelerante. Gravitas, in corpore cadente & spatium *NI* cadendo describente, generat velocitatem, qua duplum illud spatium eodem tempore describi potuisset, ut *Galilæus* demonstravit; id est, velocitatem $\frac{2NI}{t}$: at in corpore arcum *HI* describente, auget arcum illum



sola

ſola longitudine $HI - HN$ ſeu $\frac{MI \times NI}{HI}$; ideoque generat tantum velocitatem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, & habebitur decrementum velocitatis ex reſiſtentia ſola oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cum gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2NI}{t}$; reſiſtentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, ſive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad $2NI$.

Jam pro abſciſſis CB, CD, CE ſcribantur $-o$, o, $2o$. Pro ordinata CH ſcribatur P, & pro MI ſcribatur ſeries quælibet $Qo + Roo + So^3 +$ &c. Et ſeriei termini omnes poſt primum, nempe $Roo + So^3 +$ &c. erunt NI, & ordinatæ DI, EK, & BG erunt $P - Qo - Roo - So^3 -$ &c. $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 -$ &c. & $P + Qo - Roo + So^3 -$ &c. reſpective. Et quadrando differentias ordinatarum $BG - CH$ & $CH - DI$, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipſarum BC, CD, habebuntur arcuum GH, HI quadrata $oo + QQoo - 2QRo^3 +$ &c. & $oo + QQoo + 2QRo^3 +$ &c. Quorum radices $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, & $o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ ſunt arcus GH & HI. Præterea ſi ab ordinata CH ſubducatur ſemiſumma ordinatarum BG ac DI, & ab ordinata DI ſubducatur ſemiſumma ordinatarum CH & EK, manebunt arcuum GI & HK ſagittæ Roo & $Roo + 3So^3$. Et hæ ſunt lineolis LH & NI proportionales, ideoque in duplicata ratione temporum infinite parvorum T & t: & inde ratio $\frac{t}{T}$ eſt $\sqrt{\frac{R + 3So}{R}}$ ſeu $\frac{R + \frac{3}{2}So}{R}$; & $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$, ſubſtituendo ipſorum $\frac{t}{T}$, GH, HI, MI & NI valores jam inventos, evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$. Et cum $2NI$ ſit $2Roo$, reſi-

ſtentia

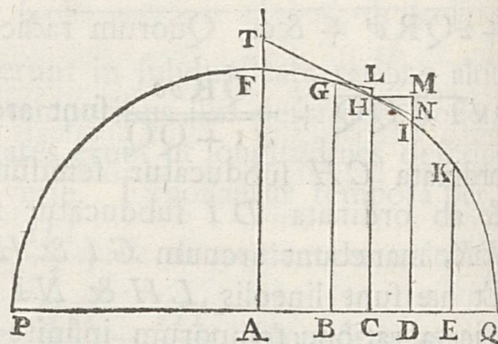
ſtentia jam erit ad gravitatem ut $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ ad $2Roo$, id eſt, ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$.

Velocitas autem ea eſt, quacum corpus de loco quovis *H*, ſecundum tangentem *HN* egrediens, in parabola diametrum *HC* & latus rectum $\frac{HNq}{NI}$ ſeu $\frac{1+QQ}{R}$ habente, deinceps in vacuo moveri poteſt.

Et reſiſtentia eſt ut medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim, & propterea medii denſitas eſt ut reſiſtentia directe & quadratum velocitatis inverſe, id eſt, ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directe & $\frac{1+QQ}{R}$ inverſe, hoc eſt, ut $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. *Q. E. I.*

Corol. 1. Si tangens *HN* producatur utrinque donec occurrat ordinatæ cuilibet *AF* in *T*: erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis $\sqrt{1+QQ}$, ideoque in ſuperioribus pro $\sqrt{1+QQ}$ ſcribi poteſt. Qua ratione reſiſtentia erit ad gravitatem ut $3S\times HT$ ad $4RR\times AC$, velocitas erit ut $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$, & medii denſitas erit ut $\frac{S\times AC}{R\times HT}$.

Corol. 2. Et hinc, ſi curva linea *PFHQ* definiatur per relationem inter baſem ſeu abſciſſam *AC* & ordinatim applicatam *CH*, ut moris eſt; & valor ordinatim applicatæ reſolvatur in ſeriem convergentem: Problema per primos ſeriei terminos expedite ſolvetur, ut in exemplis ſequentibus.



Exempl. 1. Sit linea *PFHQ* ſemicirculus ſuper diametro *PQ* deſcriptus, & requiratur medii denſitas quæ faciat ut projectile in hac linea moveatur.

Biſecetur diameter *PQ* in *A*; dic *AQ*, *n*; *AC*, *a*; *CH*, *e*; & *CD*, *o*: & erit *DIq* ſeu $AQq - ADq = nn - aa - 2ao - oo$, ſeu

ee

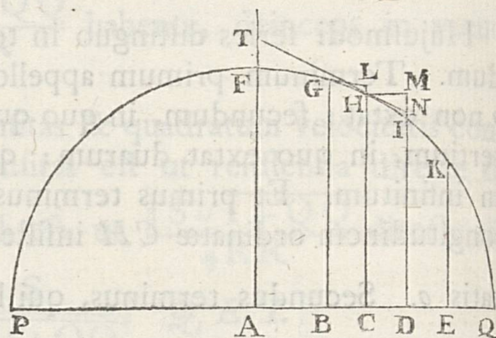
$ee - 2ao - oo$, & radice per methodum noſtram extracta, fiet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5}$ — &c. Hic ſcribatur nn pro $ee + aa$, & evadet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5}$ — &c.

Hujuſmodi ſeries diſtinguo in terminos ſucceſſivos in hunc modum. Terminum primum appello, in quo quantitas infinite parva o non extat; ſecundum, in quo quantitas illa eſt unius dimenſionis; tertium, in quo extat duarum; quartum, in quo trium eſt; & ſic in infinitum. Et primus terminus, qui hic eſt e, denotabit ſemper longitudinem ordinatæ CH inſiſtentis ad initium indefinitæ quantitatis o. Secundus terminus, qui hic eſt $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam inter CH & DN, id eſt, lineolam MN, quæ abſcinditur complendo parallelogrammum $HCDM$, atque ideo poſitionem tangentis HN ſemper determinat; ut in hoc caſu capiendo MN ad HM ut eſt $\frac{ao}{e}$ ad o, ſeu a ad e. Terminus tertius, qui hic eſt $\frac{nnoo}{2e^3}$, deſignabit lineolam IN, quæ jacet inter tangentem & curvam, ideoque determinat angulum contactus IHN ſeu curvaturam quam curva linea habet in H. Si lineola illa IN finitæ eſt magnitudinis, deſignabitur per terminum tertium una cum ſequentibus in infinitum. At ſi lineola illa minuatur in infinitum, termini ſubſequentes evadent infinite minores tertio, ideoque negligi poſſunt. Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, & ſic deinceps. Unde obiter patet uſus non contemnendus harum ſerierum in ſolutione problematum, quæ pendent a tangentibus & curvatura curvarum.

Conferatur jam ſeries $e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5}$ — &c. cum ſerie $P - Qo - Roo - So^3$ — &c. & perinde pro P, Q, R & S ſcribatur e, $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$, & $\frac{ann}{2e^5}$, & pro $\sqrt{1 + QQ}$ ſcribatur $\sqrt{1 + \frac{aa}{ee}}$ ſeu $\frac{n}{e}$, & prodibit medii denſitas ut $\frac{a}{ne}$, hoc eſt (ob datam n) ut $\frac{a}{e}$, ſeu

De Motu Corporum

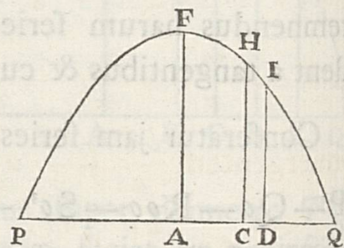
$\frac{AC}{CH}$, id est, ut tangentis longitudo illa HT, quæ ad semidiametrum AF ipsi PQ normaliter insistentem terminatur: & resistentia erit ad gravitatem ut $3a$ ad $2n$, id est, ut $3AC$ ad circuli diametrum PQ: velocitas autem erit ut $\surd CH$. Quare si corpus justa cum velocitate secundum lineam ipsi PQ parallelam exeat de loco F, & medii densitas in singulis locis H sit ut longitudo tangentis HT, & resistentia etiam in loco aliquo H sit ad vim gravitatis ut $3AC$ ad PQ, corpus illud describet circuli quadrantem FHQ. *Q.E.I.*



At si corpus idem de loco P, secundum lineam ipsi PQ perpendicularem egrederetur, & in arcu semicirculi PFQ moveri inciperet, sumenda esset AC seu a ad contrarias partes centri A, & propterea signum ejus mutandum esset & scribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret medii densitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam autem densitatem, hoc est, quæ motus corporum accelerat, natura non admittit: & propterea naturaliter fieri non potest, ut corpus ascendendo a P describat circuli quadrantem PF. Ad hunc effectum deberet corpus a medio impellente accelerari, non a resistente impediri.

Exempl. 2. Sit linea PFQ parabola, axem habens AF horizonti PQ perpendicularem, & requiratur medii densitas, quæ faciat ut projectile in ipsa moveatur.

Ex natura parabolæ, rectangulum PDQ æquale est rectangulo sub ordinata DI & recta aliqua data: hoc est, si dicantur recta illa b; PC, a; PQ, c; CH, e; & CD, o; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$ seu $ac-aa-2ao+co-oo$ æquale est rectangulo b in DI, ideoque DI æquale $\frac{ac-aa}{b}+\frac{c-2a}{b}o-\frac{oo}{b}$. Jam scribendus esset hujus seriei secundus terminus $\frac{c-2a}{b}o$ pro Qo, tertius item



item terminus $\frac{oo}{b}$ pro Roo. Cum vero plures non sint termini, debebit quarti coefficiens S evanescere, & propterea quantitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, cui medii densitas proportionalis est, nihil erit. Nulla igitur medii densitate movebitur projectile in parabola, uti olim demonstravit *Galilæus*. *Q. E. I.* LIBER SECUNDUS.

Exempl. 3. Sit linea *AGK* hyperbola, asymptoton habens *NX* plano horizontali *AK* perpendicularem; & quæratur medii densitas, quæ faciat ut projectile moveatur in hac linea.

Sit *MX* asymptotos altera, ordinatim applicatæ *DG* productæ occurrens in *V*; & ex natura hyperbolæ, rectangulum *XV* in *VG* dabitur. Datur autem ratio *DN* ad *VX*, & propterea datur etiam rectangulum *DN* in *VG*. Sit illud bb: & completo parallelogrammo *DNXZ*; dicatur *BN*, a; *BD*, o; *NX*, c; & ratio data *VZ* ad *ZX* vel *DN* ponatur esse $\frac{m}{n}$. Et erit *DN* æqualis $a-o$, *VG* æqualis $\frac{bb}{a-o}$, *VZ* æqualis $\frac{m}{n}\overline{a-o}$, & *GD* seu $NX-VZ-VG$ æqualis $c-\frac{m}{n}a+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{a-o}$. Resolvatur terminus $\frac{bb}{a-o}$ in seriem convergentem $\frac{bb}{a}+\frac{bb}{aa}o+\frac{bb}{a^3}oo+\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. & fiet *GD* æqualis $c-\frac{m}{n}a-\frac{bb}{a}+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o-\frac{bb}{a^3}o^2-\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. Hujus seriei terminus secundus $\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o$ usurpandus est pro Qo, tertius cum signo mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro Ro^2, & quartus cum signo etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$

pro So^3, eorumque coefficientes $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ & $\frac{bb}{a^4}$ ſcribendæ ſunt in regula ſuperiore pro Q, R & S. Quo facto prodit medii denſitas ut $\frac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1 + \frac{mm}{nn} - \frac{2mbb}{naa} + \frac{b^4}{a^4}}}$ ſeu $\frac{1}{\sqrt{aa + \frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}}}$ id eſt, ſi in VZ ſumatur VY æqualis VG, ut $\frac{1}{XY}$. Namque aa & $\frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}$ ſunt ipſarum XZ & ZY quadrata. Reſiſtentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet $3XY$ ad $2YG$; & velocitas ea eſt, quacum corpus in parabola pergeret verticem G, diametrum DG, & latus rectum $\frac{XY\ quad.}{VG}$ habente. Ponatur itaque quod medii denſitates in locis ſingulis G ſint reciproce ut diſtantiæ XY, quodque reſiſtentia in loco aliquo G ſit ad gravitatem ut $3XY$ ad $2YG$; & corpus de loco A, juſta cum velocitate emiſſum, deſcribet hyperbolam illam AGK. *Q. E. I.*

Exempl. 4. Ponatur indefinite, quod linea AGK hyperbola ſit, centro X, aſymptotis MX, NX ea lege deſcripta, ut conſtructo rectangulo $XZDN$ cujus latus ZD ſecet hyperbolam in G & aſymptoton ejus in V, fuerit VG reciproce ut ipſius ZX vel DN dignitas aliqua DN^n, cujus index eſt numerus n: & quæratur medii denſitas, qua projectile progrediatur in hac curva.

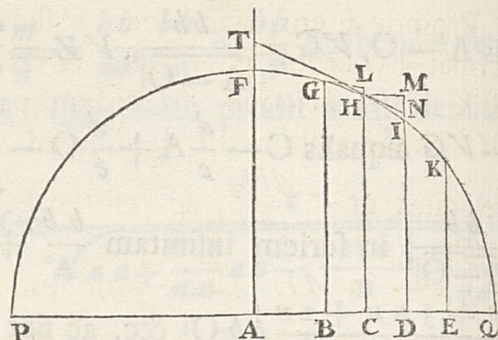
Pro BN, BD, NX ſcribantur A, O, C reſpective, ſitque VZ ad XZ vel DN ut d ad e, & VG æqualis $\frac{bb}{DN^n}$, & erit DN æqualis

lis A — O, $VG = \frac{bb}{\overline{A-O}|^{n}}$, $VZ = \frac{d}{e}\overline{A-O}$, & $G\mathcal{D}$ seu $NX - VZ$
$-VG$ æqualis $C - \frac{d}{e}A + \frac{d}{e}O - \frac{bb}{\overline{A-O}|^{n}}$. Resolvatur terminus ille $\frac{bb}{\overline{A-O}|^{n}}$ in seriem infinitam $\frac{bb}{A^{n}} + \frac{nbb}{A^{n+1}}O + \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^{2} + \frac{n^{3}+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^{3}$ &c. ac fiet $G\mathcal{D}$ æqualis $C - \frac{d}{e}A - \frac{bb}{A^{n}} + \frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O - \frac{+nn+n}{2A^{n+2}}bbO^{2} - \frac{+n^{3}+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^{3}$ &c. Hujus seriei terminus secundus $\frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O$ usurpandus est pro Qo, tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^{2}$ pro Ro^{2}, quartus $\frac{n^{3}+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^{3}$ pro So^{3}. Et inde medii densitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, in loco quovis G, fit $\frac{n+2}{3\sqrt{A^{2}+\frac{dd}{ee}A^{2}-\frac{2dnbb}{eA^{n}}A+\frac{nnb^{4}}{A^{2n}}}}$, ideoque si in VZ capiatur VY æqualis $n \times VG$, densitas illa est reciproce ut XY. Sunt enim A^{2} & $\frac{dd}{ee}A^{2} - \frac{2dnbb}{eA^{n}}A + \frac{nnb^{4}}{A^{2n}}$ ipsarum XZ & ZY quadrata. Resistentia autem in eodem loco G fit ad gravitatem ut $3S$ in $\frac{XY}{A}$ ad $4RR$, id est, ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2}VG$. Et velocitas ibidem ea ipsa est, quacum corpus projectum in parabola pergeret, verticem G, diametrum $G\mathcal{D}$ & latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ seu $\frac{2XY\ quad.}{nn+n \text{ in } VG}$ habente. *Q. E. I.*

Scholium.

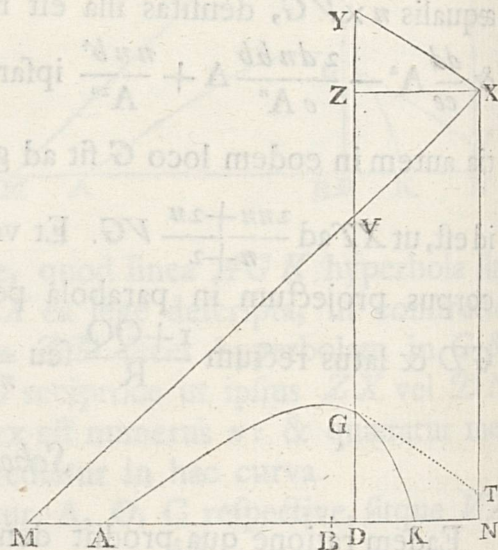
Eadem ratione qua prodiit densitas medii ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$ in corollario primo, si resistentia ponatur ut velocitatis V dignitas quælibet

bet V^n, prodibit densitas medii ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \overline{\frac{AC}{HT}}\Big|^{n-1}$. Et propterea si curva inveniri potest ea lege, ut data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad



$\overline{\frac{HT}{AC}}\Big|^{n-1}$, vel $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1+QQ}|^{n-1}$: corpus movebitur in hac curva in uniformi medio cum resistentia quæ sit ut velocitatis dignitas V^n. Sed redeamus ad curvas simpliciores.

Quoniam motus non fit in parabola nisi in medio non resistente, in hyperbolis vero hic descriptis fit per resistentiam perpetuam; perspicuum est quod linea, quam projectile in medio uniformiter resistente describit, propius accedit ad hyperbolas hasce quam ad parabolam. Est utique linea illa hyperbolici generis, sed quæ circa verticem magis distat ab asymptotis; in partibus a vertice remotioribus propius ad ipsas accedit quam pro ratione hyperbolarum quas hic descripsi. Tanta vero non est inter has & illam differentia, quin illius loco possint hæ in rebus practicis non incommode adhiberi. Et utiliores forsan futuræ sunt hæ, quam hyperbola magis accurata & simul magis composita. Ipsæ vero in usum sic deducentur.



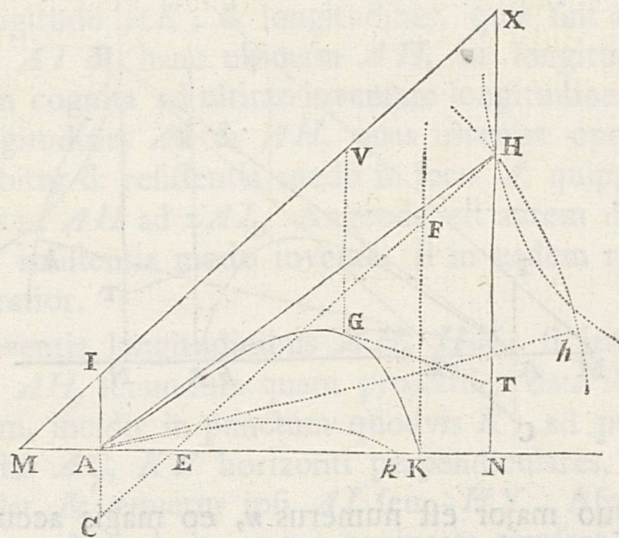
Compleatur parallelogrammum $XYGT$, & recta GT tanget hyperbolam in G, ideoque densitas medii in G est reciproce ut tangens GT, & velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GTq}{GV}}$, resistentia autem ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in GV.

Proinde

Proinde si corpus de loco A secundum rectam AH projectum describat hyperbolam AGK, & AH producta occurrat asymptoto NX in H, actaque AI eidem parallela occurrat alteri asymptoto MX in I: erit medii densitas in A reciproce ut AH, & corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq}{AI}}$, ac resistentia ibidem ad gravitatem ut AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in AI. Unde prodeunt sequentes regulæ.

Reg. 1. Si servetur tum medii densitas in A, tum velocitas quacum corpus projicitur, & mutetur angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX. Ideoque si longitudines illæ in aliquo casu inveniantur, hyperbola deinceps ex dato quovis angulo NAH expedite determinari potest.

Reg. 2. Si servetur tum angulus NAH, tum medii densitas in A, & mutetur velocitas quacum corpus projicitur; servabitur longitudo AH, & mutabitur AI in duplicata ratione velocitatis reciproce.

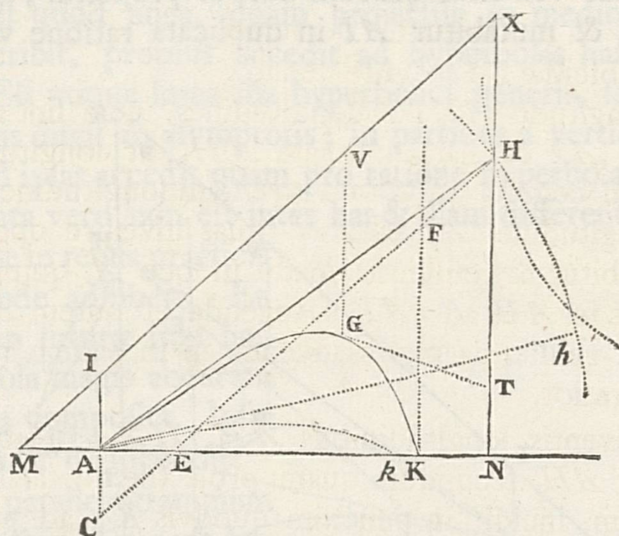


Reg. 3. Si tam angulus NAH, quam corporis velocitas in A, gravitasque acceleratrix servetur, & proportio resistentiæ in A ad gravitatem motricem augeatur in ratione quacunque; augebitur proportio AH ad AI in eadem ratione, manente parabolæ prædictæ latere recto, eique proportionali longitudine $\frac{AHq}{AI}$: & propterea

terea minuetur AH in eadem ratione, & AI minuetur in ratione illa duplicata. Augetur vero proportio resistentiæ ad pondus, ubi vel gravitas specifica sub æquali magnitudine fit minor, vel medii densitas major, vel resistentia, ex magnitudine diminuta, diminuitur in minore ratione quam pondus.

Reg. 4. Quoniam densitas medii prope verticem hyperbolæ major est quam in loco A; ut habeatur densitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium GT ad tangentem AH inveniri, & densitas in A augeri in ratione paulo majore quam semisummæ harum tangentium ad minimam tangentium GT.

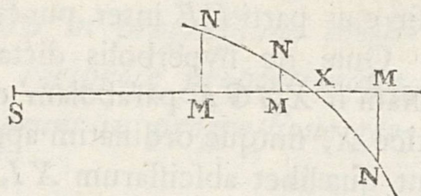
Reg. 5. Si dantur longitudines AH, AI, & describenda sit figura AGK: produc HN ad X, ut sit HX ad AI ut $n+1$ ad 1, centroque X & asymptotis MX, NX per punctum A describatur hyperbola, ea lege, ut sit AI ad quamvis VG ut XV^n ad XI^n.



Reg. 6. Quo major est numerus n, eo magis accuratæ sunt hæ hyperbolæ in ascensu corporis ab A, & minus accuratæ in ejus descensu ad K; & contra. Hyperbola conica mediocrem rationem tenet, estque cæteris simplicior. Igitur si hyperbola sit hujus generis, & punctum K, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis AN per punctum A transeuntem, quæratur: occurrat producta AN asymptotis MX, NX in M & N, & sumatur NK ipsi AM æqualis.

Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc hyper-

hyperbolam ex phænomenis. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia, eadem velocitate, in angulis diverſis *HAK*, *hAk*, incidantque in planum horizontis in *K* & *k*; & notetur proportio *AK* ad *Ak*. Sit ea *d* ad *e*. Tum erecto cujuſvis longitudinis perpendiculo *AI*, aſſume utcunque longitudinem *AH* vel *Ah*, & inde collige graphice longitudines *AK*, *Ak*, per reg. 6. Si ratio *AK* ad *Ak* ſit eadem cum ratione *d* ad *e*, longitudo *AH* recte aſſumpta fuit. Sin minus cape in recta infinita *SM* longitudinem *SM* æqualem aſſumptæ *AH*, & erige perpendiculum *MN* æquale rationum differentiæ $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex aſſumptis pluribus longitudinibus *AH* invenienda ſunt plura puncta *N*, & per omnia agenda curva linea regularis *NNXN*, ſecans rectam *SMMM* in *X*. Aſſumatur demum *AH* æqualis abſciſſæ *SX*, & inde denuo inveniatur longitudo *AK*; & longitudines, quæ ſint ad aſſumptam longitudinem *AI* & hanc ultimam *AH*, ut longitudo *AK* per experimentum cognita ad ultimo inventam longitudinem *AK*, erunt veræ illæ longitudines *AI* & *AH*, quas invenire oportuit. Hiſce vero datis dabitur & reſiſtentia medii in loco *A*, quippe quæ ſit ad vim gravitatis ut *AH* ad 2*AI*. Augenda eſt autem denſitas medii per reg. 4. & reſiſtentia modo inventa, ſi in eadem ratione augeatur, fiet accuratior.



Reg. 8. Inventis longitudinibus *AH*, *HX*; ſi jam deſideretur poſitio rectæ *AH*, ſecundum quam projectile, data illa cum velocitate emiſſum, incidit in punctum quodvis *K*: ad puncta *A* & *K* erigantur rectæ *AC*, *KF* horizonti perpendiculares, quarum *AC* deorſum tendat, & æquetur ipſi *AI* ſeu $\frac{1}{2}HX$. Aſymptotis *AK*, *KF* deſcribatur hyperbola, cujus conjugata tranſeat per punctum *C*, centroque *A* & intervallo *AH* deſcribatur circulus ſecans hyperbolam illam in puncto *H*; & projectile ſecundum rectam *AH* emiſſum incidet in punctum *K*. *Q. E. I.* Nam punctum *H*, ob datam longitudinem *AH*, locatur alicubi in circulo deſcripto. Agatur *CH* occurrens ipſis *AK* & *KF*, illi in *E*, huic in *F*; & ob parallelas *CH*, *MX* & æquales *AC*, *AI*, erit *AE* æqualis *AM*, & prop-

De Motu Corporum

& propterea etiam æqualis KN. Sed CE eſt ad AE ut FH ad KN, & propterea CE & FH æquantur. Incidit ergo punctum H in hyperbolam aſymptotis AK, KF deſcriptam, cujus conjugata tranſit per punctum C, atque ideo reperitur in communi interſectione hyperbolæ hujus & circuli deſcripti. *Q. E. D.* Notandum eſt autem quod hæc operatio perinde ſe habet, ſive recta AKN horizonti parallela ſit, ſive ad horizontem in angulo quovis inclinata: quodque ex duabus interſectionibus H, H duo prodeunt anguli NAH, NAH; & quod in praxi mechanica ſufficit circulum ſemel deſcribere, deinde regulam interminatam CH ita applicare ad punctum C, ut ejus pars FH, circulo & rectæ FK interjecta, æqualis ſit ejus parti CE inter punctum C & rectam AK ſitæ.

Quæ de hyperbolis dicta ſunt facile applicantur ad parabolas. Nam ſi $XAGK$ parabolam deſignet quam recta XV tangat in vertice X, ſintque ordinatim applicatæ IA, VG ut quælibet abſciſſarum XI, XV dignitates XI^n, XV^n; agantur XT, GT, AH, quarum XT parallela ſit VG, & GT, AH parabolam tangant in G & A: & corpus de loco quovis A, ſecundum rectam AH productam, juſta cum velocitate projectum, deſcribet hanc parabolam, ſi modo denſitas medii, in locis ſingulis G, ſit reciproce ut tangens GT. Velocitas autem in G ea erit quacum projectile pergeret, in ſpatio non reſiſtente, in parabola conica verticem G, diametrum VG deorſum productam, & latus rectum $\frac{2GTq}{nn-n \times VG}$ habente. Et reſiſtentia in G erit ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn-2n}{n-2}VG$. Unde ſi NAK lineam horizontalem deſignet, & manente tum denſitate medii in A, tum velocitate quacum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX, & inde datur parabolæ vertex X, & poſitio rectæ XI, & ſumendo VG ad IA ut XV^n ad XI^n, dantur omnia parabolæ puncta G, per quæ projectile tranſibit.

SECTIO

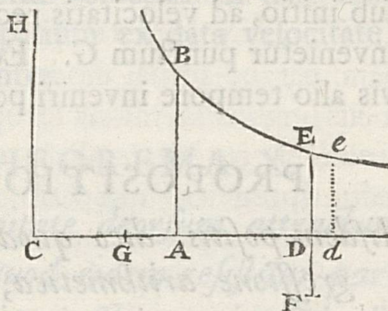
SECTIO III.

De motu corporum quibus resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata.

PROPOSITIO XI. THEOREMA VIII.

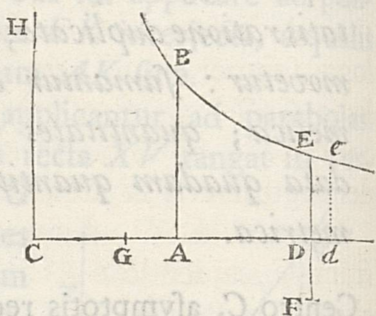
Si corpori resistitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicata, & idem sola vi insita in medio similari movetur: sumantur autem tempora in progressione arithmetica; quantitates velocitatibus reciproce proportionales, data quadam quantitate auctæ, erunt in progressione geometrica.

Centro C, asymptotis rectangulis $CADd$ & CH, describatur hyperbola BEe, & asymptoto CH parallelæ sint AB, DE, de. In asymptoto CD dentur puncta A, G: Et si tempus exponatur per aream hyperbolicam $ABED$ uniformiter crescentem; dico quod velocitas exponi potest per longitudinem DF, cujus reciproca GD una cum data CG componat longitudinem CD in progressione geometrica crescentem.



Sit enim areola $DEed$ datum temporis incrementum quam minimum, & erit Dd reciproce ut DE, ideoque directe ut CD. Ipsius autem $\frac{1}{GD}$ decrementum, quod (per hujus lem. II.) est $\frac{Dd}{GDq}$, erit ut $\frac{CD}{GDq}$ seu $\frac{CG+GD}{GDq}$, id est, ut $\frac{1}{GD}+\frac{CG}{GDq}$. Igitur tempore $ABED$ per additionem datarum particularum $EDde$ uniformiter crescente, decrescit $\frac{1}{GD}$ in eadem ratione cum velocitate. Nam decrementum velocitatis est ut resistentia, hoc

est (per hypothesin) ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut quadratum velocitatis; & ipsius $\frac{1}{GD}$ decrementum est ut summa quantitatum $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GDq}$, quarum prior est ipsa $\frac{1}{GD}$, & posterior $\frac{CG}{GDq}$ est ut $\frac{1}{GDq}$: proinde $\frac{1}{GD}$, ob analogum decrementum, est ut velocitas. Et si quantitas GD, ipsi $\frac{1}{GD}$ reciproce proportionalis, quantitate data CG augeatur; summa CD, tempore $ABED$ uniformiter crescente, crescet in progressione geometrica. *Q. E. D.*



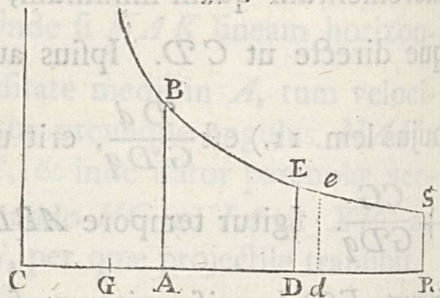
Corol. 1. Igitur si, datis punctis A, G, exponatur tempus per aream hyperbolicam $ABED$, exponi potest velocitas per ipsius GD reciprocam $\frac{1}{GD}$.

Corol. 2. Sumendo autem GA ad GD ut velocitatis reciproca sub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujusvis $ABED$, invenietur punctum G. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri potest.

PROPOSITIO XII. THEOREMA IX.

Iisdem positis, dico quod si spatia descripta sumantur in progressione arithmetica, velocitates data quadam quantitate auctæ erunt in progressione geometrica.

In asymptoto CD detur punctum R, & erecto perpendiculo RS, quod occurrat hyperbolæ in S, exponatur descriptum spatium per aream hyperbolicam $RSED$; & velocitas erit ut longitudo GD, quæ cum data CG componit longitudinem CD in progressione geometrica decrescentem, interea dum spatium $RSED$ augetur in arithmetica.



Etenim

Etenim ob datum ſpatii incrementum *EDde*, lineola *Dd*, quæ decrementum eſt ipſius *GD*, erit reciproce ut *ED*, ideoque directe ut *CD*, hoc eſt, ut ſumma ejuſdem *GD* & longitudinis datæ *CG*. Sed velocitatis decrementum, tempore ſibi reciproce proportionali, quo data ſpatii particula *DdeE* deſcribitur, eſt ut reſiſtentia & tempus conjunctim, id eſt, directe ut ſumma duarum quantitatum, quarum una eſt ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inverſe ut velocitas; ideoque directe ut ſumma duarum quantitatum, quarum una datur, altera eſt ut velocitas. Decrementum igitur tam velocitatis quam lineæ *GD*, eſt ut quantitas data & quantitas decreſcens conjunctim, & propter analoga decrementa, analogæ ſemper erunt quantitates decreſcentes; nimirum velocitas & linea *GD*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si velocitas exponatur per longitudinem *GD*, ſpatium deſcriptum erit ut area hyperbolica *DESR*.

Corol. 2. Et ſi utcunque aſſumatur punctum *R*, invenietur punctum *G* capiendo *GR* ad *GD*, ut eſt velocitas ſub initio ad velocitatem poſt ſpatium quodvis *RSED* deſcriptum. Invento autem puncto *G*, datur ſpatium ex data velocitate, & contra.

Corol. 3. Unde cum (per prop. XI.) detur velocitas ex dato tempore, & per hanc propoſitionem detur ſpatium ex data velocitate; dabitur ſpatium ex dato tempore: & contra.

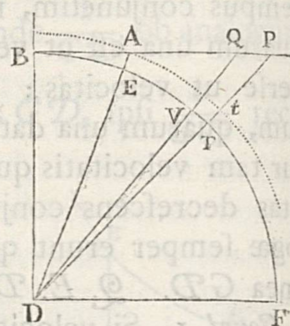
PROPOSITIO XIII. THEOREMA X.

Poſito quod corpus ab uniformi gravitate deorſum attractum recta aſcendit vel deſcendit; & quod eidem reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata: dico quod, ſi circuli & hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates ſint ut ſegmenta quædam parallelarum a dato puncto ducta; tempora erunt ut arearum ſectores, rectis a centro ad ſegmentorum terminos ductis abſciſſi: & contra.

Caſ. 1. Ponamus primo quod corpus aſcendit, centroque *D* & ſemidiametro quovis *DB* deſcribatur circuli quadrans *BETF*, &

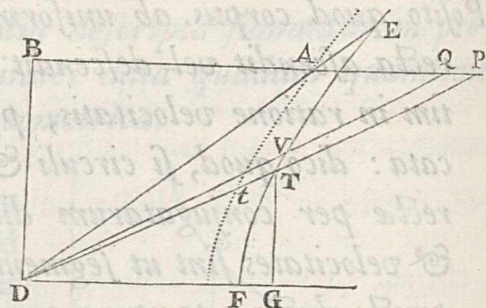
De Motu Corporum

per semidiametri DB terminum B agatur infinita BAP, semidiametro DF parallela. In ea detur punctum A, & capiatur segmentum AP velocitati proportionale. Et cum resistentiæ pars altera sit ut velocitas & pars altera ut velocitatis quadratum; sit resistentia tota ut AP *quad.* $+ 2BAP$. Jungantur DA, DP circulum secantes in E ac T, & exponatur gravitas per DA *quad.* ita ut sit gravitas ad resistentiam in P ut DAq ad $APq + 2BAP$: & tempus ascensus totius erit ut circuli sector EDT.



Agatur enim DVQ, abscindens & velocitatis AP momentum PQ, & sectoris DET momentum DTV dato temporis momento respondens; & velocitatis decrementum illud PQ erit ut summa virium gravitatis DAq & resistentiæ $APq + 2BAP$, id est (per prop. 12. lib. 2. elem.) ut DP *quad.* Proinde area DPQ, ipsi PQ proportionalis, est ut DP *quad.* & area DTV, quæ est ad aream DPQ ut DTq ad DPq, est ut datum DTq. Decrescit igitur area EDT uniformiter ad modum temporis futuri, per subductionem datarum particularum DTV, & propterea tempori ascensus totius proportionalis est. *Q. E. D.*

Cas. 2. Si velocitas in ascensu corporis exponatur per longitudinem AP ut prius, & resistentia ponatur esse ut $APq + 2BAP$, & si vis gravitatis minor sit quam quæ per DAq exponi possit; capiatur BD ejus longitudinis, ut sit $ABq - BDq$ gravitati proportionale, sitque DF ipsi DB perpendicularis & æqualis, & per verticem F describatur hyperbola $FTVE$, cujus semidiametri conjugatæ sint DB & DF, quæque secet DA in E, & DP, DQ in T & V; & erit tempus ascensus totius ut hyperbolæ sector TDE.



Nam velocitatis decrementum PQ, in data temporis particula factum, est ut summa resistentiæ $APq + 2BAP$ & gravitatis $ABq - BDq$, id est, ut $BPq - BDq$. Est autem area DTV ad aream DPQ, ut DTq ad DPq; ideoque, si ad DF demittatur perpendiculum GT, ut GTq seu $GDq - DFq$ ad

ad BDq, utque GDq ad BPq, & diviſim ut DFq ad $BPq - BDq$. Quare cum area DPQ ſit ut PQ, id eſt, ut $BPq - BDq$; erit area DTV ut datum DFq. Decreſcit igitur area EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per ſubductionem particularum totidem datarum DTV, & propterea tempori proportionalis eſt. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Sit AP velocitas in deſcenſu corporis, & $APq + 2BAP$ reſiſtentia, & $BDq - ABq$ vis gravitatis, exiſtente angulo DBA recto. Et ſi centro D, vertice principali B, deſcribatur hyperbola rectangula $BETV$ ſecans productas DA, DP & DQ in E, T & V; erit hyperbolæ hujus ſector DET ut tempus totum deſcenſus.

Nam velocitatis incrementum PQ, eique proportionalis area DPQ, eſt ut exceſſus gravitatis ſupra reſiſtentiam, id eſt, ut $BDq - ABq - 2BAP - APq$ ſeu $BDq - BPq$. Et area DTV eſt ad aream DPQ ut DTq ad DPq, ideoque ut GTq ſeu $GDq - BDq$ ad BPq, utque GDq ad BDq, & diviſim ut BDq ad $BDq - BPq$. Quare cum area DPQ ſit ut $BDq - BPq$, erit area DTV ut datum BDq. Creſcit igitur area EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum DTV, & propterea tempori deſcenſus proportionalis eſt. *Q.E.D.*

Corol. Si centro D ſemidiametro DA per verticem A ducatur arcus At ſimilis arcui ET, & ſimiliter ſubtendens angulum ADT: velocitas AP erit ad velocitatem, quam corpus tempore EDT, in ſpatio non reſiſtente, aſcendendo amittere vel deſcendendo acquirere poſſet, ut area trianguli DAP ad aream ſectoris DAt; ideoque ex dato tempore datur. Nam velocitas, in medio non reſiſtente, tempori, atque ideo ſectori huic proportionalis eſt; in medio reſiſtente eſt ut triangulum; & in medio utroque, ubi quam minima eſt, accedit ad rationem æqualitatis, pro more ſectoris & trianguli.

Scholium.

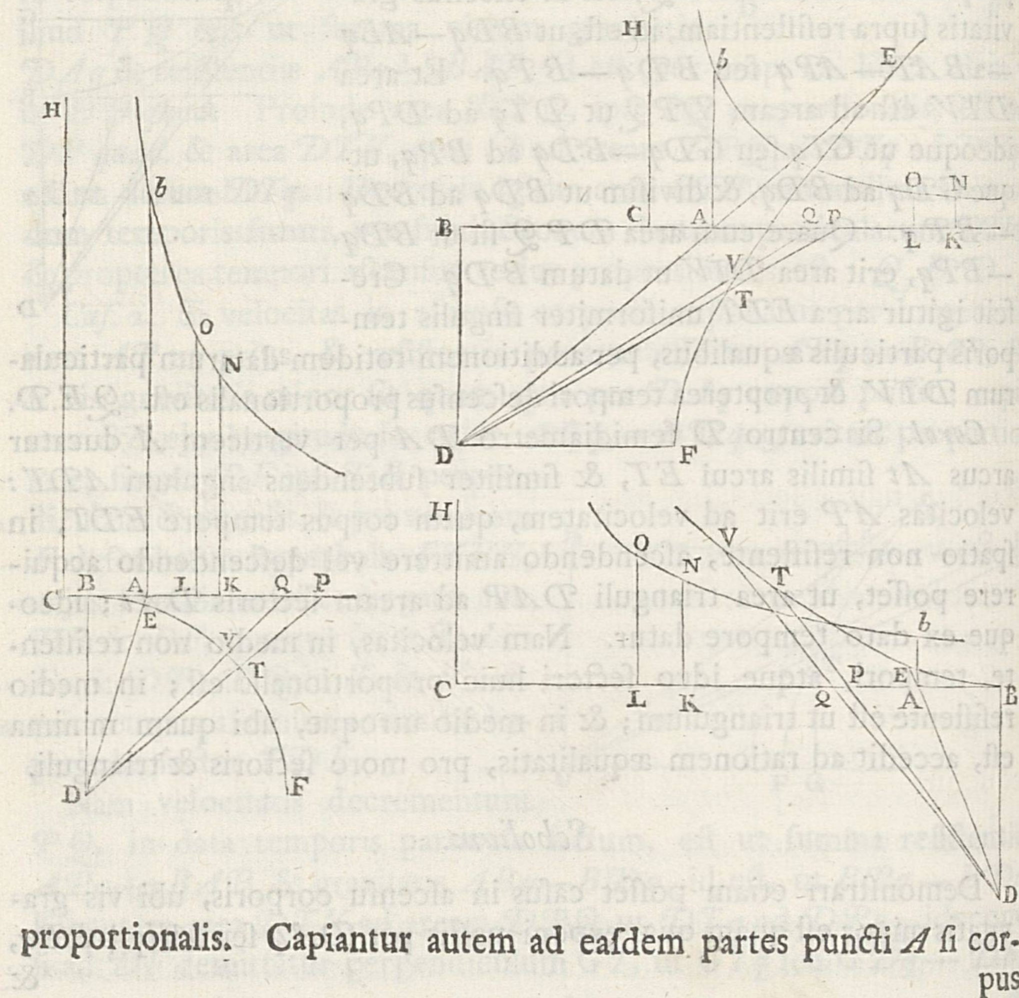
Demonſtrari etiam poſſet caſus in aſcenſu corporis, ubi vis gravitatis minor eſt quam quæ exponi poſſit per DAq ſeu $ABq + BDq$, &

& major quam quæ exponi possit per $ABq-BDq$, & exponi debet per ABq. Sed propero ad alia.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XI.

Iisdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressione arithmetica; si vires ex resistentia & gravitate compositæ sumantur in progressione geometrica.

Capiatur AC (in fig. tribus ultimis) gravitati, & AK resistentiæ



proportionalis. Capiantur autem ad easdem partes puncti A si corpus

pus descendit, aliter ad contrarias. Erigatur *Ab*, quæ sit ad *DB* ut *DBq* ad $4BAC$: & descripta ad asymptotos rectangulas *CK*, *CH* hyperbola *bN*, erectaque *KN* ad *CK* perpendiculari, area *AbNK* augebitur vel diminuetur in progressione arithmetica, dum vires *CK* in progressione geometrica sumuntur. Dico igitur quod distantia corporis ab ejus altitudine maxima sit ut excessus areæ *AbNK* supra aream *DET*.

Nam cum *AK* sit ut resistentia, id est, ut $APq + 2BAP$; assumatur data quævis quantitas Z, & ponatur *AK* æqualis $\frac{APq + 2BAP}{Z}$; & (per hujus lemma II.) erit ipsius *AK* momentum *KL* æquale $\frac{2APQ + 2BA \times PQ}{Z}$ seu $\frac{2BPQ}{Z}$, & areæ *AbNK* momentum *KLON* æquale $\frac{2BPQ \times LO}{Z}$ seu $\frac{BPQ \times BD\,cub.}{2Z \times CK \times AB}$.

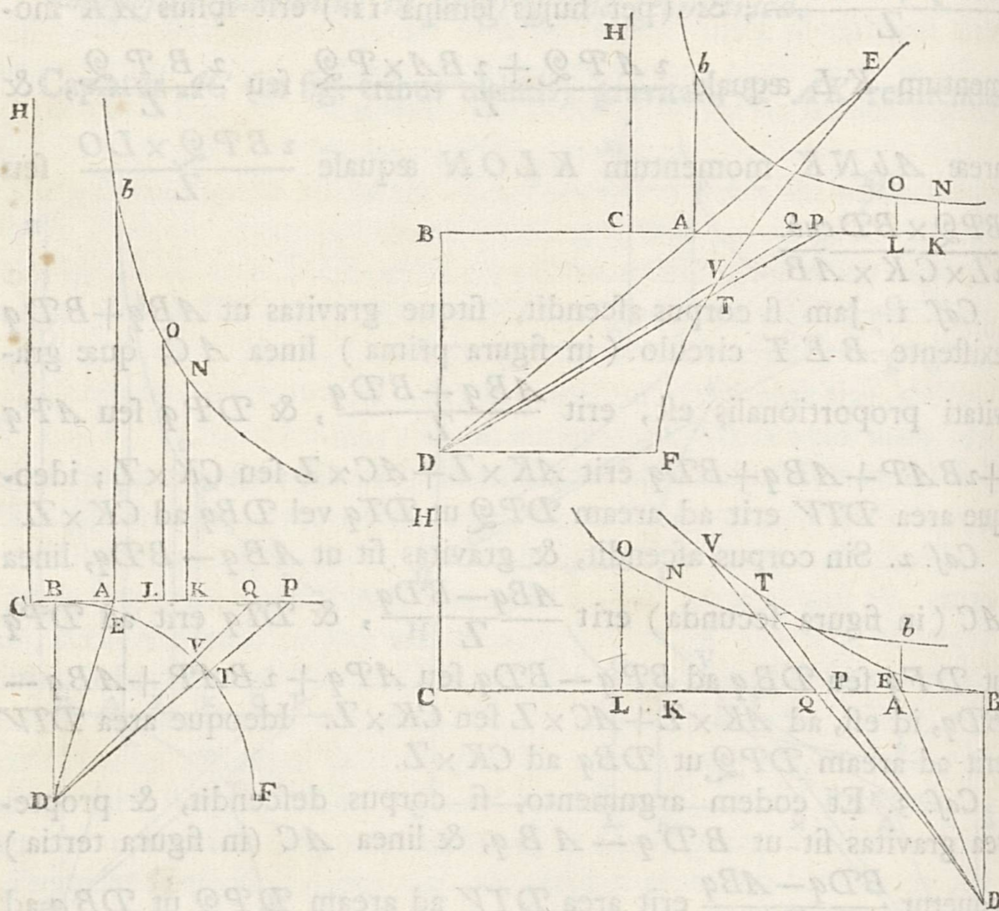
Cas. 1. Jam si corpus ascendit, sitque gravitas ut $ABq + BDq$ existente *BET* circulo (in figura prima) linea *AC*, quæ gravitati proportionalis est, erit $\frac{ABq + BDq}{Z}$, & *DPq* seu $APq + 2BAP + ABq + BDq$ erit $AK \times Z + AC \times Z$ seu $CK \times Z$; ideoque area *DTV* erit ad aream *DPQ* ut *DTq* vel *DBq* ad $CK \times Z$.

Cas. 2. Sin corpus ascendit, & gravitas sit ut $ABq - BDq$, linea *AC* (in figura secunda) erit $\frac{ABq - BDq}{Z}$, & *DTq* erit ad *DPq* ut *DFq* seu *DBq* ad $BPq - BDq$ seu $APq + 2BAP + ABq - BDq$, id est, ad $AK \times Z + AC \times Z$ seu $CK \times Z$. Ideoque area *DTV* erit ad aream *DPQ* ut *DBq* ad $CK \times Z$.

Cas. 3. Et eodem argumento, si corpus descendit, & propterea gravitas sit ut $BDq - ABq$, & linea *AC* (in figura tertia) æquetur $\frac{BDq - ABq}{Z}$ erit area *DTV* ad aream *DPQ* ut *DBq* ad $CK \times Z$: ut supra.

Cum igitur areæ illæ semper sint in hac ratione; si pro area *DTV*, qua momentum temporis sibimet ipsi semper æquale exponitur, scribatur determinatum quodvis rectangulum, puta $BD \times m$, erit

erit area DPQ, id est, $\frac{1}{2}BD \times PQ$; ad $BD \times m$ ut $CK \times Z$ ad BDq. Atque inde fit $PQ \times BD$ *cub.* æquale $2BD \times m \times CK \times Z$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ superius inventum fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Auferatur areæ DET momentum DTV seu $BD \times m$, & restabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Est igitur differentia momentorum, id est, momentum differentiæ arearum, æqualis $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; & propterea



ob datum $\frac{BD \times m}{AB}$ ut velocitas AP, id est, ut momentum spatii quod corpus ascendendo vel descendendo describit. Ideoque differentia arearum & spatium illud, proportionalibus momentis crescentia

tia vel decrescentia & simul incipientia vel simul evanescentia, sunt proportionalia. *Q. E. D.*

Corol. Si longitudo, quæ oritur applicando aream *DET* ad lineam *BD*, dicatur *M*; & longitudo alia *V* sumatur in ea ratione ad longitudinem *M*, quam habet linea *DA* ad lineam *DE*: spatium, quod corpus ascensu vel descensu toto in medio resistente describit, erit ad spatium, quod corpus in medio non resistente e quiete cadendo eodem tempore describere potest, ut arearum prædictarum differentia ad $\frac{BD \times V^2}{AB}$: ideoque ex dato tempore datur. Nam spatium in medio non resistente est in duplicata ratione temporis, sive ut V^2; & ob datas *BD* & *AB* ut $\frac{BD \times V^2}{AB}$. Hæc area æqualis est areæ $\frac{DAq \times BD \times M^2}{DEq \times AB}$, & ipsius *M* momentum est *m*; & propterea hujus areæ momentum est $\frac{DAq \times BD \times 2M \times m}{DEq \times AB}$. Hoc autem momentum est ad momentum differentiæ arearum prædictarum *DET* & *AbNK*, viz. ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, ut $\frac{DAq \times BD \times M}{DEq}$ ad $\frac{1}{2}BD \times AP$, sive ut $\frac{DAq}{DEq}$ in *DET* ad *DAP*; ideoque, ubi areæ *DET* & *DAP* quam minimæ sunt, in ratione æqualitatis. Area igitur $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & differentia arearum *DET* & *AbNK*, quando omnes hæ areæ quam minimæ sunt, æqualia habent momenta; ideoque sunt æquales. Unde cum velocitates, & propterea etiam spatia in medio utroque in principio descensus vel fine ascensus simul descripta accedant ad æqualitatem; ideoque tunc sint ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & arearum *DET* & *AbNK* differentia; & præterea cum spatium in medio non resistente sit perpetuo ut $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & spatium in medio resistente sit perpetuo ut arearum *DET* & *AbNK* differentia: necesse est, ut spatia in medio utroque, in æqualibus quibuscunque temporibus descripta, sint ad invicem ut area

De Motu Corporum illa $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & arearum DET & $AbNK$ differentia. *Q. E. D.*

Scholium.

Resistentia corporum sphæricorum in fluidis oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, & partim ex densitate medii. Et resistentiæ partem illam, quæ oritur ex densitate fluidi diximus esse in duplicata ratione velocitatis; pars altera, quæ oritur ex tenacitate fluidi, est uniformis, sive ut momentum temporis: ideoque jam pergere liceret ad motum corporum, quibus resistitur partim vi uniformi seu in ratione momentorum temporis, & partim in ratione duplicata velocitatis. Sed sufficit aditum patefecisse ad hanc speculationem in propositionibus VIII. & IX. quæ præcedunt, & eorum corollariis. In iisdem utique pro corporis ascendentis resistentia uniformi, quæ ex ejus gravitate oritur, substitui potest resistentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii, quando corpus sola vi insita movetur; & corpore recta ascendente addere licet hanc uniformem resistentiam vi gravitatis; eandemque subducere, quando corpus recta descendit. Pergere etiam liceret ad motum corporum, quibus resistitur partim uniformiter, partim in ratione velocitatis, & partim in ratione duplicata velocitatis. Et viam aperui in propositionibus præcedentibus XIII. & XIV. in quibus etiam resistentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii pro vi gravitatis substitui potest, vel cum eadem, ut prius, componi. Sed propero ad alia.

SECTIO IV.

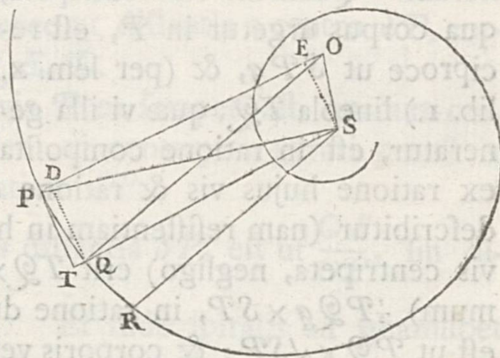
De corporum circulari motu in mediis resistentibus.

LEMMA III.

Sit PQR *spiralis quæ secet radios omnes* SP, SQ, SR, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* PT *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *secetque radium* SQ *in* T; *& ad spiralem erectis perpendiculis* PO, QO *concurrentibus in* O, *jun-*

O, *jungatur* SO. *Dico quod si puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* PSO *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* TQ×2PS *ad* PQ *quad. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis *OPQ*, *OQR* subducantur anguli æquales *SPQ*, *SQR*, & manebunt anguli æquales *OPS*, *OQS*. Ergo circulus qui transit per puncta *O*, *S*, *P* transibit etiam per punctum *Q*. Coeant puncta *P* & *Q*, & hic circulus in loco coitus *PQ* tanget spiralem, ideoque perpendiculariter secabit rectam *OP*. Fiet igitur *OP* diameter circuli hujus, & angulus *OSP* in semicirculo rectus. *Q. E. D.*



Ad *OP* demittantur perpendicula *QD*, *SE*, & linearum rationes ultimæ erunt hujusmodi: *TQ* ad *PD* ut *TS* vel *PS* ad *PE*, seu 2*PO* ad 2*PS*; item *PD* ad *PQ* ut *PQ* ad 2*PO*; & ex æquo perturbate *TQ* ad *PQ* ut *PQ* ad 2*PS*. Unde fit *PQq* æquale *TQ*× 2*PS*. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XV. THEOREMA XII.

Si medii densitas in locis singulis sit reciproce ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta in duplicata ratione densitatis: dico quod corpus gyrari potest in spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Ponantur quæ in superiore lemmate, & producatur *SQ* ad *V*, ut sit *SV* æqualis *SP*. Tempore quovis, in medio resistente, describat corpus arcum quam minimum *PQ*, & tempore duplo arcum quam minimum *PR*; & decrementa horum arcuum ex resistentia oriunda, sive defectus ab arcubus, qui in medio non resistente iisdem

De Motu Corporum

temporibus deſcriberentur, erunt ad invicem ut quadrata temporum in quibus generantur :. Eſt itaque decrementum arcus PQ pars quarta decrementi arcus PR. Unde etiam, ſi areæ PSQ æqualis capiatur area QSr, erit decrementum arcus PQ æquale dimidio lineolæ Rr; ideoque vis reſiſtentiæ & vis centripeta ſunt ad invicem ut lineolæ $\frac{1}{2}Rr$ & TQ quas ſimul generant. Quoniam vis centripeta, qua corpus urgetur in P, eſt reciproce ut SPq, & (per lem. x. lib. 1.) lineola TQ, quæ vi illa generatur, eſt in ratione compoſita ex ratione hujus vis & ratione duplicata temporis quo arcus PQ deſcribitur (nam reſiſtentiam in hoc caſu, ut infinite minorem quam vis centripeta, negligo) erit $TQ \times SPq$, id eſt (per lemma noviſſimum) $\frac{1}{2}PQq \times SP$, in ratione duplicata temporis, ideoque tempus eſt ut $PQ \times \sqrt{SP}$; & corporis velocitas, qua arcus PQ illo tempore deſcribitur, ut $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ ſeu $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, hoc eſt, in ſubduplicata ratione ipſius SP reciproce. Et ſimili argumento, velocitas qua arcus QR deſcribitur, eſt in ſubduplicata ratione ipſius SQ reciproce. Sunt autem arcus illi PQ & QR ut velocitates deſcriptrices ad invicem, id eſt, in ſubduplicata ratione SQ ad SP, ſive ut SQ ad $\sqrt{SP \times SQ}$; & ob æquales angulos SPQ, SQr & æquales areas PSQ, QSr, eſt arcus PQ ad arcum Qr ut SQ ad SP. Sumantur proportionalium conſequentium differentiæ, & fiet arcus PQ ad arcum Rr ut SQ ad $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, ſeu $\frac{1}{2}VQ$. Nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima $SP - \sqrt{SP \times SQ}$ ad $\frac{1}{2}VQ$ eſt æqualitatis. Quoniam decrementum arcus PQ, ex reſiſtentia oriundum, ſive hujus duplum Rr, eſt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim; erit reſiſtentia ut $\frac{Rr}{PQq \times SP}$. Erat autem PQ ad Rr, ut SQ ad $\frac{1}{2}VQ$, & inde $\frac{Rr}{PQq \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2}VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ ſive ut $\frac{\frac{1}{2}OS}{OP \times SPq}$. Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coincidunt, & angulus PVQ fit rectus; & ob ſimilia triangula PVQ, PSO, fit PQ ad

ad $\frac{1}{2}VQ$ ut OP ad $\frac{1}{2}OS$. Est igitur $\frac{OS}{OP \times SPq}$ ut resistentia, id est, in ratione densitatis medii in P & ratione duplicata velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit medii densitas in P ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Detur spiralis, & ob datam rationem OS ad OP, densitas medii in P erit ut $\frac{1}{SP}$. In medio igitur cujus densitas est reciproce ut distantia a centro SP, corpus gyrari potest in hac spirali. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas in loco quovis P ea semper est, quacum corpus in medio non resistente eadem vi centripeta gyrari potest in circulo, ad eandem a centro distantiam SP.

Corol. 2. Medii densitas, si datur distantia SP, est ut $\frac{OS}{OP}$, sin distantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et inde spiralis ad quamlibet medii densitatem aptari potest.

Corol. 3. Vis resistentiæ in loco quovis P, est ad vim centripetam in eodem loco ut $\frac{1}{2}OS$ ad OP. Nam vires illæ sunt ad invicem ut $\frac{1}{2}Rr$ & TQ sive ut $\frac{\frac{1}{4}VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{\frac{1}{2}PQq}{SP}$, hoc est, ut $\frac{1}{2}VQ$ & PQ, seu $\frac{1}{2}OS$ & OP. Data igitur spirali datur proportio resistentiæ ad vim centripetam, & vice versa ex data illa proportione datur spiralis.

Corol 4. Corpus itaque gyrari nequit in hac spirali, nisi ubi vis resistentiæ minor est quam dimidium vis centripetæ. Fiat resistentia æqualis dimidio vis centripetæ, & spiralis conveniet cum linea recta PS, inque hac recta corpus descendet ad centrum ea cum velocitate, quæ sit ad velocitatem, qua probavimus in superioribus in casu parabolæ (theor. x. lib. 1.) descensum in medio non resistente fieri, in subduplicata ratione unitatis ad numerum binarium. Et tempora descensus hic erunt reciproce ut velocitates, atque ideo dantur.

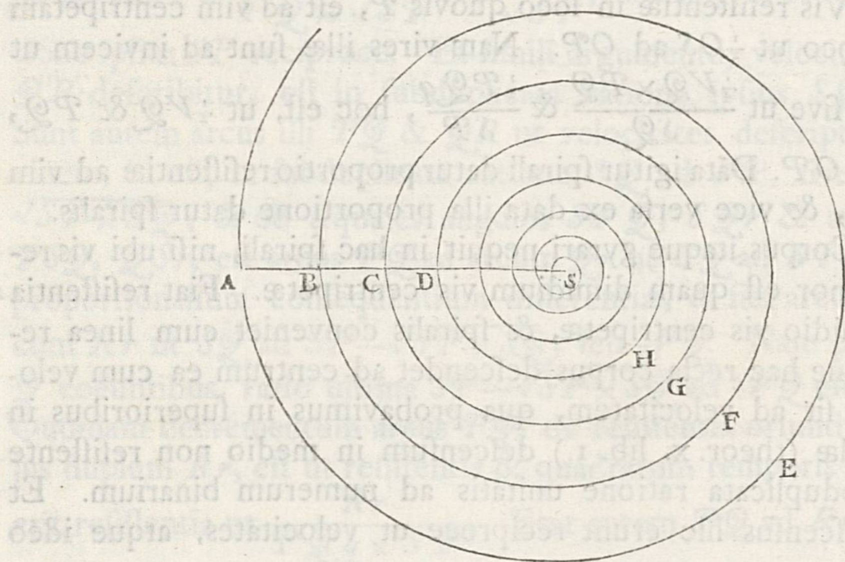
Corol. 5. Et quoniam in æqualibus a centro distantiis velocitas eadem est in spirali PQR atque in recta SP, & longitudo spiralis ad longitudinem rectæ PS est in data ratione, nempe in ratione OP ad OS;

DE MOTU CORPORUM

OS; tempus descensus in spirali erit ad tempus descensus in recta SP in eadem illa data ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro S intervallis duobus quibuscunque datis describantur duo circuli; & manentibus hisce circulis, mutetur utcunque angulus quem spiralis continet cum radio PS: numerus revolutionum quas corpus intra circulorum circumferentias, pergendo in spirali a circumferentia ad circumferentiam, complere potest, est ut $\frac{PS}{OS}$, sive ut tangens anguli illius quem spiralis continet cum radio PS; tempus vero revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id est, ut secans anguli ejusdem, vel etiam reciproce ut medii densitas.

Corol. 7. Si corpus in medio, cujus densitas est reciproce ut distantia locorum a centro, revolutionem in curva quacunque AEB circa centrum illud fecerit, & radium primum AS in eodem angulo secuerit in B quo prius in A, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem suam primam in A reciproce in subduplicata ratione distantiarum a centro (id est, ut AS ad mediam proportionalem inter AS



& BS) corpus illud perget innumeras consimiles revolutiones BFC, CGD, &c. facere, & intersectionibus distinguet radium AS in partes AS, BS, CS, DS, &c. continue proportionales. Revolutionum vero

vero tempora erunt ut perimetri orbitarum *AEB*, *BFC*, *CGD*, &c. directe, & velocitates in principiis *A*, *B*, *C*, inverse; id est, ut $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut summa omnium continue proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; id est, ut terminus ille primus $AS^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, sive ut $\frac{2}{3}AS$ ad *AB* quam proxime. Unde tempus illud totum expedite invenitur.

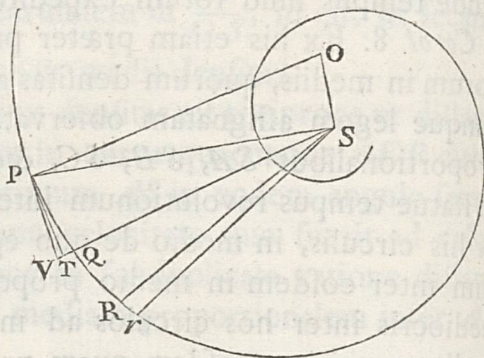
Corol. 8. Ex his etiam præter propter colligere licet motus corporum in mediis, quorum densitas aut uniformis est, aut aliam quamcunque legem assignatam observat. Centro *S*, intervallis continue proportionalibus *SA*, *SB*, *SC*, &c. describe circulos quotcunque, & statue tempus revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in medio de quo egimus, esse ad tempus revolutionum inter eosdem in medio proposito, ut medii propositi densitas mediocris inter hos circulos ad medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quam proxime: Sed & in eadem quoque ratione esse secantem anguli quo spiralis præfinita, in medio de quo egimus, secat radium *AS*, ad secantem anguli quo spiralis nova secat radium eundem in medio proposito: Atque etiam ut sunt eorundem angulorum tangentes ita esse numeros revolutionum omnium inter circulos eosdem duos quam proxime. Si hæc fiant passim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possimus quibus modis ac temporibus corpora in medio quocunque regulari gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in spiralibus ad formam ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo spiralium illarum singulas revolutiones iisdem ab invicem intervallis distare, iisdemque gradibus ad centrum accedere cum spirali superius descripta, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujusmodi spiralibus peragantur.

PROPO-

PROPOSITIO XVI. THEOREMA XIII.

Si medii densitas in locis singulis sit reciproce ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta reciproce ut dignitas quælibet ejusdem distantiæ : dico quod corpus gyrari potest in spirali quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.



Demonstratur eadem methodo cum propositione superiore. Nam si vis centripeta in P sit reciproce ut distantiæ SP, dignitas quælibet SP^{n+1} cujus index est $n+1$: colligetur ut supra, quod tempus, quo corpus describit arcum quemvis PQ, erit ut $PQ \times PS^{\frac{1}{2}n}$; & resistentia in P ut $\frac{Rr}{PQq \times SP^{n}}$, sive ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times VQ}{PQ \times SP^{n} \times SQ}$, ideoque ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, hoc est, ob datum $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP}$, reciproce ut SP^{n+1}. Et propterea, cum velocitas sit reciproce ut $SP^{\frac{1}{2}n}$, densitas in P erit reciproce ut SP.

Corol. 1. Resistentia est ad vim centripetam ut $\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS$ ad OP.

Corol. 2. Si vis centripeta sit reciproce ut SP *cub.* erit $1-\frac{1}{2}n=0$; ideoque resistentia & densitas medii nulla erit, ut in propositione nona libri primi.

Corol. 3. Si vis centripeta sit reciproce ut dignitas aliqua radii SP cujus index est major numero 3, resistentia affirmativa in negativam mutabitur.

Scholium.

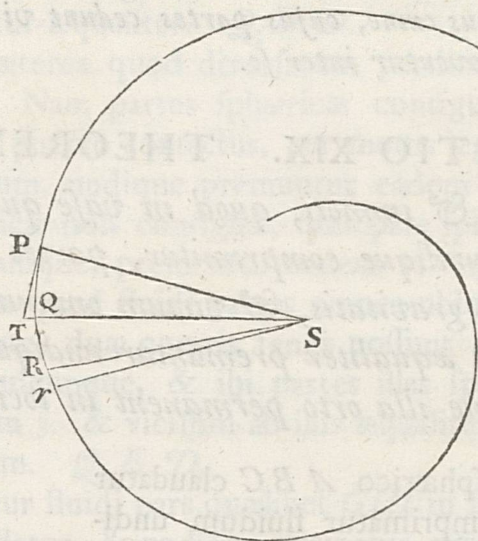
Cæterum hæc propositio & superiores, quæ ad media inæqualiter densa spectant, intelligendæ sunt de motu corporum adeo parvorum, ut

ut medii ex uno corporis latere major denſitas quam ex altero non conſideranda veniat. Reſiſtentiam quoque cæteris paribus denſitati proportionalem eſſe ſuppono. Unde in mediis, quorum vis reſiſtendi non eſt ut denſitas, debet denſitas eo uſque augeri vel diminui, ut reſiſtentiæ vel tollatur exceſſus vel defectus ſuppleatur.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IV.

Invenire & vim centripetam & medii reſiſtentiam, qua corpus in data ſpirali, data velocitatis lege, revolvi poteſt.

Sit ſpiralis illa *PQR*. Ex velocitate, qua corpus percurrit arcum quam minimum *PQ*, dabitur tempus, & ex altitudine *TQ*, quæ eſt ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex



arearum, æqualibus temporum particulis confectarum *PSQ* & *QSR*, differentia *RSr*, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur reſiſtentia ac denſitas medii.

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA V.

Data lege vis centripetæ, invenire medii denſitatem in locis ſingulis, qua corpus datam ſpiralem deſcribet.

Ex vi centripeta invenienda eſt velocitas in locis ſingulis, deinde

 ex

ex velocitatis retardatione quærenda medii densitas; ut in propositione superiore.

Methodum vero tractandi hæc problemata aperui in hujus propositione decima, & lemmate secundo; & lectorem in hujusmodi perplexis disquisitionibus diutius detinere nolo. Addenda jam sunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque densitate & resistentia mediorum, in quibus motus hactenus expositi & his affines peraguntur.

SECTIO V.

De densitate & compressione fluidorum, deque hydrostatica.

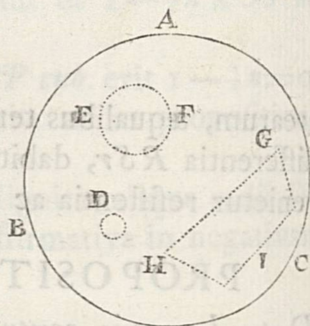
Definitio Fluidi.

Fluidum est corpus omne, cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facile moventur inter se.

PROPOSITIO XIX. THEOREMA XIV.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vase quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (seposita condensationis, gravitatis, & virium omnium centripetarum consideratione) æqualiter premuntur undique, & sine omni motu a pressione illa orto permanent in locis suis.

Cas. 1. In vase sphærico ABC claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejusdem pars nulla ex illa pressione movebitur. Nam si pars aliqua $\mathfrak{D}$ moveatur, necesse est ut omnes hujusmodi partes, ad eandem a centro distantiam undique consistentes, simili motu simul moveantur; atque hoc ideo quia similis & æqualis est omnium pressio, & motus omnis exclusus supponitur, nisi qui a pressione illa oriatur. Atqui non possunt omnes ad centrum propius accedere, nisi fluidum ad centrum condensetur;



denſetur; contra hypotheſin. Non poſſunt longius ab eo recedere, niſi fluidum ad circumferentiam condenſetur; etiam contra hypotheſin. Non poſſunt ſervata ſua a centro diſtantia moveri in plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non poteſt pars eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco ſuo movebitur. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Dico jam, quod fluidi hujus partes omnes ſphæricæ æqualiter premuntur undique. Sit enim *EF* pars ſphærica fluidi, & ſi hæc undique non premitur æqualiter, augeatur preſſio minor, uſque dum ipſa undique prematur æqualiter; & partes ejus, per caſum primum, permanebunt in locis ſuis. Sed ante auctam preſſionem permanebunt in locis ſuis, per caſum eundem primum, & additione preſſionis novæ movebuntur de locis ſuis, per definitionem fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falſo dicebatur quod ſphæra *EF* non undique premebatur æqualiter. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Dico præterea quod diverſarum partium ſphæricarum æqualis ſit preſſio. Nam partes ſphæricæ contiguæ ſe mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, per motus legem III. Sed &, per caſum ſecundum, undique premuntur eadem vi. Partes igitur duæ quævis ſphæricæ non contiguæ, quia pars ſphærica intermedia tangere poteſt utramque, prementur eadem vi. *Q. E. D.*

Caſ. 4. Dico jam quod fluidi partes omnes ubique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi poſſunt a partibus ſphæricis in punctis quibuſcunque, & ibi partes illas ſphæricas æqualiter premunt, per caſum 3. & viciſſim ab illis æqualiter premuntur, per motus legem tertiam. *Q. E. D.*

Caſ. 5. Cum igitur fluidi pars quælibet *GHI* in fluido reliquo tanquam in vaſe claudatur, & undique prematur æqualiter, partes autem ejus ſe mutuo æqualiter premant & quieſcant inter ſe; manifeſtum eſt quod fluidi cujuſcunque *GHI*, quod undique premitur æqualiter, partes omnes ſe mutuo premunt æqualiter, & quieſcunt inter ſe. *Q. E. D.*

Caſ. 6. Igitur ſi fluidum illud in vaſe non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter; cedet idem preſſioni fortiori, per definitionem fluiditatis.

Caſ. 7. Ideoque in vaſe rigido fluidum non ſuſtinebit preſſionem

 forti-

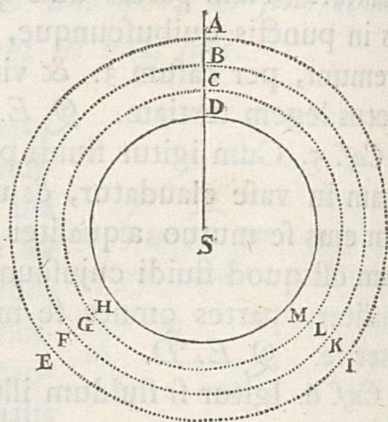
fortiorem ex uno latere quam ex alio, ſed eidem cedet, idque in momento temporis, quia latus vaſis rigidum non perſequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppoſitum, & ſic preſſio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam fluidum, quam primum a parte magis preſſa recedere conatur, inhibetur per reſiſtentiam vaſis ad latus oppoſitum; reducetur preſſio undique ad æqualitatem, in momento temporis, ſine motu locali: & ſubinde partes fluidi, per caſum quintum, ſe mutuo prement æqualiter, & quieſcent inter ſe. *Q. E. D.*

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter ſe, per preſſionem fluido ubivis in externa ſuperficie illatam, mutari poſſunt, niſi quatenus aut figura ſuperficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intenſius vel remiſſius ſeſe premendo difficilius vel facilius labuntur inter ſe.

PROPOSITIO XX. THEOREMA XV.

Si fluidi ſphærici, & in æqualibus a centro diſtantiis homogenei, fundo ſphærico concentrico incumbentis partes ſingulæ verſus centrum totius gravitent; ſuſtinet fundum pondus cylindri, cujus baſis æqualis eſt ſuperficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.

Sit *DHM* ſuperficies fundi, & *AEI* ſuperficies ſuperior fluidi. Superficiebus ſphæricis innumeris *BFK*, *CGL* diſtinguatur fluidum in orbes concentricos æqualiter craſſos; & concipe vim gravitatis agere ſolummodo in ſuperficiem ſuperiorem orbis cujuſque, & æquales eſſe actiones in æquales partes ſuperficierum omnium. Premitur ergo ſuperficies ſuprema *AE* vi ſimplici gravitatis propriæ, qua & omnes orbis ſupremi partes & ſuperficies ſecunda *BFK* (per prop. XIX.) pro menſura ſua æqualiter premuntur. Premitur præterea ſuperficies ſecunda *BFK* vi propriæ gravitatis, quæ addita



addita vi priori facit pressionem duplam. Hac pressione, pro mensura sua, & insuper vi propriæ gravitatis, id est, pressione tripla, urgetur superficies tertia *CGL*. Et similiter pressione quadrupla urgetur superficies quarta, quintupla quinta, & sic deinceps. Pressio igitur qua superficies unaquæque urgetur, non est ut quantitas solida fluidi incumbentis, sed ut numerus orbium ad usque summitatem fluidi; & æquatur gravitati orbis infimi multiplicatæ per numerum orbium: hoc est, gravitati solidi cujus ultima ratio ad cylindrum præfinitum (si modo orbium augeatur numerus & minuatur crassitudo in infinitum, sic ut actio gravitatis a superficie infima ad supremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Sustinet ergo superficies infima pondus cylindri præfiniti. *Q. E. D.* Et simili argumentatione patet propositio, ubi gravitas decrescit in ratione quavis assignata distantiæ a centro, ut & ubi fluidum sursum rarius est, deorsum densius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur a toto fluidi incumbentis pondere, sed eam solummodo ponderis partem sustinet quæ in propositione describitur; pondere reliquo a fluidi figura fornicata sustentato.

Corol. 2. In æqualibus autem a centro distantiis eadem semper est pressionis quantitas, sive superficies pressa sit horizonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; sive fluidum, a superficie pressa sursum continuatum, surgat perpendiculariter secundum lineam rectam, vel serpit oblique per tortas cavitates & canales, easque regulares vel maxime irregulares, amplas vel angustissimas. Hisce circumstantiis pressionem nil mutari colligitur, applicando demonstrationem theorematis hujus ad casus singulos fluidorum.

Corol. 3. Eadem demonstratione colligitur etiam (per prop. XIX.) quod fluidi gravis partes nullum, ex pressione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter se; si modo excludatur motus qui ex condensatione oriatur.

Corol. 4. Et propterea si aliud ejusdem gravitatis specificæ corpus, quod sit condensationis expers, submergatur in hoc fluido, id ex pressione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non descendet, non ascendet, non cogetur figuram suam mutare. Si sphæricum est manebit sphæricum, non obstante pressione; si quadratum est manebit quadratum: idque sive molle sit, sive fluidissimum;

De Motu Corporum

ſive fluido libere innatet, ſive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis ſubmerſi, & par eſt ratio omnium ejuſdem magnitudinis, figuræ & gravitatis ſpecificæ ſubmerſorum corporum. Si corpus ſubmerſum ſervato pondere liqueſceret & indueret formam fluidi; hoc, ſi prius aſcenderet vel deſcenderet vel ex preſſione figuram novam indueret, etiam nunc aſcenderet vel deſcenderet vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus cæteræque motuum cauſæ permanent. Atqui (per caſ. 5. prop. XIX.) jam quieſceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. 5. Proinde corpus quod ſpecifice gravius eſt quam fluidum ſibi contiguum ſubſidebit, & quod ſpecifice levius eſt aſcendet, motumque & figuræ mutationem conſequetur, quantum exceſſus ille vel defectus gravitatis efficere poſſit. Namque exceſſus ille vel defectus rationem habet impulſus, quo corpus, alias in æquilibrio cum fluidi partibus conſtitutum, urgetur; & comparari poteſt cum exceſſu vel defectu ponderis in lance alterutra libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis conſtitutorum duplex eſt gravitas: altera vera & abſoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitas abſoluta eſt vis tota qua corpus deorſum tendit: relativa & vulgaris eſt exceſſus gravitatis quo corpus magis tendit deorſum quam fluidum ambiens. Prioris generis gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis ſuis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave eſt, ut in vaſis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale eſt ponderibus omnium partium, ideoque ex iiſdem componitur. Alterius generis gravitate corpora non gravitant in locis ſuis, id eſt, inter ſe collata non prægravant, ſed mutuos ad deſcendendum conatus impedientia permanent in locis ſuis, perinde ac ſi gravia non eſſent. Quæ in aëre ſunt & non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quatenus ab aëris pondere non ſuſtinentur. Pondera vulgi nihil aliud ſunt quam exceſſus verorum ponderum ſupra pondus aëris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ ſunt minus gravia, aërique prægravanti cedendo ſuperiora petunt. Comparative levia ſunt, non vere, quia deſcendunt in vacuo. Sic & in aqua corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem deſcendunt vel aſcendunt, ſunt comparative &

appa-

apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens est excessus vel defectus quo vera eorum gravitas vel superat gravitatem aquæ vel ab ea superatur. Quæ vero nec prægravando descendunt, nec prægravanti cedendo ascendunt, etiamsi veris suis ponderibus adaugeant pondus totius, comparative tamen & in sensu vulgi non gravitant in aqua. Nam similis est horum casuum demonstratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonstrantur, obtinent in aliis quibuscunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde si medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel a gravitate propria, vel ab alia quacunque vi centripeta, & corpus ab eadem vi urgeatur fortius; differentia virium est vis illa motrix, quam in præcedentibus propositionibus ut vim centripetam consideravimus. Sin corpus a vi illa urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifuga haberi debet.

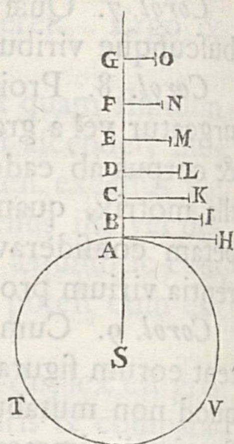
Corol. 9. Cum autem fluida premendo corpora inclusa non mutent eorum figuras externas, patet insuper (per corollarium prop. XIX.) quod non mutabunt situm partium internarum inter se: proindeque, si animalia immergantur, & sensatio omnis a motu partium oriatur; nec lædent corpora immersa, nec sensationem ullam excitabunt, nisi quatenus hæc corpora a compressione condensari possunt. Et par est ratio cujuscunque corporum systematis fluido comprimente circundati. Systematis partes omnes iisdem agitabuntur motibus, ac si in vacuo constituerentur, ac solam retinerent gravitatem suam comparativam, nisi quatenus fluidum vel motibus earum nonnihil resistat, vel ad easdem compressione conglutinandas requiratur.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVI.

Sit fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus a vi centripeta distantiis suis a centro reciproce proportionali deorsum trahantur: dico quod, si distantiæ illæ sumantur continue proportionales, densitates fluidi in iisdem distantiis erunt etiam continue proportionales.

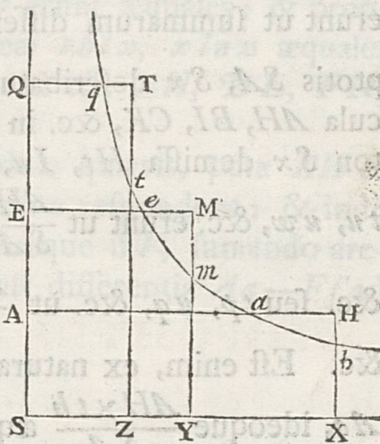
Designet *ATV* fundum sphæricum cui fluidum incumbit, *S* centrum, *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, *SF*, &c. distantias continue proportionales.

tionales. Erigantur perpendicula *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, *EM*, *FN*, &c. quæ sint ut densitates medii in locis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*; & specificæ gravitates in iisdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$, &c. vel, quod perinde est, ut $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$, &c. Finge primum has gravitates uniformiter continuari ab *A* ad *B*, a *B* ad *C*, a *C* ad *D*, &c. factis per gradus decrementis in punctis *B*, *C*, *D*, &c. Et hæ gravitates ductæ in altitudines *AB*, *BC*, *CD*, &c. conficient pressiones *AH*, *BI*, *CK*, &c. quibus fundum *ATV* (juxta theorema xv.) urgetur. Sustinet ergo particula *A* pressiones omnes *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, pergendo in infinitum; & particula *B* pressiones omnes præter primam *AH*; & particula *C* omnes præter duas primas *AH*, *BI*; & sic deinceps: ideoque particulæ primæ *A* densitas *AH* est ad particulæ secundæ *B* densitatem *BI* ut summa omnium $AH+BI+CK+DL$, in infinitum, ad summam omnium $BI+CK+DL$, &c. Et *BI* densitas secundæ *B* est ad *CK* densitatem tertiæ *C*, ut summa omnium $BI+CK+DL$, &c. ad summam omnium $CK+DL$, &c. Sunt igitur summæ illæ differentiis suis *AH*, *BI*, *CK*, &c. proportionales, atque ideo continue proportionales (per hujus lem. 1.) proindeque differentiæ *AH*, *BI*, *CK*, &c. summis proportionales, sunt etiam continue proportionales. Quare cum densitates in locis *A*, *B*, *C*, &c. sint ut *AH*, *BI*, *CK*, &c. erunt etiam hæ continue proportionales. Pergatur per saltum, & ex æquo in distantiis *SA*, *SC*, *SE* continue proportionalibus, erunt densitates *AH*, *CK*, *EM* continue proportionales. Et eodem argumento, in distantiis quibusvis continue proportionalibus *SA*, *SD*, *SG*, densitates *AH*, *DL*, *GO* erunt continue proportionales. Coeant jam puncta *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. eo ut progressio gravitatum specificarum a fundo *A* ad summitatem fluidi continua reddatur, & in distantiis quibusvis continue proportionalibus *SA*, *SD*, *SG*, densitates *AH*, *DL*, *GO*, semper existentes continue proportionales, manebunt etiamnum continue proportionales. *Q. E. D.*



Corol. Hinc si detur densitas fluidi in duobus locis, puta *A* & *E*, col-

E, colligi poteſt ejus denſitas in alio quovis loco *Q*. Centro *S*, aſymptotis rectangulis *SQ*, *SX* deſcribatur hyperbola ſecans perpendicula *AH*, *EM*, *QT* in *a*, *e*, *q*, ut & perpendicula *HX*, *MY*, *TZ*, ad aſymptoton *SX* demiſſa, in *h*, *m* & *t*. Fiat area *YmtZ* ad aream datam *YmhX* ut area data *EeqQ* ad aream datam *EeaA*; & linea *Zt* producta abſcindet lineam *QT* denſitati proportionalem. Namque ſi lineæ *SA*, *SE*, *SQ* ſunt continue proportionales, erunt areæ *EeqQ*, *EeaA* æquales, & inde areæ his proportionales *YmtZ*, *XhmY* etiam æquales, & lineæ *SX*, *SY*, *SZ*, id eſt, *AH*, *EM*, *QT* continue proportionales, ut oportet. Et ſi lineæ *SA*, *SE*, *SQ* obtinent alium quemvis ordinem in ſerie continue proportionalium, lineæ *AH*, *EM*, *QT*, ob proportionales areas hyperbolicas, obtinebunt eundem ordinem in alia ſerie quantitatum continue proportionalium.

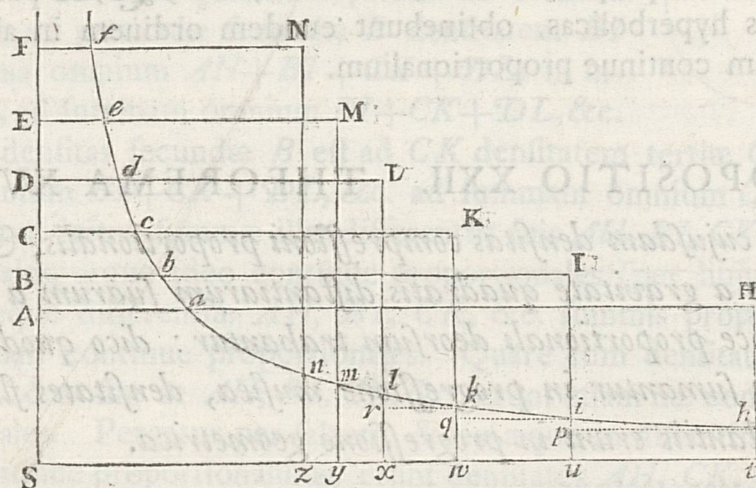


PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVII.

Sit fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus a gravitate quadratis diſtantiarum ſuarum a centro reciproce proportionali deorſum trahantur: dico quod, ſi diſtantiæ ſumantur in progreſſione muſica, denſitates fluidi in his diſtantiis erunt in progreſſione geometrica.

Deſignet *S* centrum, & *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE* diſtantias in progreſſione geometrica. Erigantur perpendicula *AH*, *BI*, *CK*, &c. quæ ſint ut fluidi denſitates in locis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. & ipſius gravitates ſpecificæ in iiſdem locis erunt $\frac{AH}{SAq}$, $\frac{BI}{SBq}$, $\frac{CK}{SCq}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab *A* ad *B*, ſecundam a *B* ad *C*, tertiam a *C* ad *D*, &c. Et hæ ductæ in altitudines *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, &c. vel, quod perinde eſt, in diſtantias *SA*, *SB*, *SC*, &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes preſſio-

num $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}$, &c. Quare cum densitates sint ut harum pressionum summæ, differentiæ densitatum $AH-BI$, $BI-CK$, &c. erunt ut summarum differentiæ $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}$, &c. Centro S, asymptotis SA, Sx describatur hyperbola quævis, quæ secet perpendicula AH, BI, CK, &c. in a, b, c, &c. ut & perpendicula ad asymptoton Sx demissa Ht, Iu, Kw in h, i, k; & densitatum differentiæ tu, uw, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times th$, $uw \times ui$, &c. seu tp, uq, &c. ut $\frac{AH \times th}{SA}, \frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id est, ut Aa, Bb, &c. Est enim, ex natura hyperbolæ, SA ad AH vel St, ut th ad Aa, ideoque $\frac{AH \times th}{SA}$ æquale Aa. Et simili argumento est $\frac{BI \times ui}{SB}$



æquale Bb, &c. Sunt autem Aa, Bb, Cc, &c. continue proportionales, & propterea differentiis suis $Aa-Bb$, $Bb-Cc$, &c. proportionales; ideoque differentiis hisce proportionalia sunt rectangula tp, uq, &c. ut & summis differentiarum $Aa-Cc$ vel $Aa-Dd$ summæ rectangulorum $tp+uq$ vel $tp+uq+wr$. Sunto ejusmodi termini quam plurimi, & summa omnium differentiarum, puta $Aa-Ff$, erit summæ omnium rectangulorum, puta $zthn$, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur distantiæ punctorum A, B, C, &c.

num

&c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ *zthn*, ideoque huic areæ proportionalis est differentia *Aa—Ff*. Sumantur jam distantiæ quælibet, puta *SA*, *SD*, *SF* progressione musica, & differentiæ *Aa—Dd*, *Dd—Ff* erunt æquales; & propterea differentiis hisce proportionales areæ *thlx*, *xlnz* æquales erunt inter se, & densitates *St*, *Sx*, *Sz*, id est, *AH*, *DL*, *FN*, continue proportionales. *Q. E. D.* Liber Secundus.

Corol. Hinc si dentur fluidi densitates duæ quævis, puta *AH* & *BI*, dabitur area *thiu*, harum differentiæ *tu* respondens; & inde invenietur densitas *FN* in altitudine quacunque *SF*, sumendo aream *thnz* ad aream illam datam *thiu* ut est differentia *Aa—Ff* ad differentiam *Aa—Bb*.

Scholium.

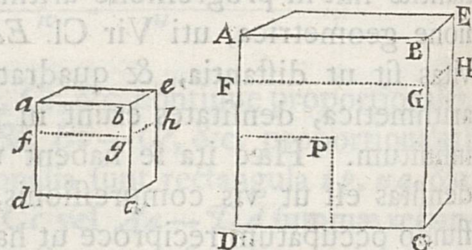
Simili argumentatione probari potest, quod si gravitas particularum fluidi diminuatur in triplicata ratione distantiarum a centro, & quadratorum distantiarum *SA*, *SB*, *SC*, &c. reciproca (nempe $\frac{SA\,cub.}{SAq}$, $\frac{SA\,cub.}{SBq}$, $\frac{SA\,cub.}{SCq}$) sumantur in progressione arithmetica; densitates *AH*, *BI*, *CK*, &c. erunt in progressione geometrica. Et si gravitas diminuatur in quadruplicata ratione distantiarum, & cuborum distantiarum reciproca (puta $\frac{SAqq}{SA\,cub.}$, $\frac{SAqq}{SB\,cub.}$, $\frac{SAqq}{SC\,cub.}$, &c.) sumantur in progressione arithmetica; densitates *AH*, *BI*, *CK*, &c. erunt in progressione geometrica. Et sic in infinitum. Rursus si gravitas particularum fluidi in omnibus distantiis eadem sit, & distantiæ sint in progressione arithmetica, densitates erunt in progressione geometrica, uti Vir Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas sit ut distantia, & quadrata distantiarum sint in progressione arithmetica, densitates erunt in progressione geometrica. Et sic in infinitum. Hæc ita se habent ubi fluidi compressione condensati densitas est ut vis compressionis, vel, quod perinde est, spatium a fluido occupatum reciproce ut hæc vis. Fingi possunt aliæ condensationis leges, ut quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu triplicata ratio vis eadem cum quadruplicata ratione densitatis. Quo in casu, si gravitas est reciproce ut quadratum distantiæ a centro, densitas erit reciproce ut cubus distantiæ. Fingatur

gatur quod cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-cubus denſitatis, & ſi gravitas eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ, denſitas erit reciproce in ſeſquiplicata ratione diſtantiæ. Fingatur quod vis comprimens ſit in duplicata ratione denſitatis, & gravitas reciproce in ratione duplicata diſtantiæ, & denſitas erit reciproce ut diſtantia. Caſus omnes percurrere longum eſſet. Cæterum per experimenta conſtat quod denſitas aëris ſit ut vis comprimens vel accurate vel ſaltem quam proxime: & propterea denſitas aëris in atmoſphæra terræ eſt ut pondus aëris totius incumbentis, id eſt, ut altitudo mercurii in barometro.

PROPOSITIO XXIII. THEOREMA XVIII.

Si fluidi ex particulis ſe mutuo fugientibus compoſiti denſitas ſit ut compreſſio, vires centrifugæ particularum ſunt reciproce proportionales diſtantiis centrorum ſuorum. Et vice verſa, particulæ viribus quæ ſunt reciproce proportionales diſtantiis centrorum ſuorum ſe mutuo fugientes componunt fluidum elaſticum, cujus denſitas eſt compreſſioni proportionalis.

Includi intelligatur fluidum in ſpatio cubico *ACE*, dein compreſſione redigi in ſpatium cubicum minus *ace*; & particularum, ſimilem ſitum inter ſe in utroque ſpatio obtinentium, diſtantiæ erunt ut cuborum latera *AB*, *ab*; & mediorum denſitates reciproce ut ſpatia continentia *AB cub.* & *ab cub.* In cubi majoris latere plano *ABCD* capiatur quadratum *DP* æquale lateri plano cubi minoris *db*; & ex hypotheſi, preſſio, qua quadratum *DP* urget fluidum incluſum, erit ad preſſionem, qua illud quadratum *db* urget fluidum incluſum, ut medii denſitates ad invicem, hoc eſt, ut *ab cub.* ad *AB cub.*



Sed preſſio, qua quadratum *DB* urget fluidum incluſum, eſt ad preſſionem, qua quadratum *DP* urget idem fluidum, ut quadratum *DB* ad quadratum *DP*, hoc eſt, ut *AB quad.* ad *ab quad.* Ergo, ex

ex æquo, pressio qua quadratum *DB* urget fluidum, est ad pressionem qua quadratum *db* urget fluidum, ut *ab* ad *AB*. Planis *FGH*, *fgh*, per media cuborum ductis, distinguatur fluidum in duas partes, & hæ se mutuo prement iisdem viribus, quibus premuntur a planis *AC*, *ac*, hoc est, in proportione *ab* ad *AB*: ideoque vires centrifugæ, quibus hæ pressiones sustinentur, sunt in eadem ratione. Ob eundem particularum numerum similemque situm in utroque cubo, vires quas particulæ omnes secundum plana *FGH*, *fgh* exercent in omnes, sunt ut vires quas singulæ exercent in singulas. Ergo vires, quas singulæ exercent in singulas secundum planum *FGH* in cubo majore, sunt ad vires, quas singulæ exercent in singulas secundum planum *fgh* in cubo minore, ut *ab* ad *AB*, hoc est, reciproce ut distantiæ particularum ad invicem. *Q. E. D.*

Et vice versa, si vires particularum singularum sunt reciproce ut distantiæ, id est, reciproce ut cuborum latera *AB*, *ab*; summæ virium erunt in eadem ratione, & pressiones laterum *DB*, *db* ut summæ virium; & pressio quadrati *DP* ad pressionem lateris *DB* ut *ab quad.* ad *AB quad.* Et, ex æquo, pressio quadrati *DP* ad pressionem lateris *db* ut *ab cub.* ad *AB cub.* id est, vis compressionis ad vim compressionis ut densitas ad densitatem. *Q. E. D.*

Scholium.

Simili argumento, si particularum vires centrifugæ sint reciproce in duplicata ratione distantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata densitatum. Si vires centrifugæ sint reciproce in triplicata vel quadruplicata ratione distantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi densitatum. Et universaliter, si D ponatur pro distantia, & E pro densitate fluidi compressi, & vires centrifugæ sint reciproce ut distantiæ dignitas quælibet D^n, cujus index est numerus n; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis E^{n+2}, cujus index est numerus $n+2$: & contra. Intelligenda vero sunt hæc omnia de particularum viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longe ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus magneticis. Horum virtus attractiva terminatur fere in sui generis corporibus sibi proximis. Magnetis virtus per interpositam

De Motu Corporum

laminam ferri contrahitur, & in lamina fere terminatur. Nam corpora ulteriora non tam a magnete quam a lamina trahuntur. Ad eundem modum si particulæ fugant alias sui generis particulas sibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujusmodi particulis componentur fluida de quibus actum est in hac propositione. Quod si particulæ cujusque virtus in infinitum propagetur, opus erit vi majori ad æqualem condensationem majoris quantitatis fluidi. An vero fluida elastica ex particulis se mutuo fugantibus constent, quæstio physica est. Nos proprietatem fluidorum ex ejusmodi particulis constantium mathematice demonstravimus, ut philosophis ansam præbeamus quæstionem illam tractandi.

SECTIO VI.

De motu & resistentia corporum funependulorum.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oscillationum a centro suspensionis æqualiter distant, sunt in ratione composita ex ratione ponderum & ratione duplicata temporum oscillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in data materia, dato tempore generare potest, est ut vis & tempus directe, & materia inverse. Quo major est vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus legem secundam manifestum est. Jam vero si pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculo æqualiter distantibus sunt ut pondera: ideoque si corpora duo oscillando describant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cum tempora quibus corpora describant singulas arcuum partes correspondentes sint ut tempora oscillationum totarum, erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices & tota oscillationum tempora directe & quantitates materiæ reciproce: ideoque quantitates materiæ ut vires & oscillationum tempora directe & velocitates reciproce. Sed velocitates reciproce sunt ut tempora, atque

ideo

ideo tempora directe & velocitates reciproce ſunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiæ ſunt ut vires motrices & quadrata temporum, id eſt, ut pondera & quadrata temporum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ideoque ſi tempora ſunt æqualia, quantitates materiæ in ſingulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera ſunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciproce ut quadrata temporum.

Corol. 4. Unde cum quadrata temporum, cæteris paribus, ſint ut longitudines pendulorum; ſi & tempora & quantitates materiæ æqualia ſunt, pondera erunt ut longitudines pendulorum.

Corol. 5. Et univerſaliter, quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus & quadratum temporis directe, & longitudo penduli inverſe.

Corol. 6. Sed & in medio non reſiſtente quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus comparativum & quadratum temporis directe & longitudo penduli inverſe. Nam pondus comparativum eſt vis motrix corporis in medio quovis gravi, ut ſupra explicui; ideoque idem præſtat in tali medio non reſiſtente atque pondus abſolutum in vacuo.

Corol. 7. Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter ſe, quoad quantitatem materiæ in ſingulis; tum comparandi pondera ejuſdem corporis in diverſis locis, ad cognoſcendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratiſſimis inveni ſemper quantitatem materiæ in corporibus ſingulis eorum ponderi proportionalem eſſe.

PROPOSITIO XXV. THEOREMA XX.

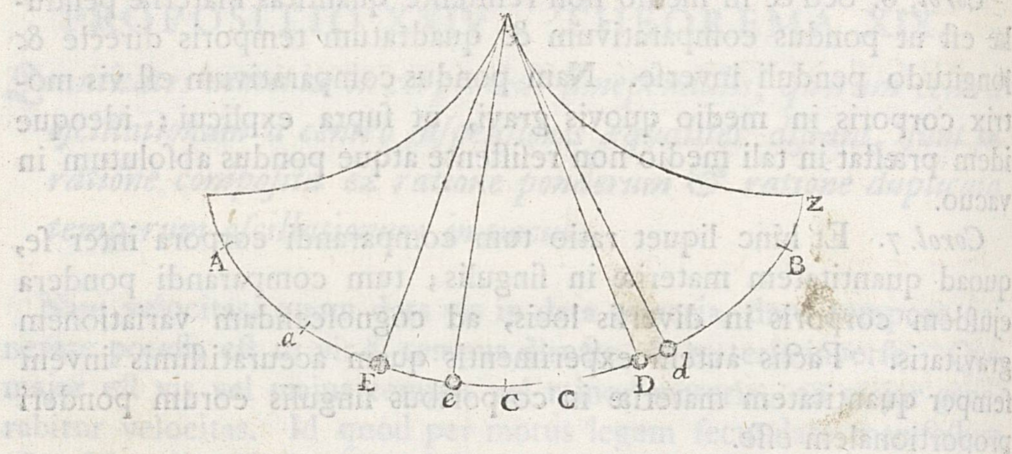
Corpora Funependula quibus, in medio quovis, reſiſtitur in ratione momentorum temporis, & corpora funependula quæ in ejuſdem gravitatis ſpecificæ medio non reſiſtente moventur, oſcillationes in cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales ſimul deſcribunt.

Sit *AB* cycloidis arcus, quem corpus *D* tempore quovis in medio non reſiſtente oſcillando deſcribit. Biſecetur idem in *C*, ita ut *C* ſit

infimum

De Motu Corporum

infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix qua corpus urgetur in loco quovis *D* vel *d* vel *E* ut longitudo arcus *CD* vel *Cd* vel *CE*. Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum resistentia sit ut momentum temporis, ideoque detur, exponatur eadem per datam arcus cycloidis partem *CO*, & sumatur arcus *Od* in ratione ad arcum *CD* quam habet arcus *OB* ad arcum *CB*: & vis qua corpus in *d* urgetur in medio resistente, cum sit excessus vis *Cd* supra resistentiam *CO*, exponetur per arcum *Od*, ideoque erit ad vim, qua corpus *D* urgetur in medio non resistente in loco *D*, ut arcus *Od* ad arcum *CD*; & propterea etiam in loco *B* ut arcus *OB* ad arcum *CB*. Proinde si corpora duo, *D*, *d* exeant de loco *B*, & his viribus urgeantur: cum vires sub initio sint ut arcus *CB* & *OB*, erunt velocitates primæ & arcus primo descripti in eadem ratione. Sunto arcus illi *BD* & *Bd*, & arcus reliqui *CD*, *Od* erunt in eadem ratione. Proinde vires, ipsis *CD*, *Od* proportionales manebunt



in eadem ratione ac sub initio, & propterea corpora pergent arcus in eadem ratione simul describere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui *CD*, *Od* semper erunt ut arcus toti *CB*, *OB*, & propterea arcus illi reliqui simul describentur. Quare corpora duo *D*, *d* simul pervenient ad loca *C* & *O*, alterum quidem in medio non resistente ad locum *C*, & alterum in medio resistente ad locum *O*. Cum autem velocitates in *C* & *O* sint ut arcus *CB*, *OB*; erunt arcus, quos corpora ulterius pergendo simul describunt, in eadem ratione. Sunto illi *CE* & *Oe*. Vis qua corpus *D* in medio non resistente retardatur in *E* est ut *CE*, & vis qua corpus *d* in medio resistente

sistente

ſiſtente retardatur in *e* eſt ut ſumma vis *Ce* & reſiſtentiæ *CO*, id eſt ut *Oe*; ideoque vires, quibus corpora retardantur, ſunt ut arcubus *CE*, *Oe* proportionales arcus *CB*, *OB*; proindeque velocitates, in data illa ratione retardatæ, manent in eadem illa data ratione. Velocitates igitur & arcus iiſdem deſcripti ſemper ſunt ad invicem in data illa ratione arcuum *CB* & *OB*; & propterea ſi ſumantur arcus toti *AB*, *aB* in eadem ratione, corpora *D*, *d* ſimul deſcribent hos arcus, & in locis *A* & *a* motum omnem ſimul amittent. Iſochronæ ſunt igitur oſcillationes totæ, & arcubus totis *BA*, *Ba* proportionales ſunt arcuum partes quælibet *BD*, *Bd* vel *BE*, *Be* quæ ſimul deſcribuntur. *Q.E.D.*

Corol. Igitur motus velociſſimus in medio reſiſtente non incidit in punctum infimum *C*, ſed reperitur in puncto illo *O*, quo arcus totus deſcriptus *aB* biſecatur. Et corpus ſubinde pergendo ad *a*, iiſdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in deſcenſu ſuo a *B* ad *O*.

PROPOSITIO XXVI. THEOREMA XXI.

Corporum funependulorum, quibus reſiſtitur in ratione velocitatum, oſcillationes in cycloide ſunt Iſochronæ.

Nam ſi corpora duo, a centris ſuſpenſionum æqualiter diſtantia, oſcillando deſcribant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correſpondentibus ſint ad invicem ut arcus toti; reſiſtentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde ſi viribus motricibus a gravitate oriundis, quæ ſint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ reſiſtentiæ, erunt differentiæ vel ſummæ ad invicem in eadem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa ſint ut hæ differentiæ vel ſummæ, velocitates ſemper erunt ut arcus toti: Igitur velocitates, ſi ſint in aliquo caſu ut arcus toti, manebunt ſemper in eadem ratione. Sed in principio motus, ubi corpora incipiunt deſcendere & arcus illos deſcribere, vires, cum ſint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates ſemper erunt ut arcus toti deſcribendi, & propterea arcus illi ſimul deſcribentur. *Q.E.D.*

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA XXII.

Si corporibus funependulis resistitur in duplicata ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oscillationum in medio resistente ac tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente, erunt arcubus oscillando descriptis proportionales quam proxime.

Nam pendulis æqualibus in medio resistente describantur arcus inæquales A, B; & resistentia corporis in arcu A, erit ad resistentiam corporis in parte correspondente arcus B, in duplicata ratione velocitatum, id est, ut AA ad BB, quam proxime. Si resistentia in arcu B esset ad resistentiam in arcu A ut AB ad AA; tempora in arcubus A & B forent æqualia, per propositionem superiorem. Ideoque resistentia AA in arcu A, vel AB in arcu B, efficit excessum temporis in arcu A supra tempus in medio non resistente; & resistentia BB efficit excessum temporis in arcu B supra tempus in medio non resistente. Sunt autem excessus illi ut vires efficientes AB & BB quam proxime, id est, ut arcus A & B. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc ex oscillationum temporibus, in medio resistente, in arcubus inæqualibus factarum, cognosci possunt tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente. Nam differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in medio non resistente, ut differentia arcuum ad arcum minorem.

Corol. 2. Oscillationes breviores sunt magis isochronæ, & brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in medio non resistente, quam proxime. Earum vero quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora sunt paulo majora, propterea quod resistentia in descensu corporis qua tempus producitur, major sit pro ratione longitudinis in descensu descriptæ, quam resistentia in ascensu subsequente qua tempus contrahitur. Sed & tempus oscillationum tam brevium quam longarum nonnihil produci videtur per motum medii. Nam corporibus tardescentibus paulo minus resistitur, pro ratione velocitatis, & corporibus acceleratis paulo magis quam iis quæ uniformiter progrediuntur: idque quia medium, eo quem a corporibus

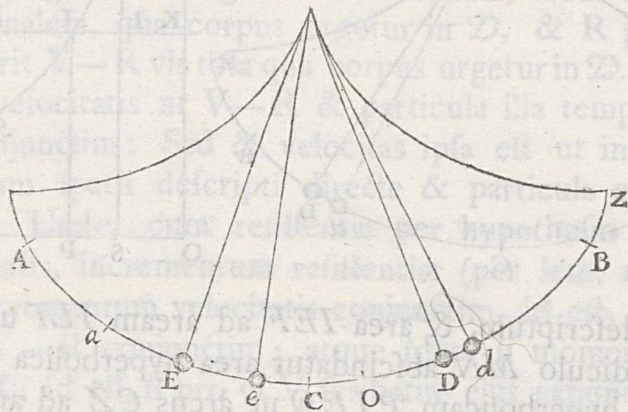
accepit

accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore casu magis agitatur, in posteriore minus; ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conspirat. Pendulis igitur in descensu magis resistit, in ascensu minus quam pro ratione velocitatis, & ex utraque causa tempus producitur.

PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA XXIII.

Si corpori funependulo in cycloide oscillanti resistitur in ratione momentorum temporis, erit ejus resistentia ad vim gravitatis ut excessus arcus descensu toto descripti supra arcum ascensu subsequente descriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

Designet *BC* arcum descensu descriptum, *Ca* arcum ascensu descriptum, & *Aa* differentiam arcuum: & stantibus quæ in propositione XXV. constructa & demonstrata sunt, erit vis, qua corpus oscillans urgetur in loco quovis *D*, ad vim resistentiæ ut arcus *CD* ad arcum *CO*, qui semissis est differentiæ illius *Aa*. Ideoque vis,

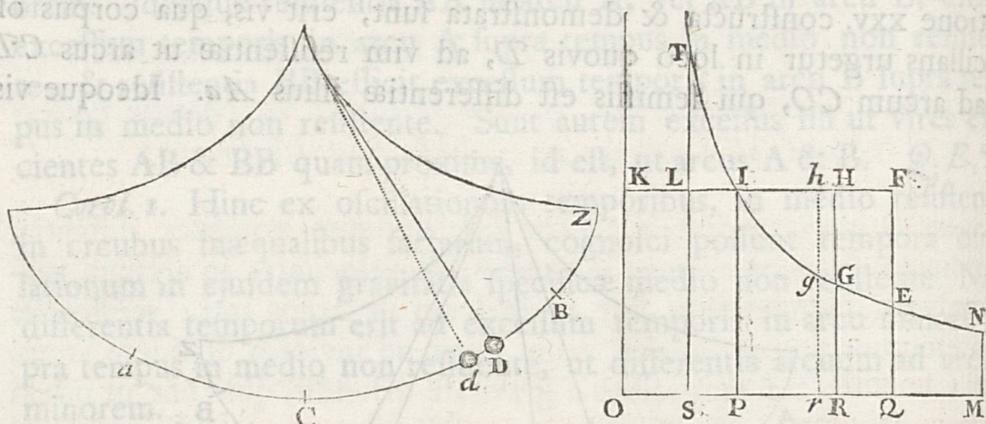


qua corpus oscillans urgetur in cycloidis principio seu puncto altissimo, id est, vis gravitatis, erit ad resistentiam ut arcus cycloidis inter punctum illud supremum & punctum infimum *C* ad arcum *CO*; id est (si arcus duplicentur) ut cycloidis totius arcus, seu dupla penduli longitudo, ad arcum *Aa*. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA VI.

Posito quod corpori in cycloide oscillanti resistitur in duplicata ratione velocitatis: invenire resistentiam in locis singulis.

Sit *Ba* arcus oscillatione integra descriptus, sitque *C* infimum cycloidis punctum, & *CZ* semissis arcus cycloidis totius, longitudini penduli æqualis; & quæratur resistentia corporis in loco quovis *D*. Secetur recta infinita *OQ* in punctis *O*, *S*, *P*, *Q*, ea lege, ut (si erigantur perpendicula *OK*, *ST*, *PI*, *QE*, centroque *O* & asymptotis *OK*, *OQ* describatur hyperbola *TIGE* secans perpendicula *ST*, *PI*, *QE* in *T*, *I* & *E*, & per punctum *I* agatur *KF* parallela asymptoto *OQ* occurrens asymptoto *OK* in *K*, & perpendiculis *ST* & *QE* in *L* & *F*) fuerit area hyperbolica *PIEQ* ad aream hyperbolicam *PITS* ut arcus *BC* descensu corporis descriptus ad arcum



Ca ascensu descriptum, & area *IEF* ad aream *ILT* ut *OQ* ad *OS*. Dein perpendiculo *MN* abscindatur area hyperbolica *PINM* quæ sit ad aream hyperbolicam *PIEQ* ut arcus *CZ* ad arcum *BC* descensu descriptum. Et si perpendiculo *RG* abscindatur area hyperbolica *PIGR*, quæ sit ad aream *PIEQ* ut arcus quilibet *CD* ad arcum *BC* descensu toto descriptum; erit resistentia in loco *D* ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ ad aream *PINM*.

Nam cum vires a gravitate oriundæ quibus corpus in locis *Z*, *B*, *D*, *a* urgetur, sint ut arcus *CZ*, *CB*, *CD*, *Ca*, & arcus illi sint ut areæ

PINM,

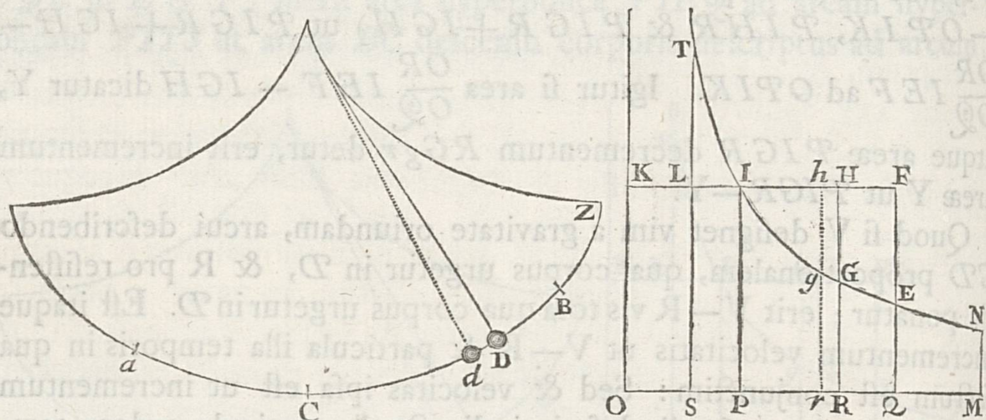
PINM, PIEQ, PIGR, PITS; exponantur tum arcus tum vires per has areas respective. Sit insuper *Dd* spatium quam minimum a corpore descendente descriptum, & exponatur idem per aream quam minimam *RGgr* parallelis *RG, rg* comprehensam; & producatur *rg* ad *h*, ut sint *GHhg*, & *RGgr* contemporanea arearum *IGH, PIGR* decrementa. Et areæ $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ incrementum $GHhg - \frac{Rr}{OQ}IEF$, seu $Rr \times HG - \frac{Rr}{OQ}IEF$, erit ad areæ *PIGR* decrementum *RGgr*, seu $Rr \times RG$, ut $HG - \frac{IEF}{OQ}$ ad *RG*; ideoque ut $OR \times HG - \frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OR \times GR$ seu $OP \times PI$, hoc est (ob æqualia $OR \times HG$, $OR \times HR - OR \times GR$, $ORHK - OPIK$, *PIHR* & $PIGR + IGH$) ut $PIGR + IGH - \frac{OR}{OQ}IEF$ ad *OPIK*. Igitur si area $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ dicatur Y, atque areæ *PIGR* decrementum *RGgr* detur, erit incrementum areæ Y ut *PIGR*—Y.

Quod si V designet vim a gravitate oriundam, arcui describendo *CD* proportionalem, qua corpus urgetur in *D*, & R pro resistentia ponatur; erit V—R vis tota qua corpus urgetur in *D*. Est itaque incrementum velocitatis ut V—R & particula illa temporis in qua factum est conjunctim: Sed & velocitas ipsa est ut incrementum contemporaneum spatii descripti directe & particula eadem temporis inverse. Unde, cum resistentia per hypothesin sit ut quadratum velocitatis, incrementum resistentiæ (per lem. II.) erit ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id est, ut momentum spatii & V—R conjunctim; atque ideo, si momentum spatii detur, ut V—R; id est, si pro vi V scribatur ejus exponens *PIGR*, & resistentia R exponatur per aliam aliquam aream Z, ut *PIGR*—Z.

Igitur area *PIGR* per datorum momentorum subductionem uniformiter decrescente, crescunt area Y in ratione *PIGR*—Y, & area Z in ratione *PIGR*—Z. Et propterea si areæ Y & Z simul incipiant & sub initio æquales sint, hæ per additionem æqualium momentorum pergent esse æquales, & æqualibus itidem momentis subinde

ſubinde decreſcentes ſimul evaneſcent. Et viciſſim, ſi ſimul incipiunt & ſimul evaneſcunt, æqualia habebunt momenta & ſemper erunt æquales: id adeo quia ſi reſiſtentia Z augeatur, velocitas una cum arcu illo *Ca*, qui in aſcenſu corporis deſcribitur, diminuetur; & puncto in quo motus omnis una cum reſiſtentia ceſſat propius accedente ad punctum *C*, reſiſtentia citius evaneſcet quam area Y. Et contrarium eveniet ubi reſiſtentia diminuitur.

Jam vero area Z incipit deſinitque ubi reſiſtentia nulla eſt, hoc eſt, in principio motus ubi arcus *CD* arcui *CB* æquatur & recta *RG* incidit in rectam *QE*, & in fine motus ubi arcus *CD* arcui *CA* æquatur & *RG* incidit in rectam *ST*. Et area Y ſeu $\frac{OR}{OQ}$ $IEF - IGH$ incipit deſinitque ubi nulla eſt, ideoque ubi $\frac{OR}{OQ}$



IEF & IGH æqualia ſunt: hoc eſt (per conſtructionem) ubi recta *RG* incidit ſucceſſive in rectas *QE* & *ST*. Proindeque areæ illæ ſimul incipiunt & ſimul evaneſcunt, & propterea ſemper ſunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ}$ $IEF - IGH$ æqualis eſt areæ Z, per quam reſiſtentia exponitur, & propterea eſt ad aream *PINM* per quam gravitas exponitur, ut reſiſtentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Eſt igitur reſiſtentia in loco infimo *C* ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ}$ IEF ad aream *PINM*.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area *PIHR* eſt ad aream *IEF* ut *OR* ad *OQ*. Eo enim in caſu momentum ejus (nimirum *PIGR* —Y evadit nullum.

Corol.

Corol. 3. Hinc etiam innotescit velocitas in locis singulis: quippe quæ est in subduplicata ratione resistentiæ, & ipso motus initio æquatur velocitati corporis in eadem cycloide sine omni resistentia oscillantis.

Cæterum ob difficilem calculum quo resistentia & velocitas per hanc propositionem inveniendæ sunt, visum est propositionem sequentem subjungere.

PROPOSITIO XXX. THEOREMA XXIV.

Si recta aB *æqualis sit cycloidis arcui quem corpus oscillando describit, & ad singula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* DK, *quæ sint ad longitudinem penduli ut resistentia corporis in arcus punctis correspondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum descensu toto descriptum & arcum ascensu toto subsequente descriptum ducta in arcuum eorundem semisummam, æqualis erit areæ* BKa *a perpendiculis omnibus* DK *occupatæ.*

Exponatur enim tum cycloidis arcus, oscillatione integra descriptus, per rectam illam sibi æqualem *aB*, tum arcus qui describeretur in vacuo per longitudinem *AB*. Bisecetur *AB* in *C*, & punctum *C* repræsentabit infimum cycloidis punctum, & erit *CD* ut

vis a gravitate oriunda, qua corpus in *D* secundum tangentem cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem penduli quam habet vis in *D* ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa

illa per longitudinem *CD*, & vis gravitatis per longitudinem penduli, & ſi in *DE* capiatur *DK* in ea ratione ad longitudinem penduli quam habet reſiſtentia ad gravitatem, erit *DK* exponens reſiſtentiæ. Centro *C* & intervallo *CA* vel *CB* conſtruatur ſemicirculus *BEeA*. Deſcribat autem corpus tempore quam minimo ſpatium *Dd*, & erectis perpendiculis *DE*, *de* circumferentiæ occurrentibus in *E* & *e*, erunt hæc ut velocitates quas corpus in vacuo, deſcendendo a puncto *B*, acquireret in locis *D* & *d*. Patet hoc (per prop. LII. lib. I.) Exponantur itaque hæ velocitates per perpendicula illa *DE*, *de*; ſitque *DF* velocitas quam acquirit in *D* cadendo de *B* in medio reſiſtente. Et ſi centro *C* & intervallo *CF* deſcribatur circulus *FfM* occurrens rectis *de* & *AB* in *f* & *M*, erit *M* locus ad quem deinceps ſine ulteriore reſiſtentia aſcenderet, & *df* velocitas quam acquireret in *d*. Unde etiam ſi *Fg* deſignet velocitatis momentum quod corpus *D*, deſcribendo ſpatium quam minimum *Dd*, ex reſiſtentia medii amittit; & ſumatur *CN* æqualis *Cg*: erit *N* locus ad quem corpus deinceps ſine ulteriore reſiſtentia aſcenderet, & *MN* erit decrementum aſcenſus ex velocitatis illius amiſſione oriundum. Ad *df* demittatur perpendiculum *Fm*, & velocitatis *DF* decrementum *Fg* a reſiſtentia *DK* genitum, erit ad velocitatis ejuſdem incrementum *fm* a vi *CD* genitum, ut vis generans *DK* ad vim generantem *CD*. Sed & ob ſimilia triangula *Fmf*, *Fhg*, *FDC*, eſt *fm* ad *Fm* ſeu *Dd* ut *CD* ad *DF*; & ex æquo *Fg* ad *Dd* ut *DK* ad *DF*. Item *Fh* ad *Fg* ut *DF* ad *CF*; & ex æquo perturbate, *Fh* ſeu *MN* ad *Dd* ut *DK* ad *CF* ſeu *CM*; ideoque ſumma omnium $MN \times CM$ æqualis erit ſummæ omnium $Dd \times DK$. Ad punctum mobile *M* erigi ſemper intelligatur ordinata rectangula æqualis indeterminatæ *CM*, quæ

motu

motu continuo ducatur in totam longitudinem Aa; & trapezium ex illo motu deſcriptum ſive huic æquale rectangulum $Aa \times \frac{1}{2} aB$ æquabitur ſummæ omnium $MN \times CM$, ideoque ſummæ omnium $Dd \times DK$, id eſt, areæ $BKVTa$. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ex lege reſiſtentiæ & arcuum Ca, CB differentia Aa colligi poteſt proportio reſiſtentiæ ad gravitatem quam proxime.

Nam ſi uniformis ſit reſiſtentia DK, figura $BKTa$ rectangulum erit ſub Ba & DK; & inde rectangulum ſub $\frac{1}{2} Ba$ & Aa erit æquale rectangulo ſub Ba & DK, & DK æqualis erit $\frac{1}{2} Aa$. Quare cum DK ſit exponens reſiſtentiæ, & longitudo penduli exponens gravitatis, erit reſiſtentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2} Aa$ ad longitudinem penduli; omnino ut in prop. XXVIII. demonſtratum eſt.

Si reſiſtentia ſit ut velocitas, figura $BKTa$ ellipſis erit quam proxime. Nam ſi corpus, in medio non reſiſtente, oſcillatione integra deſcriberet longitudinem BA, velocitas in loco quovis D foret ut circuli diametro AB deſcripti ordinatim applicata DE. Proinde cum Ba in medio reſiſtente, & BA in medio non reſiſtente, æqualibus circiter temporibus deſcribantur; ideoque velocitates in ſingulis ipſius Ba punctis, ſint quam proxime ad velocitates in punctis correſpondentibus longitudinis BA, ut eſt Ba ad BA; erit velocitas in puncto D in medio reſiſtente ut circuli vel ellipſeos ſuper diametro Ba deſcripti ordinatim applicata; ideoque figura $BKVTa$ ellipſis erit quam proxime. Cum reſiſtentia velocitati proportionalis ſupponatur, ſit OV exponens reſiſtentiæ in puncto medio O; & ellipſis $BRVSa$, centro O, ſemiaxibus OB, OV deſcripta, figuram $BKVTa$, eique æquale rectangulum $Aa \times BO$, æquabit quamproxime. Eſt igitur $Aa \times BO$ ad $OV \times BO$ ut area ellipſeos hujus ad $OV \times BO$: id eſt, Aa ad OV ut area ſemicirculi ad quadratum radii, ſive ut 11 ad 7 circiter: Et propterea $\frac{7}{11} Aa$ ad longitudinem penduli ut corporis oſcillantis reſiſtentia in O ad ejuſdem gravitatem.

Quod ſi reſiſtentia DK ſit in duplicata ratione velocitatis, figura $BKVTa$ fere parabola erit verticem habens V & axem OV, ideoque æqualis erit rectangulo ſub $\frac{2}{3} Ba$ & OV quam proxime. Eſt igitur rectangulum ſub $\frac{1}{2} Ba$ & Aa æquale rectangulo ſub $\frac{2}{3} Ba$ & OV, ideoque OV æqualis $\frac{3}{4} Aa$: & propterea corporis oſcillantis reſiſtentia in O ad ipſius gravitatem ut $\frac{3}{4} Aa$ ad longitudinem penduli.

Atque has conclusiones in rebus practicis abunde satis accuratas esse censeo. Nam cum ellipsis vel parabola *BRVSa* congruat cum figura *BKVTa* in puncto medio *V*, hæc si ad partem alterutram *BRV* vel *VSa* excedit figuram illam, deficiet ab eadem ad partem alteram, & sic eidem æquabitur quam proxime.

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA XXV.

Si corporis oscillantis resistentia in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in data ratione; differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eadem ratione.

Oritur enim differentia illa ex retardatione penduli per resistentiam medii, ideoque est ut retardatio tota eique proportionalis resistentia retardans. In superiore propositione rectangulum sub recta $\frac{1}{2}aB$ & arcuum illorum *CB*, *Ca* differentia *Aa* æqualis erat areæ *BKTa*. Et area illa, si maneat longitudo *aB*, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum *DK*; hoc est, in ratione resistentiæ, ideoque est ut longitudo *aB* & resistentia conjunctim. Proindeque rectangulum sub *Aa* & $\frac{1}{2}aB$ est ut *aB* & resistentia conjunctim, & propterea *Aa* ut resistentia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde si resistentia sit ut velocitas, differentia arcuum in eodem medio erit ut arcus totus descriptus: & contra.

Corol. 2. Si resistentia sit in duplicata ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicata ratione arcus totius: & contra.

Corol. 3. Et univerſaliter, ſi reſiſtentia ſit in triplicata vel alia quavis ratione velocitatis, differentia erit in eadem ratione arcus totius: & contra.

Corol. 4. Et ſi reſiſtentia ſit partim in ratione ſimplici velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata, differentia erit partim in ratione arcus totius & partim in ejus ratione duplicata: & contra. Eadem erit lex & ratio reſiſtentiæ pro velocitate, quæ eſt differentiæ illius pro longitudine arcus.

Corol. 5. Ideoque ſi, pendulo inæquales arcus ſucceſſive deſcribente, inveniri poteſt ratio incrementi ac decrementi differentiæ hujus pro longitudine arcus deſcripti; habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi reſiſtentiæ pro velocitate majore vel minore.

Scholium Generale.

Ex his propoſitionibus, per oſcillationes pendulorum in mediis quibuſcunque, invenire licet reſiſtentiam mediorum. Aeris vero reſiſtentiam inveſtigavi per experimenta ſequentia. Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57\frac{7}{22}$, diametro digitorum *Londinenſium* $6\frac{7}{8}$ fabricatum, filo tenui ab unco ſatis firmo ſuſpendi, ita ut inter uncum & centrum oſcillationis globi diſtantia eſſet pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem & uncia una a centro ſuſpenſionis diſtans; & e regione puncti illius collocavi regulam in digitos diſtinctam, quorum ope notarem longitudines arcuum a pendulo deſcriptas. Deinde numeravi oſcillationes quibus globus octavam motus ſui partem amitteret. Si pendulum deducebatur a perpendiculo ad diſtantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto ſuo deſcenſu deſcriberet arcum duorum digitorum, totaque oſcillatione prima, ex deſcenſu & aſcenſu ſubſequente compoſita, arcum digitorum fere quatuor: idem oſcillationibus 164 amiſit octavam motus ſui partem, ſic ut ultimo ſuo aſcenſu deſcriberet arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum quatuor; amiſit octavam motus partem oſcillationibus 121, ita ut aſcenſu ultimo deſcriberet arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum octo, ſexdecim, triginta duorum vel ſexaginta quatuor; amiſit octavam motus partem oſcillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, reſpective. Igitur differentia inter arcus deſcenſu primo & aſcenſu ulti-

mo descriptos, erat in casu primo, secundo, tertio, quarto, quinto, sexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 respective. Dividantur eæ differentiæ per numerum oscillationum in casu unoquoque, & in oscillatione una mediocri, qua arcus digitorum $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 descriptus fuit, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum, erit $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ partes digiti respective. Hæ autem in majoribus oscillationibus sunt in duplicata ratione arcuum descriptorum quam proxime, in minoribus vero paulo majores quam in ea ratione; & propterea (per corol. 2. prop. XXXI. libri hujus) resistentia globi, ubi celerius movetur, est in duplicata ratione velocitatis quam proxime; ubi tardius, paulo major quam in ea ratione.

Designet jam V velocitatem maximam in oscillatione quavis, sintque A, B, C quantitates datæ, & fingamus quod differentia arcuum sit $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^{2}$. Cum velocitates maximæ sint in cycloide ut semisses arcuum oscillando descriptorum, in circulo vero ut semissium arcuum illorum chordæ; ideoque paribus arcubus majores sint in cycloide quam in circulo, in ratione semissium arcuum ad eorundem chordas; tempora autem in circulo sint majora quam in cycloide in velocitatis ratione reciproca; patet arcuum differentias (quæ sunt ut resistentia & quadratum temporis conjunctim) easdem fore, quamproxime, in utraque curva: deberent enim differentiæ illæ in cycloide augeri, una cum resistentia, in duplicata circiter ratione arcus ad chordam, ob velocitatem in ratione illa simplici auctam; & diminui, una cum quadrato temporis, in eadem duplicata ratione. Itaque ut reductio fiat ad cycloidem, eædem sumendæ sunt arcuum differentiæ quæ fuerunt in circulo observatæ, velocitates vero maximæ ponendæ sunt arcubus vel dimidiatis vel integris, hoc est, numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 analogæ. Scribamus ergo in casu secundo, quarto & sexto numeros 1, 4 & 16 pro V; & prodibit arcuum differentia $\frac{\frac{1}{2}}{121} = A + B + C$ in casu secundo; $\frac{2}{35\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$ in casu quarto; & $\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16A + 64B + 256C$ in casu sexto. Et ex his æquationibus, per debitam collationem & reductionem analyticam, fit $A = 0{,}0000916$, $B = 0{,}0010847$, & $C = 0{,}0029558$. Est igitur differentia arcuum ut $0{,}0000916\,V + 0{,}0010847\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0029558\,V^{2}$: & prop-

& propterea cum (per corollarium propositionis xxx. applicatum ad hunc casum) resistentia globi in medio arcus oscillando descripti, ubi velocitas est V, sit ad ipsius pondus ut $\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem penduli; si pro A, B & C scribantur numeri inventi, fiet resistentia globi ad ejus pondus, ut $0,0000583\,V + 0,0007593\,V^{\frac{3}{2}} + 0,0022169\,V^2$ ad longitudinem penduli inter centrum suspensionis & regulam, id est, ad 121 digitos. Unde cum V in casu secundo designet 1, in quarto 4, in sexto 16: erit resistentia ad pondus globi in casu secundo ut 0,0030345 ad 121, in quarto ut 0,041748 ad 121, in sexto ut 0,61705 ad 121.

Arcus quem punctum in filo notatum in casu sexto descripsit, erat $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ seu $119\frac{5}{29}$ digitorum. Et propterea cum radius esset 121 digitorum, & longitudo penduli inter punctum suspensionis & centrum globi esset 126 digitorum, arcus quem centrum globi descripsit erat $124\frac{3}{31}$ digitorum. Quoniam corporis oscillantis velocitas maxima, ob resistentiam aeris, non incidit in punctum infimum arcus descripti, sed in medio fere loco arcus totius versatur: hæc eadem erit circiter ac si globus descensu suo toto in medio non resistente describeret arcus illius partem dimidiam digitorum $62\frac{3}{62}$, idque in cycloide, ad quam motum penduli supra reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati quam globus, perpendiculariter cadendo & casu suo describendo altitudinem arcus illius sinui verso æqualem, acquirere posset. Est autem sinus ille versus in cycloide ad arcum istum $62\frac{3}{62}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis digitis 15,278. Quare velocitas ea ipsa est quam corpus cadendo & casu suo spatium 15,278 digitorum describendo acquirere posset. Tali igitur cum velocitate globus resistentiam patitur, quæ sit ad ejus pondus ut 0,61705 ad 121, vel (si resistentiæ pars illa sola spectetur quæ est in velocitatis ratione duplicata) ut 0,56752 ad 121.

Experimento autem hydrostatico inveni quod pondus globi hujus lignei esset ad pondus globi aquei magnitudinis ejusdem ut 55 ad 97: & propterea cum 121 sit ad 213,4 in eadem ratione, erit resistentia globi aquei præfata cum velocitate progredientis ad ipsius pondus ut 0,56752 ad 213,4, id est, ut 1 ad $376\frac{1}{50}$. Unde cum pondus

dus globi aquei, quo tempore globus cum velocitate uniformiter continuata deſcribat longitudinem digitorum 30,556, velocitatem illam omnem in globo cadente generare poſſet; manifeſtum eſt quod vis reſiſtentiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem minorem in ratione 1 ad $376\frac{1}{50}$, hoc eſt, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$. Et propterea quo tempore globus, ea cum velocitate uniformiter continuata, longitudinem ſemidiametri ſuæ, ſeu digitorum $3\frac{7}{16}$, deſcribere poſſet, eodem amitteret motus ſui partem $\frac{1}{3342}$.

Numerabam etiam oſcillationes quibus pendulum quartam motus ſui partem amiſit. In ſequente tabula numeri ſupremi denotant longitudinem arcus deſcenſu primo deſcripti, in digitis & partibus digiti expreſſam: numeri medii ſignificant longitudinem arcus aſcenſu ultimo deſcripti; & loco infimo ſtant numeri oſcillationum. Experimentum deſcripſi tanquam magis accuratum quam cum motus pars tantum octava amitteretur. Calculum tentet qui volet.

Deſcenſus primus	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oſcillat.	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Poſtea globum plumbeum diametro digitorum 2, & pondere unciarum *Romanarum* $26\frac{1}{4}$ ſuſpendi filo eodem, ſic ut inter centrum globi & punctum ſuſpenſionis intervallum eſſet pedum $10\frac{1}{2}$, & numerabam oſcillationes quibus data motus pars amitteretur. Tabularum ſubſequentium prior exhibet numerum oſcillationum quibus pars octava motus totius ceſſavit; ſecunda numerum oſcillationum quibus ejuſdem pars quarta amiſſa fuit.

Deſcenſus primus	1	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Numerus Oſcillat.	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30

Deſcenſus primus	1	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oſcillat.	510	518	420	318	204	121	70

In tabula priore ſeligendo ex obſervationibus tertiam, quintam &

ſeptimam,

ſeptimam, & exponendo velocitates maximas in his obſervationibus particulatim per numeros 1, 4, 16 reſpective, & generaliter per quantitatem V ut ſupra: emerget in obſervatione tertia $\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C$, in quinta $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$, in ſeptima $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$. Hæ vero æquationes reductæ dant $A = 0{,}001414$, $B = 0{,}000297$, $C = 0{,}000879$. Et inde prodit reſiſtentia globi cum velocitate V moti in ea ratione ad pondus ſuum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0{,}0009\,V + 0{,}000208\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}000659\,V^2$ ad penduli longitudinem 121 digitorum. Et ſi ſpectemus eam ſolummodo reſiſtentiæ partem quæ eſt in duplicata ratione velocitatis, hæc erit ad pondus globi ut $0{,}000659\,V^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars reſiſtentiæ in experimento primo ad pondus globi lignei unciarum $57\frac{7}{22}$ ut $0{,}002217\,V^2$ ad 121: & inde fit reſiſtentia globi lignei ad reſiſtentiam globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{7}{22}$ in $0{,}002217$ ad $26\frac{1}{4}$ in $0{,}000659$, id eſt, ut $7\frac{1}{3}$ ad 1. Diametri globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ & 2 digitorum, & harum quadrata ſunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ & 4, ſeu $11\frac{13}{16}$ & 1 quamproxime. Ergo reſiſtentiæ globorum æquivelocium erant in minore ratione quam duplicata diametrorum. At nondum conſideravimus reſiſtentiam fili, quæ certe permagna erat, ac de pendulorum inventa reſiſtentia ſubduci debet. Hanc accurate definire non potui, ſed majorem tamen inveni quam partem tertiam reſiſtentiæ totius minoris penduli; & inde didici quod reſiſtentiæ globorum, dempta fili reſiſtentia, ſunt quam proxime in duplicata ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, ſeu $10\frac{1}{2}$ ad 1 non longe abeſt a diametrorum ratione duplicata $11\frac{13}{16}$ ad 1.

Cum reſiſtentia fili in globis majoribus minoris ſit momenti, tentavi etiam experimentum in globo cujus diameter erat $18\frac{3}{4}$ digitorum. Longitudo penduli inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis erat digitorum $122\frac{1}{2}$, inter punctum ſuſpenſionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli deſcenſu a nodo deſcriptus 32 dig. Arcus aſcenſu ultimo poſt oſcillationes quinque ab eodem nodo deſcriptus 28 dig. Summa arcuum ſeu arcus totus oſcillatione mediocri deſcriptus 60 dig. Differentia arcuum 4 dig. Ejus pars decima ſeu differentia inter deſcenſum & aſcenſum in

oſcil-

oſcillatione mediocri $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$ ita arcus totus 60 dig. oſcillatione mediocri a nodo deſcriptus ad arcum totum $67\frac{1}{8}$ dig. oſcillatione mediocri a centro globi deſcriptum; & ita differentia $\frac{2}{5}$ ad differentiam novam 0,4475. Si longitudo penduli, manente longitudine arcus deſcripti, augeretur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$; tempus oſcillationis augeretur & velocitas penduli diminueretur in ratione illa ſubduplicata, maneret vero arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum differentia 0,4475. Deinde ſi arcus deſcriptus augeretur in ratione $124\frac{3}{31}$ ad $67\frac{1}{8}$, differentia iſta 0,4475 augeretur in duplicata illa ratione, ideoque evaderet 1,5295. Hæc ita ſe haberent, ex hypotheſi quod reſiſtentia penduli eſſet in duplicata ratione velocitatis. Ergo ſi pendulum deſcriberet arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, & longitudo ejus inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis eſſet 126 digitorum, differentia arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum foret 1,5295 digitorum. Et hæc differentia ducta in pondus globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 318,136. Rurſus ubi pendulum ſuperius ex globo ligneo conſtructum centro oſcillationis, quod a puncto ſuſpenſionis digitos 126 diſtabat, deſcribebat arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, differentia arcuum deſcenſu & aſcenſu deſcriptum fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$, quæ ducta in pondus globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{22}$, producit 49,396. Duxi autem differentias haſce in pondera globorum, ut invenirem eorum reſiſtentias. Nam differentiæ oriuntur ex reſiſtentiis, ſuntque ut reſiſtentiæ directe & pondera inverſe. Sunt igitur reſiſtentiæ ut numeri 318,136 & 49,396. Pars autem reſiſtentiæ globi minoris, quæ eſt in duplicata ratione velocitatis, erat ad reſiſtentiam totam ut 0,56752 ad 0,61675, id eſt, ut 45,453 ad 49,396; & pars reſiſtentiæ globi majoris propemodum æquatur ipſius reſiſtentiæ toti; ideoque partes illæ ſunt ut 318,136 & 45,453 quamproxime, id eſt, ut 7 & 1. Sunt autem globorum diametri $18\frac{3}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{9}{16}$ & $47\frac{17}{64}$ ſunt ut 7,438 & 1, id eſt, ut globorum reſiſtentiæ 7 & 1 quamproxime. Differentia rationum haud major eſt, quam quæ ex fili reſiſtentia oriri potuit. Igitur reſiſtentiarum partes illæ quæ ſunt, paribus globis, ut quadrata velocitatum; ſunt etiam, paribus velocitatibus, ut quadrata diametrorum globorum.

Cæterum

Cæterum globorum, quibus usus sum in his experimentis, maximus non erat perfecte sphæricus, & propterea in calculo hic allato minutias quasdam brevitatis gratia neglexi; de calculo accurato in experimento non satis accurato minime sollicitus. Optarim itaque, cum demonstratio vacui ex his dependeat, ut experimenta cum globis & pluribus & majoribus & magis accuratis tentarentur. Si globi sumantur in proportione geometrica, puta quorum diametri sint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progressione experimentorum colligetur quid in globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam vero conferendo resistentias diversorum fluidorum inter se tentavi sequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aqua fontana, fecique ut immersa pendula in medio aquæ oscillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{6}$ unciarum, diametro $3\frac{5}{8}$ digitorum movebatur ut in tabula sequente descripsimus, existente videlicet longitudine penduli a puncto suspensionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oscillationis autem centrum $134\frac{3}{8}$ digitorum.

Arcus descensu primo a puncto in filo notato descriptus, digitorum	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus ascensu ultimo descriptus, digitorum	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum differentia motui amisso proportionalis, digitorum	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oscillationum in aqua			$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Numerus Oscillationum in aere	$85\frac{1}{2}$		287	535					

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oscillationibus 535 in aere, & $1\frac{1}{5}$ in aqua amissi sunt. Erant quidem oscillationes in aere paulo celeriores quam in aqua. At si oscillationes in aqua in ea ratione accelerarentur ut motus pendulorum in medio utroque fierent æquiveloces, maneret numerus idem oscillationum $1\frac{1}{5}$ in aqua, quibus motus idem ac prius amitteretur; ob resistentiam auctam & simul quadratum temporis diminutum in eadem ratione illa duplicata. Paribus igitur pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oscillationibus 535 & in aqua oscillationibus $1\frac{1}{5}$ amissi sunt; ideoque resistentia penduli in aqua est ad ejus resistentiam in aere

De Motu Corporum

ut 535 ad $1\frac{1}{5}$. Hæc eſt proportio reſiſtentiarum totarum in caſu columnæ quartæ.

Deſignet jam $AV + CV^2$ differentiam arcuum in deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum a globo in aere cum velocitate maxima V moto; & cum velocitas maxima in caſu columnæ quartæ ſit ad velocitatem maximam in caſu columnæ primæ, ut 1 ad 8; & differentia illa arcuum in caſu columnæ quartæ ad differentiam in caſu columnæ primæ ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, ſeu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: ſcribamus in his caſibus 1 & 8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro differentiis arcuum, & fiet $A + C = 85\frac{1}{2}$ & $8A + 64C = 4280$ ſeu $A + 8C = 535$; indeque per reductionem æquationum proveniet $7C = 449\frac{1}{2}$ & $C = 64\frac{3}{14}$ & $A = 21\frac{2}{7}$: atque ideo reſiſtentia, cum ſit ut $\frac{7}{11}AV + \frac{3}{4}CV^2$, erit ut $13\frac{6}{11}V + 48\frac{9}{56}V^2$. Quare in caſu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, reſiſtentia tota eſt ad partem ſuam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11} + 48\frac{9}{56}$ ſeu $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$; & idcirco reſiſtentia penduli in aqua eſt ad reſiſtentiæ partem illam in aere, quæ quadrato velocitatis proportionalis eſt, quæque ſola in motibus velocioribus conſideranda venit, ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$ & 535 ad $1\frac{1}{5}$ conjunctim, id eſt, ut 571 ad 1. Si penduli in aqua oſcillantis filum totum fuiſſet immerſum, reſiſtentia ejus fuiſſet adhuc major; adeo ut penduli in aqua oſcillantis reſiſtentia illa, quæ velocitatis quadrato proportionalis eſt, quæque ſola in corporibus velocioribus conſideranda venit, ſit ad reſiſtentiam ejuſdem penduli totius, eadem cum velocitate in aere oſcillantis, ut 850 ad 1 circiter, hoc eſt, ut denſitas aquæ ad denſitatem aeris quamproxime.

In hoc calculo ſumi quoque deberet pars illa reſiſtentiæ penduli in aqua, quæ eſſet ut quadratum velocitatis, ſed (quod mirum forte videatur) reſiſtentia in aqua augebatur in ratione velocitatis pluſquam duplicata. Ejus rei cauſam inveſtigando, in hanc incidi, quod arca nimis anguſta eſſet pro magnitudine globi penduli, & motum aquæ cedentis præ anguſtia ſua nimis impediebat. Nam ſi globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur; reſiſtentia augebatur in duplicata ratione velocitatis quam proxime. Id tentabam conſtruendo pendulum ex globis duobus, quorum inferior & minor oſcillaretur in aqua, ſuperior & major proxime ſupra aquam filo affixus eſſet, & in aere oſcillando, adjuvaret motum penduli

duli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo instituta se habebant ut in tabula sequente describitur.

Arcus descensu primo descriptus	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus ascensu ultimo descriptus	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum diff. motui amisso proport.	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oscillationum	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Conferendo resistentias mediorum inter se, effeci etiam ut pendula ferrea oscillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quasi trium, & diameter globi penduli quasi tertia pars digiti. Ad filum autem proxime supra mercurium affixus erat globus alius plumbeus satis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vasculum, quod capiebat quasi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aqua communi, ut pendulo in fluido utroque successive oscillante, invenirem proportionem resistentiarum: & prodiit resistentia argenti vivi ad resistentiam aquæ ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id est, ut densitas argenti vivi ad densitatem aquæ. Ubi globum pendulum paulo majorem adhibebam, puta cujus diameter esset quasi $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat resistentia argenti vivi in ea ratione ad resistentiam aquæ, quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum est, propterea quod in his ultimis vas nimis angustum fuit pro magnitudine globi immersi. Ampliato globo, deberet etiam vas ampliari. Constitueram quidem hujusmodi experimenta in vasis majoribus & in liquoribus tum metallorum fusorum, tum aliis quibusdam tam calidis quam frigidis repetere: sed omnia experiri non vacat, & ex jam descriptis satis liquet resistentiam corporum celeriter motorum densitati fluidorum in quibus moventur proportionalem esse quam proxime. Non dico accurate. Nam fluida tenaciora, pari densitate, proculdubio magis resistunt quam liquidiora, ut oleum frigidum quam calidum, calidum quam aqua pluvialis, aqua quam spiritus vini. Verum in liquoribus, qui ad sensum satis fluidi sunt, ut in aere, in aqua seu dulci seu salsa, in spiritibus vini, terebinthi & salium, in oleo a fæcibus per destillationem liberato & calefacto, oleoque vitrioli & mercurio, ac metallis liquefactis, & siqui sint alii, qui tam fluidi sunt ut in vasis agitati motum impressum diutius conservent, effusique liberrime in guttas decurrendo resolvantur, nullus

 dubito

dubito quin regula allata satis accurate obtineat: præsertim si experimenta in corporibus pendulis & majoribus & velocius motis instituantur.

Denique cum nonnullorum opinio sit, medium quoddam æthereum & longe subtilissimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrime permeet; a tali autem medio per corporum poros fluente resistentia oriri debeat: ut tentarem an resistentia, quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externa superficie, an vero partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis ab unco chalybeo satis firmo, mediante annulo chalybeo, suspendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad constituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus sursum præacutus erat acie concava, ut annulus arcu suo superiore aciei innixus liberrime moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita constitutum deducebam a perpendiculo ad distantiam quasi pedum sex, idque secundum planum aciei unci perpendiculare, ne annulus, oscillante pendulo, supra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum suspensionis, in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accurate notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demisso notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oscillationis primæ, secundæ ac tertiæ. Hoc repetebam sæpius, ut loca illa quam potui accuratissime invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuam, una cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio partis reliquæ quæ inter uncum & pyxidem pendulam tendebatur. Nam filum tensum dimidio ponderis sui pendulum a perpendiculo digressum semper urget. Huic ponderi addebam pondus aeris quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat quasi pars septuagesima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis metallorum plena, pondere suo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam filum ut penduli jam oscillantis eadem esset longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum retracto ac dimisso, numerabam oscillationes quasi septuaginta & septem, donec pyxis ad locum secundo notatum rediret, totidemque subinde donec pyxis ad

locum

locum tertio notatum rediret, atque rursus totidem donec pyxis reditu suo attingeret locum quartum. Unde concludo quod resistentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad resistentiam pyxidis vacuæ quam 78 ad 77. Nam si æquales essent ambarum resistentiæ, pyxis plena ob vim suam insitam septuagies & octies majorem vi insita pyxidis vacuæ, motum suum oscillatorium tanto diutius conservare deberet, atque ideo completis semper oscillationibus 78 ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oscillationibus 77.

Designet igitur A resistentiam pyxidis in ipsius superficie externa, & B resistentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & si resistentiæ corporum æquivelocium in partibus internis sint ut materia, seu numerus particularum quibus resistitur: erit 78B resistentia pyxidis plenæ in ipsius partibus internis: ideoque pyxidis vacuæ resistentia tota $A+B$ erit ad pyxidis plenæ resistentiam totam $A+78B$ ut 77 ad 78, & divisim $A+B$ ad $77B$, ut 77 ad 1, indeque $A+B$ ad B ut 77×77 ad 1, & divisim A ad B ut 5928 ad 1. Est igitur resistentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejusdem resistentia in externa superficie, & amplius. Sic vero disputamus ex hypothesi quod major illa resistentia pyxidis plenæ, non ab alia aliqua causa latente oriatur, sed ab actione sola fluidi alicujus subtilis in metallum inclusum.

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in qua illud aliquando descripseram, intercidit. Unde fractas quasdam numerorum partes, quæ memoria exciderunt, omittere compulsus sum. Nam omnia denuo tentare non vacat. Prima vice, cum unco infirmo usus essem, pyxis plena citius retardabatur. Causam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & ejus oscillationibus obsequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum suspensionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti supra descripsimus.

SECTIO

SECTIO VII.

De motu fluidorum & resistentia projectilium.

PROPOSITIO XXXII. THEOREMA XXVI.

Si corporum systemata duo similia ex æquali particularum numero constent, & particulæ correspondentes similes sint & proportionales, singulæ in uno systemate singulis in altero, & similiter sitæ inter se, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, & inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant (eæ inter se quæ in uno sunt systemate & eæ inter se quæ sunt in altero) & si non tangant se mutuo quæ in eodem sunt systemate, nisi in momentis reflexionum, neque attrahant, vel fugent se mutuo, nisi viribus acceleratricibus quæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe: dico quod systematum particulæ illæ pergent inter se temporibus proportionalibus similiter moveri.

Corpora similia & similiter sita temporibus proportionalibus inter se similiter moveri dico, quorum situs ad invicem in fine temporum illorum semper sunt similes: puta si particulæ unius systematis cum alterius particulis correspondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus similes & proportionales figurarum similium partes a particulis correspondentibus describuntur. Igitur si duo sint ejusmodi systemata, particulæ correspondentes, ob similitudinem incœptorum motuum, pergent similiter moveri, usque donec sibi mutuo occurrant. Nam si nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter in lineis rectis per motus leg. 1. Si viribus aliquibus se mutuo agitant, & vires illæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe; quoniam particularum situs sunt similes & vires proportionales, vires totæ quibus particulæ correspondentes agitantur, ex viribus singulis agitantibus

tibus (per legum corollarium secundum) compositæ, similes habebunt determinationes, perinde ac si centra inter particulas similiter sita respicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires singulæ componentes, hoc est, ut correspondentium particularum diametri inverse, & quadrata velocitatum directe: & propterea efficient ut correspondentes particulæ figuras similes describere pergant. Hæc ita se habebunt (per corol. 1. & 8 prop. iv. lib. 1.) si modo centra illa quiescant. Sin moveantur, quoniam ob translationum similitudinem, similes manent eorum situs inter systematum particulas; similes inducentur mutationes in figuris quas particulæ describunt. Similes igitur erunt correspondentium & similium particularum motus usque ad occursus suos primos, & propterea similes occursus, & similes reflexiones, & subinde (per jam ostensa) similes motus inter se donec iterum in se mutuo inciderint, & sic deinceps in infinitum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpora duo quævis, quæ similia sint & ad systematum particulas correspondentes similiter sita, inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, sintque eorum magnitudines ac densitates ad invicem ut magnitudines ac densitates correspondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus similiter moveri. Est enim eadem ratio partium majorum systematis utriusque atque particularum.

Corol. 2. Et si similes & similiter positæ systematum partes omnes quiescant inter se: & earum duæ, quæ cæteris majores sint, & sibi mutuo in utroque systemate correspondeant, secundum lineas similiter sitas simili cum motu utcunque moveri incipiant: hæ similes in reliquis systematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri; atque ideo spatia diametris suis proportionalia describere.

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA XXVII.

Iisdem positis, dico quod systematum partes majores resistuntur in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum suarum & duplicata ratione diametrorum & ratione densitatis partium systematum.

Nam resistentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis

gis quibus particulæ ſyſtematum ſe mutuo agitant, partim ex occurſibus & reflexionibus particularum & partium majorum. Prioris autem generis reſiſtentiæ ſunt ad invicem ut vires totæ motrices a quibus oriuntur, id eſt, ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correſpondentibus; hoc eſt (per hypotheſin) ut quadrata velocitatum directe & diſtantiæ particularum correſpondentium inverſe & quantitates materiæ in partibus correſpondentibus directe: ideoque cum diſtantiæ particularum ſyſtematis unius ſint ad diſtantias correſpondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in ſyſtemate priore ad diametrum particulæ vel partis correſpondentis in altero, & quantitates materiæ ſint ut denſitates partium & cubi diametrorum; reſiſtentiæ ſunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & denſitates partium ſyſtematum. *Q. E. D.* Poſterioris generis reſiſtentiæ ſunt ut reflexionum correſpondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum ſunt ad invicem ut velocitates partium correſpondentium directe, & ſpatia inter earum reflexiones inverſe. Et vires reflexionum ſunt ut velocitates & magnitudines & denſitates partium correſpondentium conjunctim; id eſt, ut velocitates & diametrorum cubi & denſitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, reſiſtentiæ partium correſpondentium ſunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & denſitates partium conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur ſi ſyſtemata illa ſint fluida duo elaſtica ad modum aeris, & partes eorum quieſcant inter ſe: corpora autem duo ſimilia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & denſitatem proportionalia, & inter partes illas ſimiliter poſita, ſecundum lineas ſimiliter poſitas utcunque projiciantur; vires autem acceleratrices, quibus particulæ fluidorum ſe mutuo agitant, ſint ut corporum projectorum diametri inverſe, & quadrata velocitatum directe: corpora illa temporibus proportionalibus ſimiles excitabunt motus in fluidis, & ſpatia ſimilia ac diametris ſuis proportionalia deſcribent.

Corol. 2. Proinde in eodem fluido projectile velox reſiſtentiam patitur, quæ eſt in duplicata ratione velocitatis quam proxime. Nam ſi vires, quibus particulæ diſtantes ſe mutuo agitant, augerentur in duplicata ratione velocitatis, reſiſtentia foret in eadem ratione duplicata accurate; ideoque in medio, cujus partes ab invicem diſtan-

tes sese viribus nullis agitant, resistentia est in duplicata ratione velocitatis accurate. Sunto igitur media tria *A*, *B*, *C* ex partibus similibus & æqualibus & secundum distantias æquales regulariter dispositis constantia. Partes mediorum *A* & *B* fugiant se mutuo viribus quæ sint ad invicem ut *T* & *V*, illæ medii *C* ejusmodi viribus omnino destituantur. Et si corpora quatuor æqualia *D*, *E*, *F*, *G* in his mediis moveantur, priora duo *D* & *E* in prioribus duobus *A* & *B*, & altera duo *F* & *G* in tertio *C*; sitque velocitas corporis *D* ad velocitatem corporis *E*, & velocitas corporis *F* ad velocitatem corporis *G* in subduplicata ratione virium *T* ad vires *V*: resistentia corporis *D* erit ad resistentiam corporis *E*, & resistentia corporis *F* ad resistentiam corporis *G*, in velocitatum ratione duplicata; & propterea resistentia corporis *D* erit ad resistentiam corporis *F* ut resistentia corporis *E* ad resistentiam corporis *G*. Sunto corpora *D* & *F* æquivelocia ut & corpora *E* & *G*; & augendo velocitates corporum *D* & *F* in ratione quacunque, ac diminuendo vires particularum medii *B* in eadem ratione duplicata, accedet medium *B* ad formam & conditionem medii *C* pro libitu, & idcirco resistentiæ corporum æqualium & æquivelocium *E* & *G* in his mediis, perpetuo accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cum resistentiæ corporum *D* & *F* sint ad invicem ut resistentiæ corporum *E* & *G*, accedent etiam hæ similiter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur *D* & *F*, ubi velocissime moventur, resistentiæ sunt æquales quam proxime: & propterea cum resistentia corporis *F* sit in duplicata ratione velocitatis, erit resistentia corporis *D* in eadem ratione quam proxime.

Corol. 3. Corporis in fluido quovis elastico velocissime moti eadem fere est resistentia ac si partes fluidi viribus suis centrifugis destituerentur, seque mutuo non fugerent: si modo fluidi vis elastica ex particularum viribus centrifugis oriatur, & velocitas adeo magna sit ut vires non habeant satis temporis ad agendum.

Corol. 4. Proinde cum resistentiæ similium & æquivelocium corporum, in medio cujus partes distantes se mutuo non fugiunt, sint ut quadrata diametrorum; sunt etiam æquivelocium & celerrime motorum corporum resistentiæ in fluido elastico ut quadrata diametrorum quam proxime.

Corol. 5. Et cum corpora similia, æqualia & æquivelocia, in mediis ejusdem densitatis, quorum particulæ se mutuo non fugiunt, sive particulæ illæ sint plures & minores, sive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus impingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & vicissim (per motus legem tertiam) æqualem ab eadem reactionem patiantur, hoc est, æqualiter resistantur: manifestum est etiam quod in ejusdem densitatis fluidis elasticis, ubi velocissime moventur, æquales sint eorum resistentiæ quam proxime; sive fluida illa ex particulis crassioribus constent, sive ex omnium subtilissimis constituantur. Ex medii subtilitate resistentia projectilium celerrime motorum non multum diminuitur.

Corol. 6. Hæc omnia ita se habent in fluidis, quorum vis elastica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod si vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expansione ad instar lanæ vel ramorum arborum, aut ex alia quavis causa, qua motus particularum inter se redduntur minus liberi: resistentia, ob minorem medii fluiditatem, erit major quam in superioribus corollariis.

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA XXVIII.

Si globus & cylindrus æqualibus diametris descripti, in medio raro ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem distantias libere dispositis constante, secundum plagam axis cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit resistentia globi duplo minor quam resistentia cylindri.

Nam quoniam actio medii in corpus eadem est (per legum corol. 5.) sive corpus in medio quiescente moveatur, sive medii particulæ eadem cum velocitate impingant in corpus quiescens: consideremus corpus tanquam quiescens, & videamus quo impetu urgebitur a medio movente. Designet igitur $ABKI$ corpus sphæricum centro C semidiametro CA descriptum, & incidant particulæ medii data cum velocitate in corpus illud sphæricum, secundum rectas ipsi AC parallelas: sitque FB ejusmodi recta. In ea capiatur LB semidiametro CB æqualis, & ducatur BD quæ sphæram tangat in B. In KC & BD demittantur perpendiculares BE, LD, & vis qua particula

ticula medii, ſecundum rectam *FB* oblique incidendo, globum ferit in *B*, erit ad vim qua particula eadem cylindrum *ONGQ* axe *ACI* circa globum deſcriptum perpendiculariter feriret in *b*, ut *LD* ad *LB* vel *BE* ad *BC*. Rurſus efficacia hujus vis ad movendum globum ſecundum incidentiæ ſuæ plagam *FB* vel *AC*, eſt ad ejuſdem efficaciam ad movendum globum ſecundum plagam determinationis ſuæ, id eſt, ſecundum plagam rectæ *BC* qua globum directe urget ut *BE* ad *BC*. Et conjunctis rationibus, efficacia particulæ in globum ſecundum rectam *FB* oblique incidentis, ad movendum eundem ſecundum plagam incidentiæ ſuæ, eſt ad efficaciam particulæ ejuſdem ſecundum eandem rectam in cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipſum movendum in plagam eandem, ut *BE* quadratum ad *BC* quadratum. Quare ſi in *bE*, quæ perpendicularis eſt ad cylindri baſem circularem *NAO* & æqualis radio *AC*, ſumatur *bH* æqualis $\frac{BE\ quad.}{CB}$: erit *bH* ad *bE* ut effectus particulæ in globum ad effectum particulæ in cylindrum. Et propterea ſolidum quod a rectis omnibus *bH* occupatur erit ad ſolidum quod a rectis omnibus *bE* occupatur, ut effectus particularum omnium in globum ad effectum particularum omnium in cylindrum. Sed ſolidum prius eſt parabolois vertice *C*, axe *CA* & latere recto *CA* deſcriptum, & ſolidum poſterius eſt cylindrus paraboloidi circumſcriptus: & notum eſt quod parabolois ſit ſemiſſis cylindri circumſcripti. Ergo vis tota medii in globum eſt duplo minor quam ejuſdem vis tota in cylindrum. Et propterea ſi particulæ medii quieſcerent, & cylindrus ac globus æquali cum velocitate moverentur, foret reſiſtentia globi duplo minor quam reſiſtentia cylindri. *Q.E.D.*

Scholium.

Eadem methodo figuræ aliæ inter ſe quoad reſiſtentiam comparari poſſunt, eæque inveniri quæ ad motus ſuos in mediis reſiſtentibus continuandos aptiores ſunt. Ut ſi baſe circulari *CEBH*, quæ

centro *O*, radio *OC* describitur, & altitudine *OD*, construendum sit frustum coni *CBGF*, quod omnium eadem basi & altitudine constructorum & secundum plagam axis sui versus *D* progredientium frustorum minime resistatur: biseca altitudinem *OD* in *Q* & produc *OQ* ad *S* ut sit *QS* æqualis *QC*, & erit *S* vertex coni cujus frustum quæritur.

Unde obiter, cum angulus *CSB* semper sit acutus, consequens est, quod si solidum *ADBE* convolutione figuræ ellipticæ vel ovalis *ADBE* circa axem *AB* facta generetur, & tangatur figura generans a rectis tribus *FG*, *GH*, *HI* in punctis *F*, *B* & *I*, ea lege ut *GH* sit perpendicularis ad axem in puncto contactus *B*, & *FG*, *HI* cum eadem *GH* contineant angulos *FGB*, *BHI* graduum 135, solidum, quod convolutione figuræ *ADFGHIE* circa axem eundem *AB* generatur, minus resistitur quam solidum prius; si modo utrumque secundum plagam axis sui *AB* progrediatur, & utriusque terminus *B* præcedat. Quam quidem propositionem in construendis navibus non inutilem futuram esse censeo.

Quod si figura *DNFG* ejusmodi sit curva, ut, si ab ejus puncto quovis *N* ad axem *AB* demittatur perpendiculum *NM*, & a puncto dato *G* ducatur recta *GR* quæ parallela sit rectæ figuram tangenti in *N*, & axem productum secet in *R*, fuerit *MN* ad *GR* ut *GR cub.* ad $4BR \times GBq$; solidum quod figuræ hujus revolutione circa axem *AB* facta describitur, in medio raro prædicto ab *A* versus

ſus B movendo, minus reſiſtetur quam aliud quodvis eadem longitudine & latitudine deſcriptum ſolidum circulare.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA VII.

Si medium rarum ex particulis quam minimis quieſcentibus æqualibus & ad æquales ab invicem diſtantias libere diſpoſitis conſtet: invenire reſiſtentiam globi in hoc medio uniformiter progredientis.

Caſ. 1. Cylindrus eadem diametro & altitudine deſcriptus progredi intelligatur eadem velocitate ſecundum longitudinem axis ſui in eodem medio. Et ponamus quod particulæ medii, in quas globus vel cylindrus incidit, vi reflexionis quam maxima reſiliant. Et cum reſiſtentia globi (per propoſitionem noviſſimam) ſit duplo minor quam reſiſtentia cylindri, & globus ſit ad cylindrum ut duo ad tria, & cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas, ipſaſque quam maxime reflectendo, duplam ſui ipſius velocitatem ipſis communicet: cylindrus, quo tempore dimidiam longitudinem axis ſui uniformiter progrediendo deſcribit, communicabit motum particulis, qui ſit ad totum cylindri motum ut denſitas medii ad denſitatem cylindri; & globus, quo tempore totam longitudinem diametri ſuæ uniformiter progrediendo deſcribit, communicabit motum eundem particulis; & quo tempore duas tertias partes diametri ſuæ deſcribit, communicabit motum particulis, qui ſit ad totum globi motum ut denſitas medii ad denſitatem globi. Et propterea globus reſiſtentiam patitur, quæ ſit ad vim qua totus ejus motus vel auferri poſſit vel generari quo tempore duas tertias partes diametri ſuæ uniformiter progrediendo deſcribit, ut denſitas medii ad denſitatem globi.

Caſ. 2. Ponamus quod particulæ medii in globum vel cylindrum incidentes non reflectantur; & cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas ſimplicem ſuam velocitatem ipſis communicabit, ideoque reſiſtentiam patitur duplo minorem quam in priore caſu, & reſiſtentia globi erit etiam duplo minor quam prius.

Caſ. 3. Ponamus quod particulæ medii vi reflexionis neque maxima neque nulla, ſed mediocri aliqua reſiliant a globo; & reſi-

De Motu Corporum

ſtentia globi erit in eadem ratione mediocri inter reſiſtentiam in primo caſu & reſiſtentiam in ſecundo. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc ſi globus & particulæ ſint infinite dura, & vi omni elaſtica & propterea etiam vi omni reflexionis deſtituta: reſiſtentia globi erit ad vim qua totus ejus motus vel auferri poſſit vel generari, quo tempore globus quatuor tertias partes diametri ſuæ deſcribit, ut denſitas medii ad denſitatem globi.

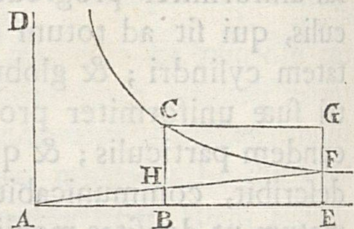
Corol. 2. Reſiſtentia globi, cæteris paribus, eſt in duplicata ratione velocitatis.

Corol. 3. Reſiſtentia globi, cæteris paribus, eſt in duplicata ratione diametri.

Corol. 4. Reſiſtentia globi, cæteris paribus, eſt ut denſitas medii.

Corol. 5. Reſiſtentia globi eſt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis & duplicata ratione diametri & ratione denſitatis medii.

Corol. 6. Et motus globi cum ejus reſiſtentia ſic exponi poteſt. Sit *AB* tempus quo globus per reſiſtentiam ſuam uniformiter continuatam totum ſuum motum amittere poteſt. Ad *AB* erigantur perpendicula *AD*, *BC*. Sitque *BC* motus ille totus, & per punctum *C* aſymptotis *AD*, *AB* deſcribatur hyperbola *CF*. Producatur *AB* ad punctum quodvis *E*. Erigatur perpendiculum *EF* hyperbolæ occurrens in *F*. Compleatur parallelogrammum *CBEG*, & agatur *AF* ipſi *BC* occurrens in *H*. Et ſi globus tempore quovis *BE*, motu ſuo primo *BC* uniformiter continuato, in medio non reſiſtente deſcribat ſpatium *CBEG* per aream parallelogrammi expoſitum, idem in medio reſiſtente deſcribet ſpatium *CBEF* per aream hyperbolæ expoſitum, & motus ejus in fine temporis illius exponetur per hyperbolæ ordinatam *EF*, amiſſa motus ejus parte *FG*. Et reſiſtentia ejus in fine temporis ejuſdem exponetur per longitudinem *BH*, amiſſa reſiſtentiæ parte *CH*. Patent hæc omnia per corol. 1. & 3. prop. v. lib. II.



Corol. 7. Hinc ſi globus tempore T per reſiſtentiam R uniformiter continuatam amittat motum ſuum totum M: idem globus tempore t in medio reſiſtente, per reſiſtentiam R in duplicata velocitatis ratione decreſcentem, amittet motus ſui M partem $\frac{tM}{T+t}$, manente

nente parte $\frac{TM}{T+t}$; & describet spatium quod sit ad spatium motu uniformi M eodem tempore t descriptum, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585092994 est ad numerum $\frac{t}{T}$, propterea quod area hyperbolica *BCFE* est ad rectangulum *BCGE* in hac proportione.

Scholium.

In hac propositione exposui resistentiam & retardationem projectilium sphæricorum in mediis non continuis, & ostendi quod hæc resistentia sit ad vim qua totus globi motus vel tolli possit vel generari quo tempore globus duas tertias diametri suæ partes velocitate uniformiter continuata describat, ut densitas medii ad densitatem globi, si modo globus & particulæ medii sint summe elastica & vi maxima reflectendi polleant: quodque hæc vis sit duplo minor ubi globus & particulæ medii sunt infinite dura & vi reflectendi prorsus destituta. In mediis autem continuis qualia sunt aqua, oleum calidum, & argentum vivum, in quibus globus non incidit immediate in omnes fluidi particulas resistentiam generantes, sed premit tantum proximas particulas & hæ premunt alias & hæ alias, resistentia est adhuc duplo minor. Globus utique in hujusmodi mediis fluidissimis resistentiam patitur quæ est ad vim qua totus ejus motus vel tolli possit vel generari quo tempore, motu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri suæ describat, ut densitas medii ad densitatem globi. Id quod in sequentibus conabimur ostendere.

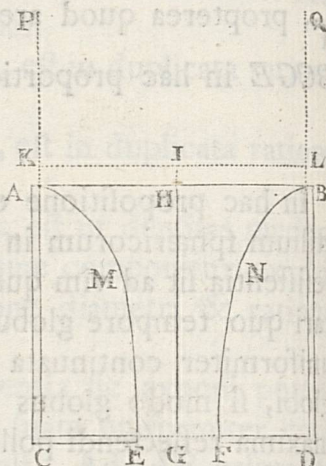
PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA VIII.

Aquæ de vase cylindrico per foramen in fundo factum effluentis definire motum.

Sit *ACDB* vas cylindricum, *AB* ejus orificium superius, *CD* fundum horizonti parallelum, *EF* foramen circulare in medio fundi, *G* centrum foraminis, & *GH* axis cylindri horizonti perpendicularis. Et finge cylindrum glaciei *APQB* ejusdem esse latitudinis cum

De Motu Corporum

cum cavitate vaſis, & axem eundem habere, & uniformi cum motu perpetuo deſcendere, & partes ejus quam primum attingunt ſuperficiem *AB* liqueſcere, & in aquam converſas gravitate ſua defluere in vas, & cataractam vel columnam aquæ *ABNFEM* cadendo formare, & per foramen *EF* tranſire, idemque adæquate implere. Ea vero ſit uniformis velocitas glaciei deſcendentis ut & aquæ contiguæ in circulo *AB*, quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IH* acquirere poteſt; & jaceant *IH* & *HG* in directum, & per punctum *I* ducatur recta *KL* horizonti parallela & lateribus glaciei occurrens in *K* & *L*. Et velocitas aquæ effluentis per foramen *EF* ea erit quam aqua cadendo ab *I* & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IG* acquirere poteſt. Ideoque per theoremata *Galilæi* erit *IG* ad *IH* in duplicata ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo *AB*, hoc eſt, in duplicata ratione circuli *AB* ad circulum *EF*; nam hi circuli ſunt reciproce ut velocitates aquarum quæ per ipſos, eodem tempore & æquali quantitate, adæquate tranſeunt. De velocitate aquæ horizontem verſus hic agitur. Et motus horizonti parallelus quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cum non oriatur a gravitate, nec motum horizonti perpendicularem a gravitate oriundum mutet, hic non conſideratur. Supponimus quidem quod partes aquæ aliquantulum cohærent, & per cohæſionem ſuam inter cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos, ut unicam tantum efforment cataractam & non in plures cataractas dividantur: ſed motum horizonti parallelum, a cohæſione illa oriundum, hic non conſideramus.



Caſ. 1. Concipe jam cavitatem totam in vaſe, in circuitu aquæ cadentis *ABNFEM*, glacie plenam eſſe, ut aqua per glaciem tanquam per infundibulum tranſeat. Et ſi aqua glaciem tantum non tangat, vel, quod perinde eſt, ſi tangat & per glaciem propter ſummam ejus polituram quam liberrime & ſine omni reſiſtentia labatur; hæc defluet per foramen *EF* eadem velocitate ac prius, & pondus totum columnæ aquæ *ABNFEM* impendetur in defluxum ejus gene-

generandum uti prius, & fundum vasis sustinebit pondus glaciei columnam ambientis. Liber Secundus.

Liquescat jam glacies in vase; & effluxus aquæ, quoad velocitatem, idem manebit ac prius. Non minor erit, quia glacies in aquam resoluta conabitur descendere: non major, quia glacies in aquam resoluta non potest descendere nisi impediendo descensum aquæ alterius descensui suo æqualem. Eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

Sed foramen in fundo vasis, propter obliquos motus particularum aquæ effluentis, paulo majus esse debet quam prius. Nam particulæ aquæ jam non transeunt omnes per foramen perpendiculariter; sed a lateribus vasis undique confluentes & in foramen convergentes, obliquis transeunt motibus; & cursum suum deorsum flectentes in venam aquæ exilientis conspirant, quæ exilior est paulo infra foramen quam in ipso foramine, existente ejus diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel $5\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{2}$ quam proxime, si modo diametros recte dimensus sum. Parabam utique laminam planam pertenuem in medio perforatam, existente circularis foraminis diametro partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exilientis cadendo acceleraretur & acceleratione redderetur angustior, hanc laminam non fundo sed lateri vasis affixi sic, ut vena illa egrederetur secundum lineam horizonti parallelam. Dein ubi vas aqua plenum esset, aperui foramen ut aqua efflueret; & venæ diameter, ad distantiam quasi dimidii digiti a foramine quam accuratissime mensurata, prodiit partium viginti & unius quadragesimarum digiti. Erat igitur diameter foraminis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quamproxime. Aqua igitur transeundo per foramen, convergit undique, & postquam effluxit ex vase, tenuior redditur convergendo, & per attenuationem acceleratur donec ad distantiam semissis digiti a foramine pervenerit, & ad distantiam illam tenuior & celerior fit quam in ipso foramine in ratione 25×25 ad 21×21 seu 17 ad 12 quamproxime, id est in subduplicata ratione binarii ad unitatem circiter. Per experimenta vero constat quod quantitas aquæ, quæ per foramen circulare in fundo vasis factum, dato tempore effluit, ea sit quæ cum velocitate prædicta, non per foramen illud, sed per foramen circulare, cujus diameter est ad diametrum foraminis illius ut 21 ad 25, eodem tempore effluere debet. Ideo-

De Motu Corporum

que aqua illa effluens velocitatem habet deorsum in ipso foramine quam grave cadendo & casu suo describendo dimidiam altitudinem aquæ in vase stagnantis acquirere potest quamproxime. Sed postquam exivit ex vase, acceleratur convergendo donec ad distantiam a foramine diametro foraminis prope æqualem pervenerit, & velocitatem acquisiverit majorem in ratione subduplicata binarii ad unitatem circiter; quam utique grave cadendo, & casu suo describendo totam altitudinem aquæ in vase stagnantis, acquirere potest quamproxime.

In sequentibus igitur diameter venæ designetur per foramen illud minus quod vocavimus EF. Et plano foraminis EF parallelum duci intelligatur planum aliud superius VW ad distantiam diametro foraminis æqualem circiter & foramine majore ST pertusum; per quod utique vena cadat, quæ adæquate impleat foramen inferius EF, atque ideo cujus diameter sit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter transibit; & quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam solutio problematis postulat quamproxime. Spatium vero, quod planis duobus & vena cadente clauditur, pro fundo vasis haberi potest. Sed ut solutio problematis simplicior sit & magis mathematica, præstat adhibere planum solum inferius pro fundo vasis, & fingere quod aqua quæ per glaciem ceu per infundibulum defluebat, & e vase per foramen EF in plano inferiore factum egrediebatur, motum suum perpetuo servet, & glacies quietem suam. In sequentibus igitur sit ST diameter foraminis circularis centro Z descripti per quod cataracta effluit ex vase ubi aqua tota in vase fluida est. Et sit EF diameter foraminis per quod cataracta cadendo adæquate transit, sive aqua exeat ex vase per foramen illud superius ST, sive cadat per medium glaciei in vase tanquam per infundibulum. Et sit diameter foraminis superioris ST ad diametrum inferioris EF ut 25 ad 21 circiter, & distantia perpendicularis inter plana foraminum æqualis sit diametro foraminis minoris EF. Et velocitas aquæ e vase per foramen ST exeuntis ea erit in ipso

foramine

foramine deorſum quam corpus cadendo a dimidio altitudinis *IZ* acquirere poteſt: velocitas autem cataractæ utriuſque cadentis ea erit in foramine *EF*, quam corpus cadendo ab altitudine tota *IG* acquiret.

Caſ. 2. Si foramen *EF* non ſit in medio fundi vaſis, ſed fundum alibi perforetur: aqua effluet eadem cum velocitate ac prius, ſi modo eadem ſit foraminis magnitudo. Nam grave majori quidem tempore deſcendit ad eandem profunditatem per lineam obliquam quam per lineam perpendicularem, ſed deſcendendo eandem velocitatem acquirit in utroque caſu, ut *Galilæus* demonſtravit.

Caſ. 3. Eadem eſt aquæ velocitas effluentis per foramen in latere vaſis. Nam ſi foramen parvum ſit, ut intervallum inter ſuperficies *AB* & *KL* quoad ſenſum evaneſcat, & vena aquæ horizontaliter exilientis figuram parabolicam efformet: ex latere recto hujus parabolæ colligetur, quod velocitas aquæ effluentis ea ſit quam corpus ab aquæ in vaſe ſtagnantis altitudine *HG* vel *IG* cadendo acquirere potuiſſet. Facto utique experimento inveni quod, ſi altitudo aquæ ſtagnantis ſupra foramen eſſet viginti digitorum & altitudo foraminis ſupra planum horizonti parallelum eſſet quoque viginti digitorum, vena aquæ proſilientis incideret in planum illud ad diſtantiam digitorum 37 circiter a perpendiculo quod in planum illud a foramine demittebatur captam. Nam ſine reſiſtentia, vena incidere debuiſſet in planum illud ad diſtantiam digitorum 40, exiſtente venæ parabolicæ latere recto digitorum 80.

Caſ. 4. Quinetiam aqua effluens, ſi ſurſum feratur, eadem egreditur cum velocitate. Aſcendit enim aquæ exilientis vena parva motu perpendiculari ad aquæ in vaſe ſtagnantis altitudinem *GH* vel *GI*, niſi quatenus aſcenſus ejus ab aeris reſiſtentia aliquantulum impediatur; ac proinde ea effluit cum velocitate quam ab altitudine illa cadendo acquirere potuiſſet. Aquæ ſtagnantis particula unaquæque undique premitur æqualiter (per prop. XIX. lib. 2.) & preſſioni cedendo æquali impetu in omnes partes fertur, ſive deſcendat per foramen in fundo vaſis, ſive horizontaliter effluat per foramen in ejus latere, ſive egrediatur in canalem & inde aſcendat per foramen parvum in ſuperiore canalis parte factum. Et velocitatem qua aqua effluit eam eſſe, quam in hac propoſitione aſſignavi-

mus, non solum ratione colligitur, sed etiam per experimenta notissima jam descripta manifestum est.

Cas. 5. Eadem est aquæ effluentis velocitas sive figura foraminis sit circularis sive quadrata vel triangularis aut alia quæcunque circulari æqualis. Nam velocitas aquæ effluentis non pendet a figura foraminis sed oritur ab ejus altitudine infra planum *KL*.

Cas. 6. Si vasis *ABDC* pars inferior in aquam stagnantem immergatur, & altitudo aquæ stagnantis supra fundum vasis sit *GR*: velocitas quacum aqua quæ in vase est, effluet per foramen *EF* in aquam stagnantem, ea erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem *IR* acquirere potest. Nam pondus aquæ omnis in vase quæ inferior est superficie aquæ stagnantis, sustinebitur in æquilibrio per pondus aquæ stagnantis, ideoque motum aquæ descendentis in vase minime accelerabit. Patebit etiam & hic casus per experimenta, mensurando scilicet tempora quibus aqua effluit.

Corol. 1. Hinc si aquæ altitudo *CA* producatur ad *K*, ut sit *AK* ad *CK* in duplicata ratione areæ foraminis in quavis fundi parte facti, ad aream circuli *AB*: velocitas aquæ effluentis æqualis erit velocitati quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem *KC* acquirere potest.

Corol. 2. Et vis, qua totus aquæ exilientis motus generari potest, æqualis est ponderi cylindricæ columnæ aquæ, cujus basis est foramen *EF*, & altitudo 2*GI* vel 2*CK*. Nam aqua exiliens, quo tempore hanc columnam æquat, pondere suo ab altitudine *GI* cadendo velocitatem suam, qua exilit, acquirere potest.

Corol. 3. Pondus aquæ totius in vase *ABDC* est ad ponderis partem, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut summa circulorum *AB* & *EF* ad duplum circulum *EF*. Sit enim *IO* media proportionalis inter *IH* & *IG*; & aqua per foramen *EF* egrediens, quo tempore gutta cadendo ab *I* describere posset altitudinem *IG*, æqualis erit cylindro cujus basis est circulus *EF* & altitudo est 2*IG*, id est, cylindro cujus basis est circulus *AB* & altitudo est 2*IO*, nam circulus *EF* est ad circulum *AB* in subduplicata ratione altitudinis *IH* ad al-

titudinem

titudinem *IG*, hoc est, in simplici ratione mediæ proportionalis *IO* ad altitudinem *IG*: & quo tempore gutta cadendo ab *I* describere potest altitudinem *IH*, aqua egrediens æqualis erit cylindro cujus basis est circulus *AB* & altitudo est 2*IH*: & quo tempore gutta cadendo ab *I* per *H* ad *G* describit altitudinum differentiam *HG*, aqua egrediens, id est, aqua tota in solido *ABNFEM* æqualis erit differentiæ cylindrorum, id est, cylindro cujus basis est *AB* & altitudo 2*HO*. Et propterea aqua tota in vase *ABDC* est ad aquam totam cadentem in solido *ABNFEM* ut *HG* ad 2*HO*, id est, ut *HO*+*OG* ad 2*HO*, seu *IH*+*IO* ad 2*IH*. Sed pondus aquæ totius in solido *ABNFEM* in aquæ defluxum impenditur: ac proinde pondus aquæ totius in vase est ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut *IH*+*IO* ad 2*IH*, atque ideo ut summa circulorum *EF* & *AB* ad duplum circulum *EF*.

Corol. 4. Et hinc pondus aquæ totius in vase *ABDC* est ad ponderis partem alteram quam fundum vasis sustinet, ut summa circulorum *AB* & *EF* ad differentiam eorundem circulorum.

Corol. 5. Et ponderis pars, quam fundum vasis sustinet, est ad ponderis partem alteram, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut differentia circulorum *AB* & *EF* ad duplum circulum minorem *EF*, sive ut area fundi ad duplum foramen.

Corol. 6. Ponderis autem pars, qua sola fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *AB* ad summam circulorum *AB* & *EF*, sive ut circulus *AB* ad excessum dupli circuli *AB* supra fundum. Nam ponderis pars, qua sola fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius in vase, ut differentia circulorum *AB* & *EF* ad summam eorundem circulorum, per cor. 4.: & pondus aquæ totius in vase est ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *AB* ad differentiam circulorum *AB* & *EF*. Itaque ex æquo perturbate, ponderis pars, qua sola fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *AB* ad summam circulorum *AB* & *EF* vel excessum dupli circuli *AB* supra fundum.

Corol. 7. Si in medio foraminis *EF* locetur circellus *PQ* centro *G* descriptus & horizonti parallelus: pondus aquæ quam circellus ille sustinet, majus est pondere tertiæ partis cylindri aquæ cujus basis

DE MOTU CORPORUM

ſis eſt circellus ille & altitudo eſt *GH*. Sit enim *ABNFEM* cataracta vel columna aquæ cadentis axem habens *GH* ut ſupra, & congelari intelligatur aqua omnis in vaſe, tam in circuitu cataractæ quam ſupra circellum, cujus fluiditas ad promptiſſimum & celerrimum aquæ deſcenſum non requiritur. Et ſit *PHQ* columna aquæ ſupra circellum congelata, verticem habens *H* & altitudinem *GH*. Et finge cataractam hancce pondere ſuo toto cadere, & non incumbere in *PHQ* nec eandem premere, ſed libere & ſine frictione præterlabi, niſi forte in ipſo glaciei vertice quo cataracta ipſo cadendi initio incipiat eſſe cava. Et quemadmodum aqua in circuitu cataractæ congelata *AMEC*, *BNFD* convexa eſt in ſuperficie interna *AME*, *BNF* verſus cataractam cadentem, ſic etiam hæc columna *PHQ* convexa erit verſus cataractam, & propterea major cono cujus baſis eſt circellus ille *PQ* & altitudo *GH*, id eſt, major tertia parte cylindri eadem baſe & altitudine deſcripti. Suſtinet autem circellus ille pondus hujus columnæ, id eſt, pondus quod pondere coni ſeu tertiæ partis cylindri illius majus eſt.

Corol. 8. Pondus aquæ quam circellus valde parvus *PQ* ſuſtinet, minor eſſe videtur pondere duarum tertiarum partium cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt *HG*. Nam ſtantibus jam poſitis, deſcribi intelligatur dimidium ſphæroidis cujus baſis eſt circellus ille & ſemiaxis ſive altitudo eſt *HG*. Et hæc figura æqualis erit duabus tertiis partibus cylindri illius & comprehendet columnam aquæ congelatæ *PHQ* cujus pondus circellus ille ſuſtinet. Nam ut motus aquæ ſit maxime directus, columnæ illius ſuperficies externa concurret cum baſi *PQ* in angulo nonnihil acuto, propterea quod aqua cadendo perpetuo acceleratur & propter accelerationem fit tenuior; & cum angulus ille ſit recto minor, hæc columna ad inferiores ejus partes jacebit intra dimidium ſphæroidis. Eadem vero ſurſum acuta erit ſeu cuſpidata, ne horizontalis motus aquæ ad verticem ſphæroidis ſit infinite velocior quam ejus motus horizontem verſus. Et quo minor eſt circellus *PQ* eo

acutior

acutior erit vertex columnæ; & circello in infinitum diminuto, angulus *PHQ* in infinitum diminuetur, & propterea columna jacebit intra dimidium sphæroidis. Est igitur columna illa minor dimidio sphæroidis, seu duabus tertiis partibus cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo *GH*. Sustinet autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cum pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.

Corol. 9. Pondus aquæ quam circellus valde parvus *PQ* sustinet, æquale est ponderi cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}GH$ quamproxime. Nam pondus hocce est medium arithmeticum inter pondera coni & hemisphæroidis prædictæ. At si circellus ille non sit valde parvus, sed augeatur donec æquet foramen *EF*; hic sustinebit pondus aquæ totius sibi perpendiculariter imminentis, id est, pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est *GH*.

Corol. 10. Et (quantum sentio) pondus quod circellus sustinet, est semper ad pondus cylindri aquæ, cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}GH$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$, sive ut circulus *EF* ad excessum circuli hujus supra semissem circelli *PQ* quamproxime.

LEMMA IV.

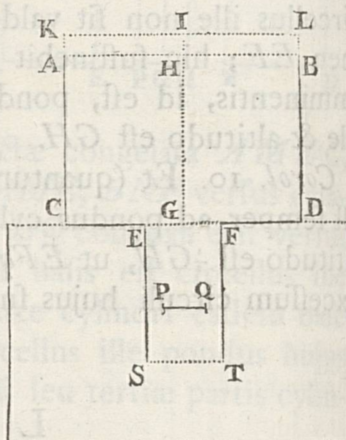
Cylindri, qui secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia ex aucta vel diminuta ejus longitudine non mutatur; ideoque eadem est cum resistentia circuli eadem diametro descripti & eadem velocitate secundum lineam rectam plano ipsius perpendicularem progredientis.

Nam latera cylindri motui ejus minime opponuntur: & cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminuta, in circulum vertitur.

PROPO-

PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA XXIX.

Cylindri, qui in fluido compresso infinito & non elastico secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia, quæ oritur a magnitudine sectionis tranversæ, est ad vim qua totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri quamproxime.



Nam si vas *ABDC* fundo suo *CD* superficiem aquæ stagnantis tangat, & aqua ex hoc vase per canalem cylindricum *EFTS* horizonti perpendicularem in aquam stagnantem effluat, locetur autem circellus *PQ* horizonti parallelus ubivis in medio canalis, & producatur *CA* ad *K*, ut sit *AK* ad *CK* in duplicata ratione quam habet excessus orificii canalis *EF* supra circellum *PQ* ad circulum *AB*: manifestum est (per cas. 5. cas. 6. & cor. 1. prop. XXXVI.) quod velocitas aquæ transeuntis per spatium annulare inter circellum & latera vasis, ea erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem *KC* vel *IG* acquirere potest.

Et (per corol. x. prop. XXXVI.) si vasis latitudo sit infinita, ut lineola *HI* evanescat & altitudines *IG*, *HG* æquentur: vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}IG$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ quam proxime. Nam vis aquæ, uniformi motu defluentis per totum canalem, eadem erit in circellum *PQ* in quacunque canalis parte locatum.

Claudantur jam canalis orificia *EF*, *ST*, & ascendat circellus in fluido undique compresso & ascensu suo cogat aquam superiorem descendere per spatium annulare inter circellum & latera canalis: & velocitas circelli ascendentis erit ad velocitatem aquæ descendentis ut differentia circulorum *EF* & *PQ* ad circulum *PQ*, & velocitas circelli ascendentis ad summam velocitatum, hoc est, ad veloci-

velocitatem relativam aquæ deſcendentis qua præterfluit circellum aſcendentem, ut differentia circulorum *EF* & *PQ* ad circulum *EF*, ſive ut *EFq—PQq* ad *EFq*. Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati, qua ſupra oſtenſum eſt aquam tranſire per idem ſpatium annulare dum circellus interea immotus manet, id eſt, velocitati quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IG* acquirere poteſt: & vis aquæ in circellum aſcendentem eadem erit ac prius (per legum corol. v.) id eſt, reſiſtentia circelli aſcendentis erit ad pondus cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}$*IG*, ut *EFq* ad *EFq* — $\frac{1}{2}$*PQq* quamproxime. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem, quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IG* acquirit, ut *EFq — PQq* ad *EFq*.

Augeatur amplitudo canalis in infinitum: & rationes illæ inter *EFq—PQq* & *EFq*, interque *EFq* & *EFq*—$\frac{1}{2}$*PQq* accedent ultimo ad rationes æqualitatis. Et propterea velocitas circelli ea nunc erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IG* acquirere poteſt, reſiſtentia vero ejus æqualis evadet ponderi cylindri cujus baſis eſt circellus ille & altitudo dimidium eſt altitudinis *IG*, a qua cylindrus cadere debet ut velocitatem circelli aſcendentis acquirat; & hac velocitate cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis ſuæ deſcribet. Reſiſtentia autem cylindri, hac velocitate ſecundum longitudinem ſuam progredientis, eadem eſt cum reſiſtentia circelli (per lemma iv.) ideoque æqualis eſt vi qua motus ejus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, generari poteſt quamproxime.

Si longitudo cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & tempus, quo quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, augebitur vel minuetur in eadem ratione; ideoque vis illa, qua motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli poſſit, non mutabitur; ac proinde etiamnum æqualis eſt reſiſtentiæ cylindri, nam & hæc quoque immutata manet per lemma iv.

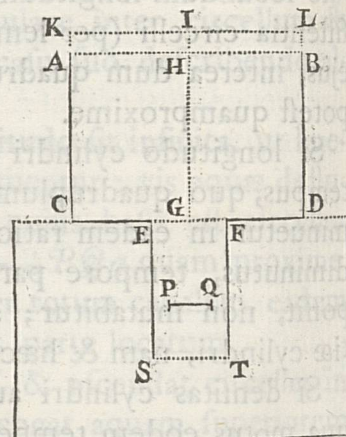
Si denſitas cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & vis qua motus eodem tempore generari vel tolli poteſt, in eadem ratione augebitur vel minuetur. Reſiſtentia itaque cylindri cujuſcunque erit ad vim qua totus ejus motus, interea dum quadruplum

longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, ut denſitas medii ad denſitatem cylindri quamproxime. *Q. E. D.*

Fluidum autem comprimi debet ut ſit continuum, continuum vero eſſe debet & non elaſticum ut preſſio omnis, quæ ab ejus compreſſione oritur, propagetur in inſtanti, & in omnes moti corporis partes æqualiter agendo reſiſtentiam non mutet. Preſſio utique, quæ a motu corporis oritur, impenditur in motum partium fluidi generandum & reſiſtentiam creat. Preſſio autem quæ oritur a compreſſione fluidi, utcunque fortis ſit, ſi propagetur in inſtanti, nullum generat motum in partibus fluidi continui, nullam omnino inducit motus mutationem; ideoque reſiſtentiam nec auget nec minuit. Certe actio fluidi, quæ ab ejus compreſſione oritur, fortior eſſe non poteſt in partes poſticas corporis moti quam in ejus partes anticas, ideoque reſiſtentiam in hac propoſitione deſcriptam minuere non poteſt: & fortior non erit in partes anticas quam in poſticas, ſi modo propagatio ejus infinite velocior ſit quam motus corporis preſſi. Infinite autem velocior erit & propagabitur in inſtanti, ſi modo fluidum ſit continuum & non elaſticum.

Corol. 1. Cylindrorum, qui ſecundum longitudines ſuas in mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, reſiſtentiæ ſunt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatum & duplicata ratione diametrorum & ratione denſitatis mediorum.

Corol. 2. Si amplitudo canalis non augeatur in infinitum, ſed cylindrus in medio quieſcente incluſo ſecundum longitudinem ſuam progrediatur, & interea axis ejus cum axe canalis coincidat: reſiſtentia ejus erit ad vim qua totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ ſemel, & ratione EFq ad $EFq - PQq$ bis, & ratione denſitatis medii ad denſitatem cylindri.

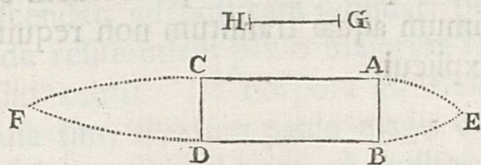


Corol. 3. Iiſdem poſitis, & quod longitudo L ſit ad quadruplum longitudinis cylindri in ratione quæ componitur ex ratione $EFq - \frac{1}{2}PQq$

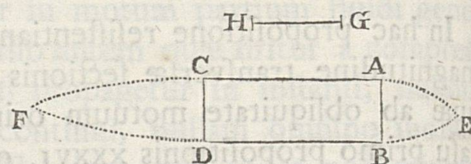
$\frac{1}{2}PQq$ ad EFq semel, & ratione $EFq - PQq$ ad EFq bis: resistentia cylindri erit ad vim qua totus ejus motus, interea dum longitudinem L describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri.

Scholium.

In hac propositione resistentiam investigavimus quæ oritur a sola magnitudine transversæ sectionis cylindri, neglecta resistentiæ parte quæ ab obliquitate motuum oriri possit. Nam quemadmodum in casu primo propositionis XXXVI. obliquitas motuum, quibus partes aquæ in vase, undique convergebant in foramen *EF*, impedivit effluxum aquæ illius per foramen: sic in hac propositione, obliquitas motuum, quibus partes aquæ ab anteriore cylindri termino pressæ, cedunt pressioni & undique divergunt, retardat eorum transitum per loca in circuitu termini illius antecedentis versus posteriores partes cylindri, efficitque ut fluidum ad majorem distantiam commoveatur & resistentiam auget, idque in ea fere ratione qua effluxum aquæ e vase diminuit, id est, in ratione duplicata 25 ad 21 circiter. Et quemadmodum, in propositionis illius casu primo, effecimus ut partes aquæ perpendiculariter & maxima copia transirent per foramen *EF*, ponendo quod aqua omnis in vase quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, & cujus motus obliquus erat & inutilis, maneret sine motu: sic in hac propositione, ut obliquitas motuum tollatur, & partes aquæ motu maxime directo & brevissimo cedentes facillimum præbeant transitum cylindro, & sola maneat resistentia, quæ oritur a magnitudine sectionis transversæ, quæque diminui non potest nisi diminuendo diametrum cylindri, concipiendum est, quod partes fluidi, quarum motus sunt obliqui & inutiles & resistentiam creant, quiescant inter se ad utrumque cylindri terminum, & cohæreant & cylindro jungantur. Sit *ABCD* rectangulum, & sint *AE* & *BE* arcus duo parabolici axe *AB* descripti, latere autem recto quod sit ad spatium *HG*, describendum a cylindro cadente dum velocitatem suam acquirit, ut *HG* ad $\frac{1}{2}AB$. Sint etiam *CF* & *DF* arcus alii duo parabolici, axe *CD* & latere



recto quod sit prioris lateris recti quadruplum descripti; & convolutione figuræ circum axem EF generetur solidum cujus media pars $ABDC$ sit cylindrus de quo agimus, & partes extremæ ABE & CDF contineant partes fluidi inter se quiescentes & in corpora duo rigida concretas, quæ cylindro utrinque tanquam caput & cauda adhæreant. Et solidi $EACFDB$, secundum longitudinem axis sui FE in partes versus E progredientis, resistentia ea erit quamproxime quam in hac propositione descripsimus, id est, quæ rationem illam habet ad vim qua totus cylindri motus, interea dum longitudo $4AC$ motu illo uniformiter continuato describatur, vel tolli possit vel generari, quam densitas fluidi habet ad densitatem cylindri quamproxime. Et hac vi resistentia minor esse non potest quam in ratione 2 ad 3, per corol. 7. prop. XXXVI.



LEMMA V.

Si cylindrus, sphæra & sphærois, quorum latitudines sunt æquales, in medio canalis cylindrici ita locentur successive ut eorum axes cum axe canalis coincidant: hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impedient.

Nam spatia inter canalem & cylindrum, sphæram, & sphæroidem per quæ aqua transit, sunt æqualia: & aqua per æqualia spatia æqualiter transit.

Hæc ita se habent ex hypothesi, quod aqua omnis supra cylindrum sphæram vel sphæroidem congelatur, cujus fluiditas ad celerrimum aquæ transitum non requiritur, ut in corol. VII. prop. XXXVI. explicui.

LEMMA

LEMMA VI.

Iisdem positis, corpora prædicta æqualiter urgentur ab aqua per canalem fluente.

Patet per lemma v. & motus legem tertiam. Aqua utique & corpora in se mutuo æqualiter agunt.

LEMMA VII.

Si aqua quiescat in canali, & hæc corpora in partes contrarias æquali velocitate per canalem ferantur: æquales erunt eorum resistentiæ inter se.

Constat ex lemmate superiore, nam motus relativi iidem inter se manent.

Scholium.

Eadem est ratio corporum omnium convexorum & rotundorum, quorum axes cum axe canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri potest; sed in his lemmatis corpora esse politissima supponimus, & medii tenacitatem & frictionem esse nullam, & quod partes fluidi, quæ motibus suis obliquis & superfluis fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, & retardare possunt, quiescant inter se tanquam gelu constrictæ, & corporibus ad ipsorum partes anticas & posticas adhæreant, perinde ut in scholio propositionis præcedentis exposui. Agitur enim in sequentibus de resistentia omnium minima quam corpora rotunda, datis maximis sectionibus transversis descripta, habere possunt.

Corpora fluidis innatantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut fluidum ad partem anticam ascendat, ad posticam subsidat, præsertim si figura sint obtusa; & inde resistentiam paulo majorem sentiunt quam si capite & cauda sint acutis. Et corpora in fluidis elasticis mota, si ante & post obtusa sint, fluidum paulo magis condensant ad anticam partem & paulo magis relaxant ad posticam; & inde resistentiam paulo majorem sentiunt quam si capite & cauda sint acutis. Sed nos in his lemmatis & propositionibus non agi-

mus

mus de fluidis elaſticis, ſed de non elaſticis; non de inſidentibus fluido, ſed de alte immerſis. Et ubi reſiſtentia corporum in fluidis non elaſticis innoteſcit, augenda erit hæc reſiſtentia aliquantulum tam in fluidis elaſticis, qualis eſt aer, quam in ſuperficiebus fluidorum ſtagnantium, qualia ſunt maria & paludes.

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XXX.

Globi, in fluido compreſſo infinito & non elaſtico uniformiter progredientis, reſiſtentia eſt ad vim qua totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri ſuæ deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas fluidi ad denſitatem globi quamproxime.

Nam globus eſt ad cylindrum circumſcriptum ut duo ad tria; & propterea vis illa, quæ tollere poſſit motum omnem cylindri interea dum cylindrus deſcribat longitudinem quatuor diametrorum, globi motum omnem tollet interea dum globus deſcribat duas tertias partes hujus longitudinis, id eſt, octo tertias partes diametri propriæ. Reſiſtentia autem cylindri eſt ad hanc vim quamproxime ut denſitas fluidi ad denſitatem cylindri vel globi per prop. XXXVII. & reſiſtentia globi æqualis eſt reſiſtentiæ cylindri per lem. V, VI, VII. *Q. E. D.*

Corol. 1. Globorum, in mediis compreſſis infinitis, reſiſtentiæ ſunt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis, & duplicata ratione diametri, & ratione denſitatis mediorum.

Corol. 2. Velocitas maxima quacum globus, vi ponderis ſui comparativi, in fluido reſiſtente poteſt deſcendere, ea eſt quam acquirere poteſt globus idem, eodem pondere, ſine reſiſtentia cadendo & caſu ſuo deſcribendo ſpatium quod ſit ad quatuor tertias partes diametri ſuæ ut denſitas globi ad denſitatem fluidi. Nam globus tempore caſus ſui, cum velocitate cadendo acquiſita, deſcribet ſpatium quod erit ad octo tertias diametri ſuæ, ut denſitas globi ad denſitatem fluidi; & vis ponderis motum hunc generans, erit ad vim quæ motum eundem generare poſſit, quo tempore globus octo tertias diametri ſuæ eadem velocitate deſcribit, ut denſitas

fluidi

fluidi ad densitatem globi: ideoque per hanc propositionem, vis ponderis æqualis erit vi resistentiæ, & propterea globum accelerare non potest.

Corol. 3. Data & densitate globi & velocitate ejus sub initio motus, ut & densitate fluidi compressi quiescentis in qua globus movetur; datur ad omne tempus & velocitas globi & ejus resistentia & spatium ab eo descriptum, per corol. VII. prop. XXXV.

Corol. 4. Globus in fluido compresso quiescente ejusdem secum densitatis movendo, dimidiam motus sui partem prius amittet quam longitudinem duarum ipsius diametrorum descripserit, per idem corol. VII.

PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA XXXI.

Globi, per fluidum in canali cylindrico clausum & compressum uniformiter progredientis, resistentia est ad vim, qua totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad excessum hujus orificii supra dimidium circuli maximi globi, & ratione duplicata orificii canalis ad excessum hujus orificii supra circulum maximum globi, & ratione densitatis fluidi ad densitatem globi quamproxime.

Patet per corol. 2. prop. XXXVII. procedit vero demonstratio quemadmodum in propositione præcedente.

Scholium.

In propositionibus duabus novissimis (perinde ut in lem. V.) suppono quod aqua omnis congelatur quæ globum præcedit, & cujus fluiditas auget resistentiam globi. Si aqua illa omnis liquescat, augebitur resistentia aliquantulum. Sed augmentum illud in his propositionibus parvum erit & negligi potest, propterea quod convexa superficies globi totum fere officium glaciei faciat.

PROPO-

De Motu Corporum

PROPOSITIO XL. PROBLEMA IX.

Globi, in medio fluidissimo compresso progredientis, invenire resistentiam per phænomena.

Sit A pondus globi in vacuo, B pondus ejus in medio resistente, D diameter globi, F spatium quod sit ad $\frac{4}{3}$ D ut densitas globi ad densitatem medii, id est, ut A ad A — B, G tempus quo globus pondere B sine resistentia cadendo describit spatium F, & H velocitas quam globus hocce casu suo acquirit. Et erit H velocitas maxima quacum globus, pondere suo B, in medio resistente potest descendere, per corol. 2. prop. XXXVIII. & resistentia, quam globus ea cum velocitate descendens patitur, æqualis erit ejus ponderi B: resistentia vero, quam patitur in alia quacunque velocitate, erit ad pondus B in duplicata ratione velocitatis hujus ad velocitatem illam maximam H, per corol. 1. prop. XXXVIII.

Hæc est resistentia quæ oritur ab inertia materiæ fluidi. Ea vero quæ oritur ab elasticitate, tenacitate, & frictione partium ejus, sic investigabitur.

Demittatur globus ut pondere suo B in fluido descendat; & sit P tempus cadendi, idque in minutis secundis si tempus G in minutis secundis habeatur. Inveniatur numerus absolutus N qui congruit logarithmo $0,4342944819 \frac{2P}{G}$, sitque L logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$: & velocitas cadendo acquisita erit $\frac{N-1}{N+1}$ H, altitudo autem descripta erit $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611\, F + 4,605170186\, LF$. Si fluidum satis profundum sit, negligi potest terminus 4,605170186 LF; & erit $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611\, F$ altitudo descripta quamproxime. Patent hæc per libri secundi propositionem nonam & ejus corollaria, ex hypothesi quod globus nullam aliam patiatur resistentiam nisi quæ oritur ab inertia materiæ. Si vero aliam insuper resistentiam patiatur, descensus erit tardior, & ex retardatione innotescet quantitas hujus resistentiæ.

Ut

Ut corporis in fluido cadentis velocitas & descensus facilius innotescant, composui tabulam sequentem, cujus columna prima denotat tempora descensus, secunda exhibet velocitates cadendo acquisitas existente velocitate maxima 100000000, tertia exhibet spatia temporibus illis cadendo descripta, existente 2 F spatio quod corpus tempore G cum velocitate maxima describit, & quarta exhibet spatia iisdem temporibus cum velocitate maxima descripta. Numeri in quarta columna sunt $\frac{2P}{G}$, & subducendo numerum 1,3862944—4,6051702 L, inveniuntur numeri in tertia columna, & multiplicandi sunt hi numeri per spatium F ut habeantur spatia cadendo descripta. Quinta his insuper adjecta est columna, quæ continet spatia descripta iisdem temporibus a corpore, vi ponderis sui comparativi B, in vacuo cadente.

Tempora P	*Velocitates cadentis in fluido.*	*Spatia cadendo descripta in fluido.*	*Spatia motu maximo descripta.*	*Spatia cadendo descripta in vacuo.*
0,001 G	$99999\frac{29}{30}$	0,000001 F	0,002 F	0,000001 F
0,01 G	999967	0,0001 F	0,02 F	0,0001 F
0,1 G	9966799	0,0099834 F	0,2 F	0,01 F
0,2 G	19737532	0,0397361 F	0,4 F	0,04 F
0,3 G	29131261	0,0886815 F	0,6 F	0,09 F
0,4 G	37994896	0,1559070 F	0,8 F	0,16 F
0,5 G	46211716	0,2402290 F	1,0 F	0,25 F
0,6 G	53704957	0,3402706 F	1,2 F	0,36 F
0,7 G	60436778	0,4545405 F	1,4 F	0,49 F
0,8 G	66403677	0,5815071 F	1,6 F	0,64 F
0,9 G	71629787	0,7196609 F	1,8 F	0,81 F
1 G	76159416	0,8675617 F	2 F	1 F
2 G	96402758	2,6500055 F	4 F	4 F
3 G	99505475	4,6186570 F	6 F	9 F
4 G	99932930	6,6143765 F	8 F	16 F
5 G	99990920	8,6137964 F	10 F	25 F
6 G	99998771	10,6137179 F	12 F	36 F
7 G	99999834	12,6137073 F	14 F	49 F
8 G	99999980	14,6137059 F	16 F	64 F
9 G	99999997	16,6137057 F	18 F	81 F
10 G	$99999999\frac{3}{5}$	18,6137056 F	20 F	100 F

Scholium.

Ut resistentias fluidorum investigarem per experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine & latitudine interna digitorum novem pedis *Londinensis*, profunditate pedum novem cum semisse, idemque implevi aqua pluviali; & globis ex cera & plumbo incluso formatis, notavi tempora descensus globorum, existente descensus altitudine 112 digitorum pedis. Pes solidus cubicus *Londinensis* continet 76 libras *Romanas* aquæ pluvialis, & pedis hujus digitus solidus continet $\frac{19}{36}$ uncias libræ hujus seu grana $253\frac{1}{3}$; & globus aqueus diametro digiti unius descriptus continet grana 132,645 in medio aeris, vel grana 132,8 in vacuo; & globus quilibet alius est ut excessus ponderis ejus in vacuo supra pondus ejus in aqua.

Exper. 1. Globus, cujus pondus erat $156\frac{1}{4}$ granorum in aere & 77 granorum in aqua, altitudinem totam digitorum 112 tempore minutorum quatuor secundorum descripsit. Et experimento repetito, globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor secundorum.

Pondus globi in vacuo est $156\frac{13}{38}$ *gran.* & excessus hujus ponderis supra pondus globi in aqua est $79\frac{13}{38}$ *gran.* Unde prodit globi diameter 0,84224 partium digiti. Est autem ut excessus ille ad pondus globi in vacuo, ita densitas aquæ ad densitatem globi, & ita partes octo tertiæ diametri globi (*viz.* 2,24597 *dig.*) ad spatium 2F, quod proinde erit 4,4256 *dig.* Globus tempore minuti unius secundi, toto suo pondere granorum $156\frac{13}{38}$, cadendo in vacuo describet digitos $193\frac{1}{3}$; & pondere granorum 77, eodem tempore, sine resistentia cadendo in aqua describet digitos 95,219; & tempore G, quod sit ad minutum unum secundum in subduplicata ratione spatii F seu 2,2128 *dig.* ad 95,219 *dig.* describet 2,2128 *dig.* & velocitatem maximam H acquiret quacum potest in aqua descendere. Est igitur tempus G 0″,15244. Et hoc tempore G, cum velocitate illa maxima H, globus describet spatium 2F digitorum 4,4256; ideoque tempore minutorum quatuor secundorum describet spatium digitorum 116,1245. Subducatur spatium 1,3862944 F seu 3,0676 *dig.* & manebit spatium 113,0569 digitorum quod globus cadendo in aqua, in vase amplissimo, tempore minutorum quatuor

tuor ſecundorum deſcribet. Hoc ſpatium, ob anguſtiam vaſis lignei prædicti, minui debet in ratione quæ componitur ex ſubduplicata ratione orificii vaſis ad exceſſum orificii hujus ſupra ſemicirculum maximum globi & ex ſimplici ratione orificii ejuſdem ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi, id eſt, in ratione 1 ad 0,9914. Quo facto, habebitur ſpatium 112,08 digitorum, quod globus cadendo in aqua in hoc vaſe ligneo tempore minutorum quatuor ſecundorum per theoriam deſcribere debuit quamproxime. Deſcripſit vero digitos 112 per experimentum.

Exper. 2. Tres globi æquales, quorum pondera ſeorſim erant $76\frac{1}{3}$ granorum in aere & $5\frac{1}{16}$ granorum in aqua, ſucceſſive demittebantur; & unuſquiſque cecidit in aqua tempore minutorum ſecundorum quindecim, caſu ſuo deſcribens altitudinem digitorum 112.

Computum ineundo prodeunt pondus globi in vacuo $76\frac{5}{12}$ *gran.* exceſſus hujus ponderis ſupra pondus in aqua $71\frac{17}{48}$ *gran.* diameter globi 0,81296 *dig* octo tertiæ partes hujus diametri 2,16789 *dig.* ſpatium 2 F 2,3217 *dig.* ſpatium quod globus pondere $5\frac{1}{16}$ *gran.* tempore 1″ ſine reſiſtentia cadendo deſcribat 12,808 *dig.* & tempus G 0″,301056. Globus igitur, velocitate maxima quacum poteſt in aqua vi ponderis $5\frac{1}{16}$ *gran.* deſcendere, tempore 0″,301056 deſcribet ſpatium 2,3217 *dig.* & tempore 15″ ſpatium 115,678 *dig.* Subducatur ſpatium 1,3862944 F ſeu 1,609 *dig.* & manebit ſpatium 114,069 *dig.* quod proinde globus eodem tempore in vaſe latiſſimo cadendo deſcribere debet. Propter anguſtiam vaſis noſtri detrahi debet ſpatium 0,895 *dig.* circiter. Et ſic manebit ſpatium 113,174 *dig.* quod globus cadendo in hoc vaſe, tempore 15″ deſcribere debuit per theoriam quamproxime. Deſcripſit vero digitos 112 per experimentum. Differentia eſt inſenſibilis.

Exper. 3. Globi tres æquales, quorum pondera ſeorſim erant 121 *gran.* in aere & 1 *gran.* in aqua, ſucceſſive demittebantur; & cadebant in aqua temporibus 46″, 47″, & 50″, deſcribentes altitudinem digitorum 112.

Per theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40″ circiter. Quod tardius ceciderunt, utrum minori proportioni reſiſtentiæ, quæ a vi inertiæ in tardis motibus oritur, ad reſiſtentiam quæ oritur ab aliis cauſis tribuendum ſit; an potius bullulis nonnullis globo adhærentibus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempeſtatis vel

De Motu Corporum

manus globum demittentis, vel etiam erroribus insensibilibus in ponderandis globis in aqua, incertum esse puto. Ideoque pondus globi in aqua debet esse plurium granorum, ut experimentum certum & fide dignum reddatur.

Exper. 4. Experimenta hactenus descripta cœpi, ut investigarem resistentias fluidorum, antequam theoria in propositionibus proxime præcedentibus exposita mihi innotesceret. Postea, ut theoriam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine interna digitorum $8\frac{2}{3}$, profunditate pedum quindecim cum triente. Deinde ex cera & plumbo incluso globos quatuor formavi, singulos pondere $139\frac{1}{4}$ granorum in aere & $7\frac{1}{8}$ granorum in aqua. Et hos demisi ut tempora cadendi in aqua per pendulum, ad semi-minuta secunda oscillans, mensurarem. Globi, ubi ponderabantur & postea cadebant, frigidi erant & aliquamdiu frigidi manserant; quia calor ceram rarefacit, & per rarefactionem diminuit pondus globi in aqua, & cera rarefacta non statim ad densitatem pristinam per frigus reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam; ne pondere partis alicujus ex aqua extantis descensus eorum sub initio acceleraretur. Et ubi penitus immersi quiescebant, demittebantur quam cautissime, ne impulsum aliquem a manu demittente acciperent. Ceciderunt autem successive temporibus oscillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 & 51, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. Sed tempestas jam paulo frigidior erat quam cum globi ponderabantur, ideoque iteravi experimentum alio die, & globi ceciderunt temporibus oscillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53, ac tertio temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53. Et experimento sæpius capto, globi ceciderunt maxima ex parte temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$ & 50. Ubi tardius cecidere, suspicor eosdem retardatos fuisse impingendo in latera vasis.

Jam computum per theoriam ineundo, prodeunt pondus globi in vacuo $139\frac{2}{5}$ granorum. Excessus hujus ponderis supra pondus globi in aqua $132\frac{11}{40}$ *gran.* Diameter globi 0,99868 *dig.* Octo tertiæ partes diametri 2,66315 *dig.* Spatium 2 F 2,8066 *dig.* Spatium quod globus pondere $7\frac{1}{8}$ granorum, tempore minuti unius secundi, sine resistentia cadendo describit 9,88164 *dig.* Et tempus G 0″,376843. Globus igitur, velocitate maxima, quacum potest in aqua vi ponderis $7\frac{1}{8}$ granorum descendere, tempore 0″,376843 describit

ſcribit ſpatium 2,8066 digitorum, & tempore 1″ ſpatium 7,44766 digitorum, & tempore 25″ ſeu oſcillationum 50 ſpatium 186,1915 *dig.* Subducatur ſpatium 1,386294 F, ſeu 1,9454 *dig.* & manebit ſpatium 184,2461 *dig.* quod globus eodem tempore in vaſe latiſſimo deſcribet. Ob anguſtiam vaſis noſtri, minuatur hoc ſpatium in ratione quæ componitur ex ſubduplicata ratione orificii vaſis ad exceſſum hujus orificii ſupra ſemicirculum maximum globi, & ſimplici ratione ejuſdem orificii ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi; & habebitur ſpatium 181,86 digitorum, quod globus in hoc vaſe tempore oſcillationum 50 deſcribere debuit per theoriam quamproxime. Deſcripſit vero ſpatium 182 digitorum tempore oſcillationum $49\frac{1}{2}$ vel 50 per experimentum.

Exper. 5. Globi quatuor pondere $154\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $21\frac{1}{2}$ *gran.* in aqua ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ & 30, & nonnunquam 31, 32 & 33, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 29 quamproxime.

Exper. 6. Globi quinque pondere $212\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $79\frac{1}{2}$ in aqua ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 & 18, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 15 quamproxime.

Exper. 7. Globi quatuor pondere $293\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $35\frac{7}{8}$ *gran.* in aqua ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 & 33, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digiti unius cum ſemiſſe.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 28 quamproxime.

Cauſam inveſtigando cur globorum, ejuſdem ponderis & magnitudinis, aliqui citius alii tardius caderent, in hanc incidi; quod globi, ubi primum demittebantur & cadere incipiebant, oſcillarent circum centra, latere illo quod forte gravius eſſet primum deſcendente, & motum oſcillatorium generante. Nam per oſcillationes ſuas globus majorem motum communicat aquæ, quam ſi ſine oſcillationibus deſcenderet; & communicando, amittit partem motus

proprii

proprii quo descendere deberet: & pro majore vel minore oscillatione, magis vel minus retardatur. Quinetiam globus recedit semper a latere suo quod per oscillationem descendit, & recedendo appropinquat lateribus vasis & in latera nonnunquam impingitur. Et hæc oscillatio in globis gravioribus fortior est, & in majoribus aquam magis agitat. Quapropter, ut oscillatio globorum minor redderetur, globos novos ex cera & plumbo construxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope superficiem ejus; & globum ita demisi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, esset infimum ab initio descensus. Sic oscillationes factæ sunt multo minores quam prius, & globi temporibus minus inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis sequentibus.

Exper. 8. Globi quatuor, pondere granorum 139 in aere & $6\frac{1}{2}$ in aqua, sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum non plurium quam 52, non pauciorum quam 50, & maxima ex parte tempore oscillationum 51 circiter, describentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 52 circiter.

Exper. 9. Globi quatuor, pondere granorum $273\frac{1}{4}$ in aere & $140\frac{3}{4}$ in aqua, sæpius demissi, ceciderunt temporibus oscillationum non pauciorum quam 12, non plurium quam 13, describentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam vero hi globi cadere debuerunt tempore oscillationum $11\frac{1}{3}$ quamproxime.

Exper. 10. Globi quatuor, pondere granorum 384 in aere & $119\frac{1}{2}$ in aqua, sæpe demissi, cadebant temporibus oscillationum $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ & 19, describentes altitudinem digitorum $181\frac{1}{2}$. Et ubi ceciderunt tempore oscillationum 19, nonnunquam audivi impulsum eorum in latera vasis antequam ad fundum pervenerunt.

Per theoriam vero cadere debuerunt tempore oscillationum $15\frac{5}{9}$ quamproxime.

Exper. 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in aere & $3\frac{29}{32}$ in aqua, sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 & 46, & maxima ex parte 44 & 45, describentes altitudinem digitorum $182\frac{1}{2}$ quamproxime.

Per

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum $46\frac{1}{9}$ circiter. Liber Secundus.

Exper. 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in aere & $4\frac{3}{8}$ in aqua, aliquoties demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum 61, 62, 63, 64 & 65, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Et per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum $64\frac{1}{2}$ quamproxime.

Per hæc experimenta manifeſtum eſt quod, ubi globi tarde ceciderunt, ut in experimentis ſecundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi recte exhibentur per theoriam: at ubi globi velocius ceciderunt, ut in experimentis ſextis, nonis ac decimis, reſiſtentia paulo major extitit quam in duplicata ratione velocitatis. Nam globi inter cadendum oſcillant aliquantulum; & hæc oſcillatio in globis levioribus & tardius cadentibus, ob motus languorem cito ceſſat; in gravioribus autem & majoribus, ob motus fortitudinem diutius durat, & non niſi poſt plures oſcillationes ab aqua ambiente cohiberi poteſt. Quinetiam globi, quo velociores ſunt, eo minus premuntur a fluido ad poſticas ſuas partes; & ſi velocitas perpetuo augeatur, ſpatium vacuum tandem a tergo relinquent, niſi compreſſio fluidi ſimul augeatur. Debet autem compreſſio fluidi (per prop. XXXII. & XXXIII.) augeri in duplicata ratione velocitatis, ut reſiſtentia ſit in eadem duplicata ratione. Quoniam hoc non fit, globi velociores paulo minus premuntur a tergo, & defectu preſſionis hujus, reſiſtentia eorum fit paulo major quam in duplicata ratione velocitatis.

Congruit igitur theoria cum phænomenis corporum cadentium in aqua, reliquum eſt ut examinemus phænomena cadentium in aere.

Exper. 13. A culmine eccleſiæ Sancti *Pauli*, in urbe *Londini*, menſe Junio 1710. globi duo vitrei ſimul demittebantur, unus argenti vivi plenus, alter aeris; & cadendo deſcribebant altitudinem pedum *Londinenſium* 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis ſuſpendebatur, ad alterum peſſulo ligneo incumbebat; & globi duo huic tabulæ impoſiti ſimul demittebantur, ſubtrahendo peſſulum ope fili ferrei ad terram uſque demiſſi ut tabula polis ferreis ſolummodo innixa ſuper iiſdem devolveretur, & eodem temporis momento pendulum ad minuta ſecunda oſcillans, per filum

illud

DE MOTU CORPORUM

illud ferreum tractum demitteretur & oscillare inciperet. Diametri & pondera globorum ac tempora cadendi exhibentur in tabula sequente.

Globorum mercurio plenorum			*Globorum aere plenorum.*		
Pondera	*Diametri*	*Tempora cadendi.*	*Pondera*	*Diametri*	*Tempora cadendi.*
908 *gran.*	0,8 *digit.*	4″	510 *gran.*	5,1 *digit.*	8″$\frac{1}{2}$
983	0,8	4 —	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4 +	515	5,0	8$\frac{1}{4}$
808	0,75	4	483	5,0	8$\frac{1}{2}$
784	0,75	4 +	641	5,2	8

Cæterum tempora observata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per theoriam *Galilæi*) minutis quatuor secundis describent pedes *Londinenses* 257, & pedes 220 minutis tantum 3″ 42‴. Tabula lignea utique, detracto pessulo, tardius devolvebatur quam par erat, & tarda sua devolutione impediebat descensum globorum sub initio. Nam globi incumbebant tabulæ prope medium ejus, & paulo quidem propiores erant axi ejus quam pessulo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter, & jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præsertim in globis majoribus qui tabulæ devolventi paulo diutius incumbebant propter magnitudinem diametrorum. Quo facto tempora, quibus globi sex majores cecidere, evadent 8″ 12‴, 7″ 42‴, 7″ 42‴, 7″ 57‴, 8″ 12‴, & 7″ 42‴.

Globorum igitur aere plenorum quintus, diametro digitorum quinque pondere granorum 483 constructus, cecidit tempore 8″ 12‴, describendo altitudinem pedum 220. Pondus aquæ huic globo æqualis est 16600 granorum; & pondus aeris eidem æqualis est $\frac{16600}{860}$ *gran.* seu $19\frac{3}{10}$ *gran.* ideoque pondus globi in vacuo est $502\frac{3}{10}$ *gran.* & hoc pondus est ad pondus aeris globo æqualis, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$, & ita sunt 2 F ad octo tertias partes diametri globi, id est, ad $13\frac{1}{3}$ digitos. Unde 2 F prodeunt 28 *ped.* 11 *dig.* Globus cadendo in vacuo, toto suo pondere $502\frac{3}{10}$ granorum, tempore minuti unius secundi describit digitos $193\frac{1}{3}$ ut supra, & pondere 483 *gran.* describit digitos 185,905, & eodem pondere 483 *gran.* etiam

in

in vacuo describit spatium F seu 14 *ped.* $5\frac{1}{2}$ *dig.* tempore $57'''\ 58''''$, & velocitatem maximam acquirit quacum possit in aere descendere. Hac velocitate globus, tempore $8''\ 12'''$, describet spatium pedum 245 & digitorum $5\frac{1}{3}$. Aufer 1,3863 F seu 20 *ped.* $0\frac{1}{2}$ *dig.* & manebunt 225 *ped.* 5 *dig.* Hoc spatium igitur globus, tempore $8''\ 12'''$, cadendo describere debuit per theoriam. Descripsit vero spatium 220 pedum per experimentum. Differentia insensibilis est.

Similibus computis ad reliquos etiam globos aere plenos applicatis, confeci tabulam sequentem.

Globorum pondera.	*Diametri.*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum 220.*		*Spatia describenda per theoriam.*		*Excessus.*	
510 *gran.*	5,1 *dig.*	8″	12‴	226 *ped.*	11 *dig.*	6 *ped.*	11 *dig.*
642	5,2	7	42	230	9	10	9
599	5,1	7	42	227	10	7	10
515	5	7	57	224	5	4	5
483	5	8	12	225	5	5	5
641	5,2	7	42	230	7	10	7

Exper. 14. Anno 1719. mense Julio, D. Desaguliers hujusmodi experimenta iterum cepit, formando vesicas porcorum in orbem sphæricum ope sphæræ ligneæ concavæ, ambientis quam madefactæ implere cogebantur inflando aerem; & hasce arefactas & exemptas demittendo ab altiore loco in templi ejusdem turri rotunda fornicata, nempe ab altitudine pedum 272; & eodem temporis momento demittendo etiam globum plumbeum cujus pondus erat duarum librarum Romanarum circiter. Et interea aliqui stantes in suprema parte templi, ubi globi demittebantur, notabant tempora tota cadendi, & alii stantes in terra notabant differentiam temporum inter casum globi plumbei & casum vesicæ. Tempora autem mensurabantur pendulis ad dimidia minuta secunda oscillantibus. Et eorum qui in terra stabant unus habebat horologium cum elatere ad singula minuta secunda quater vibrante; alius habebat machinam aliam affabre constructam cum pendulo etiam ad singula minuta secunda quater vibrante. Et similem machinam habebat unus eorum qui stabant in summitate templi. Et hæc instrumenta ita formabantur,

De Motu Corporum

ut motus eorum pro lubitu vel inciperent vel ſiſterentur. Globus autem plumbeus cadebat tempore minutorum ſecundorum quatuor cum quadrante circiter. Et addendo hoc tempus ad prædictam temporis differentiam, colligebatur tempus totum quo veſica cecidit. Tempora, quibus veſicæ quinque poſt caſum globi plumbei prima vice ceciderunt, erant $14\frac{3}{4}''$, $12\frac{3}{4}''$, $14\frac{5}{8}''$, $17\frac{3}{4}''$, & $16\frac{7}{8}''$, & ſecunda vice $14\frac{1}{2}''$, $14\frac{1}{4}''$, $14''$, $19''$, & $16\frac{3}{4}''$. Addantur $4\frac{1}{4}''$, tempus utique quo globus plumbeus cecidit, & tempora tota quibus veſicæ quinque ceciderunt, erant prima vice $19''$, $17''$, $18\frac{7}{8}''$, $22''$, & $21\frac{1}{8}''$; & ſecunda vice, $18\frac{3}{4}''$, $18\frac{1}{2}''$, $18\frac{1}{4}''$, $23\frac{1}{4}''$, & $21''$. Tempora autem in ſummitate templi notata, erant prima vice $19\frac{3}{8}''$, $17\frac{1}{4}''$, $18\frac{3}{4}''$, $22\frac{1}{8}''$, & $21\frac{5}{8}''$; & ſecunda vice $19''$, $18\frac{5}{8}''$, $18\frac{3}{8}''$, $24''$, & $21\frac{1}{4}''$. Cæterum veſicæ non ſemper recta cadebant, ſed nonnunquam volitabant, & hinc inde oſcillabantur inter cadendum. Et his motibus tempora cadendi prorogata ſunt & aucta nonnunquam dimidio minuti unius ſecundi, nonnunquam minuto ſecundo toto. Cadebant autem rectius veſica ſecunda & quarta prima vice; & prima ac tertia ſecunda vice. Veſica quinta rugoſa erat & per rugas ſuas nonnihil retardabatur. Diametros veſicarum deducebam ex earum circumferentiis filo tenuiſſimo bis circundato menſuratis. Et theoriam contuli cum experimentis in tabula ſequente, aſſumendo denſitatem aeris eſſe ad denſitatem aquæ pluvialis ut 1 ad 860, & computando ſpatia quæ globi per theoriam deſcribere debuerunt cadendo.

Veſicarum pondera.	*Diametri.*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum 272.*	*Spatia iiſdem temporibus deſcribenda per theoriam.*	*Differentia inter theor. & exper.*
128 *gran.*	5,28 *dig.*	$19''$	271 *ped.* 11 *dig.*	-0 *ped.* 1 *dig.*
156	5,19	17	272 $0\frac{1}{2}$	$+0$ $0\frac{1}{2}$
$137\frac{1}{2}$	5,3	$18\frac{1}{2}$	272 7	$+0$ 7
$97\frac{1}{2}$	5,26	22	277 4	$+5$ 4
$99\frac{1}{8}$	5	$21\frac{1}{8}$	282 0	$+10$ 0

Globorum igitur tam in aere quam in aqua motorum reſiſtentia prope omnis per theoriam noſtram recte exhibetur, ac denſitati fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus, proportionalis eſt.

In

In ſcholio, quod ſectioni ſextæ ſubjunctum eſt, oſtendimus per experimenta pendulorum quod globorum æqualium & æquivelocium in aere, aqua, & argento vivo motorum reſiſtentiæ ſunt ut fluidorum denſitates. Idem hic oſtendimus magis accurate per experimenta corporum cadentium in aëre & aqua. Nam pendula ſingulis oſcillationibus motum cient in fluido motui penduli redeuntis ſemper contrarium, & reſiſtentia ab hoc motu oriunda, ut & reſiſtentia fili quo pendulum ſuſpendebatur, totam penduli reſiſtentiam majorem reddiderunt quam reſiſtentia quæ per experimenta corporum cadentium prodiit. Etenim per experimenta pendulorum in ſcholio illo expoſita, globus ejuſdem denſitatis cum aqua, deſcribendo longitudinem ſemidiametri ſuæ in aëre, amittere deberet motus ſui partem $\frac{1}{3342}$. At per theoriam in hac ſeptima ſectione expoſitam & experimentis cadentium confirmatam, globus idem deſcribendo longitudinem eandem, amittere deberet motus ſui partem tantum $\frac{1}{4586}$, poſito quod denſitas aquæ ſit ad denſitatem aëris ut 860 ad 1. Reſiſtentiæ igitur per experimenta pendulorum majores prodiere (ob cauſas jam deſcriptas) quam per experimenta globorum cadentium, idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cum pendulorum in aëre, aqua & argento vivo oſcillantium reſiſtentiæ a cauſis ſimilibus ſimiliter augeantur, proportio reſiſtentiarum in his mediis, tam per experimenta pendulorum, quam per experimenta corporum cadentium, ſatis recte exhibebitur. Et inde concludi poteſt quod corporum in fluidis quibuſcunque fluidiſſimis motorum reſiſtentiæ, cæteris paribus, ſunt ut denſitates fluidorum.

His ita ſtabilitis, dicere jam licet quamnam motus ſui partem globus quilibet, in fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproxime. Sit D diameter globi, & V velocitas ejus ſub initio motus, & T tempus, quo globus velocitate V in vacuo deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium $\frac{8}{3}$D ut denſitas globi ad denſitatem fluidi: & globus in fluido illo projectus, tempore quovis alio t, amittet velocitatis ſuæ partem $\frac{tV}{T+t}$, manente parte $\frac{TV}{T+t}$, & deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium uniformi velocitate V eodem tempore deſcriptum in vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per

Z z 2 numerum

De Motu Corporum

numerum 2,302585093 est ad numerum $\frac{t}{T}$, per corol. VII. prop. XXXV. In motibus tardis resistentia potest esse paulo minor, propterea quod figura globi paulo aptior sit ad motum quam figura cylindri eadem diametro descripti. In motibus velocibus resistentia potest esse paulo major, propterea quod elasticitas & compressio fluidi non augeantur in duplicata ratione velocitatis. Sed hujusmodi minutias hic non expendo.

Et quamvis aër, aqua, argentum vivum & similia fluida, per divisionem partium in infinitum, subtiliarentur & fierent media infinite fluida; tamen globis projectis haud minus resisterent. Nam resistentia, de qua agitur in propositionibus præcedentibus, oritur ab inertia materiæ; & inertia materiæ corporibus essentialis est & quantitati materiæ semper proportionalis. Per divisionem partium fluidi, resistentia quæ oritur a tenacitate & frictione partium diminui quidem potest: sed quantitas materiæ per divisionem partium ejus non diminuitur; & manente quantitate materiæ, manet ejus vis inertiæ, cui resistentia, de qua hic agitur, semper proportionalis est. Ut hæc resistentia diminuatur, diminui debet quantitas materiæ in spatiis per quæ corpora moventur. Et propterea spatia cœlestia, per quæ globi planetarum & cometarum in omnes partes liberrime & sine omni motus diminutione sensibili perpetuo moventur, fluido omni corporeo destituuntur, si forte vapores longe tenuissimos & trajectos lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in fluidis progrediendo, & hic motus oritur ab excessu pressionis fluidi ad projectilis partes anticas supra pressionem ad ejus partes posticas, & non minor esse potest in mediis infinite fluidis quam in aere, aqua & argento vivo pro densitate materiæ in singulis. Hic autem pressionis excessus, pro quantitate sua, non tantum motum ciet in fluido, sed etiam agit in projectile ad motum ejus retardandum: & propterea resistentia in omni fluido est ut motus in fluido a projectili excitatus, nec minor esse potest in æthere subtilissimo pro densitate ætheris, quam in aëre, aqua & argento vivo pro densitatibus horum fluidorum.

SECTIO

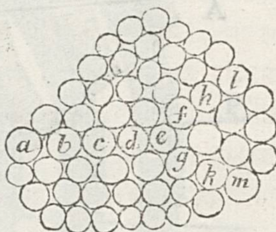
SECTIO VIII.

De motu per fluida propagato.

PROPOSITIO XLI. THEOREMA XXXII.

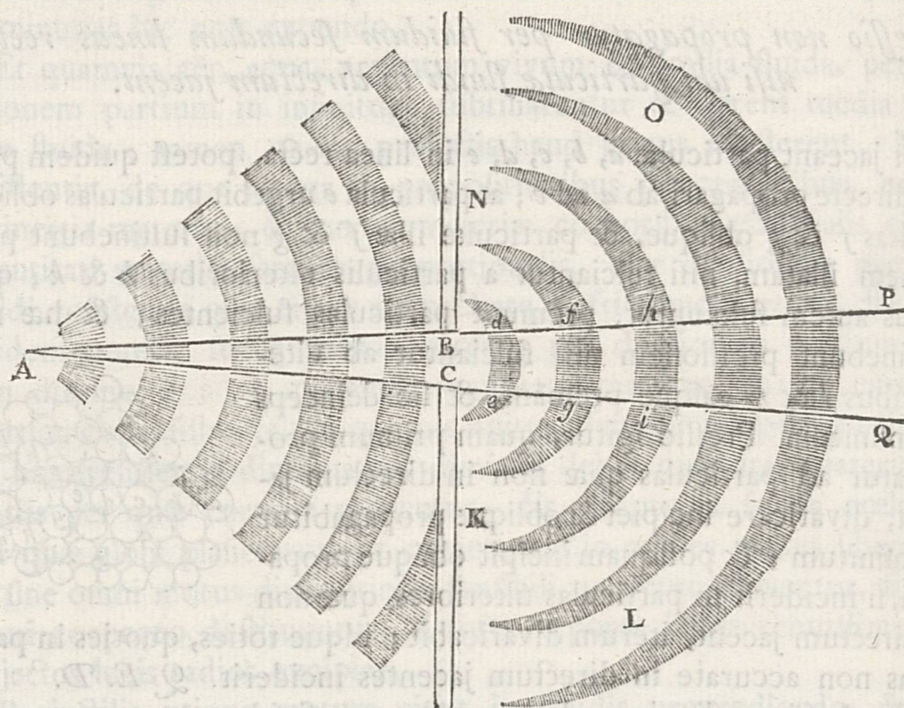
Pressio non propagatur per fluidum secundum lineas rectas, nisi ubi particulæ fluidi in directum jacent.

Si jaceant particulæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in linea recta, potest quidem pressio directe propagari ab *a* ad *e*; at particula *e* urgebit particulas oblique positas *f* & *g* oblique, & particulæ illæ *f* & *g* non sustinebunt pressionem illatam, nisi fulciantur a particulis ulterioribus *h* & *k*; quatenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non sustinebunt pressionem nisi fulciantur ab ulterioribus *l* & *m* easque premant, & sic deinceps in infinitum. Pressio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet & oblique propagabitur in infinitum; & postquam incipit oblique propagari, si inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accurate in directum jacentes inciderit. *Q. E. D.*



Corol. Si pressionis, a dato puncto per fluidum propagatæ, pars aliqua obstaculo intercipiatur; pars reliqua, quæ non intercipitur, divaricabit in spatia pone obstaculum. Id quod sic etiam demonstrari potest. A puncto *A* propagetur pressio quaquaversum, idque si fieri potest secundum lineas rectas, & obstaculo *NBCK* perforato in *BC*, intercipiatur ea omnis, præter partem coniformem *APQ*, quæ per foramen circulare *BC* transit. Planis transversis *de*, *fg*, *hi* distinguatur conus *APQ* in frusta; & interea dum conus *ABC*, pressionem propagando, urget frustum conicum ulterius *degf* in superficie *de*, & hoc frustum urget frustum proximum *fgih* in superficie *fg*, & frustum illud urget frustum tertium, & sic deinceps in infinitum; manifestum est (per motus legem tertiam) quod frustum

ſtum primum *defg*, reactione fruſti ſecundi *fghi*, tantum urgebitur & premetur in ſuperficie *fg*, quantum urget & premit fruſtum illud ſecundum. Fruſtum igitur *degf* inter conum *Ade* & fruſtum *fhig* comprimitur utrinque, & propterea (per corol. VI. prop. XIX.) figuram ſuam ſervare nequit, niſi vi eadem comprimatur undique. Eodem igitur impetu quo premitur in ſuperficiebus *de*, *fg*, conabitur cedere ad latera *df*, *eg*; ibique (cum rigidum non ſit, ſed omnimodo fluidum) excurret ac dilatabitur, niſi fluidum ambiens adſit, quo conatus iſte cohibeatur. Proinde conatu excurrendi, premet tam fluidum ambiens ad latera *df*, *eg* quam fruſtum *fghi* eodem impetu; & propterea preſſio non minus propagabitur a lateribus *df*, *eg* in ſpatia *NO*, *KL* hinc inde, quam propagatur a ſuperficie *fg* verſus *PQ*. *Q. E. D.*

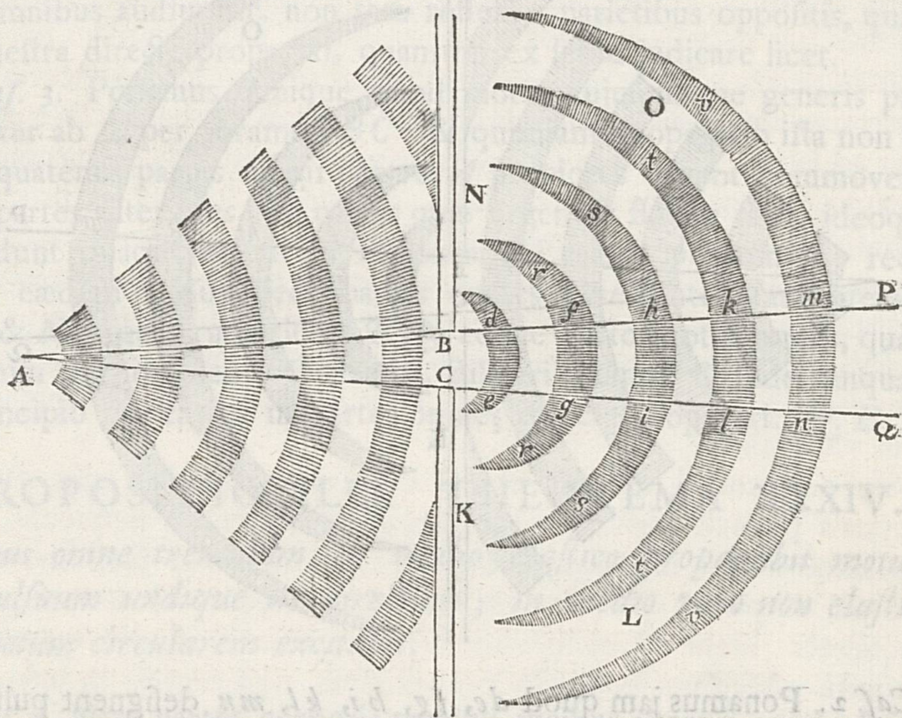


PROPO-

PROPOSITIO XLII. THEOREMA XXXIII.

Motus omnis per fluidum propagatus divergit a recto tramite in spatia immota.

Cas. 1. Propagetur motus a puncto *A* per foramen *BC*, pergatque, si fieri potest, in spatio conico *BCQP*, secundum lineas rectas divergentes a puncto *A*. Et ponamus primo quod motus iste sit undarum in superficie stagnantis aquæ. Sintque *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. undarum singularum partes altissimæ, vallibus totidem inter-



mediis ab invicem distinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior est quam in fluidi partibus immotis *LK*, *NO*, defluet eadem de jugorum terminis *e*, *g*, *i*, *l*, &c. *d*, *f*, *h*, *k*, &c. hinc inde versus *KL* & *NO*: & quoniam in undarum vallibus depressior est quam in fluidi partibus immotis *KL*, *NO*; defluet eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum juga, posteriore valles hinc inde dilatantur & propagantur versus *KL* & *NO*.

NO. Et quoniam motus undarum ab *A* verſus *PQ* fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, ideoque celerior non eſt quam pro celeritate deſcenſus; & deſcenſus aquæ hinc inde verſus *KL* & *NO* eadem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum hinc inde verſus *KL* & *NO* eadem velocitate qua undæ ipſæ ab *A* verſus *PQ* recta progrediuntur. Proindeque ſpatium totum hinc inde verſus *KL* & *NO* ab undis dilatatis *rfgr*, *shis*, *tklt*, *vmnv*, &c. occupabitur. *Q. E. D.* Hæc ita ſe habere quilibet in aqua ſtagnante experiri poteſt.

Caſ. 2. Ponamus jam quod *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn* deſignent pulſus a puncto *A* per medium elaſticum ſucceſſive propagatos. Pulſus propagari concipe per ſucceſſivas condenſationes & rarefactiones medii, ſic ut pulſus cujuſque pars denſiſſima ſphæricam occupet ſuperficiem circa centrum *A* deſcriptam, & inter pulſus ſucceſſivos æqualia intercedant intervalla. Deſignent autem lineæ *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. denſiſſimas pulſuum partes, per foramen *BC* propagatas. Et quoniam medium ibi denſius eſt quam in ſpatiis hinc inde verſus *KL* & *NO*, dilatabit ſeſe tam verſus ſpatia illa *KL*, *NO* utrinque ſita,

ſita, quam verſus pulſuum rariora intervalla; eoque pacto rarius ſemper evadens e regione intervallorum ac denſius e regione pulſuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulſuum progreſſivus motus oritur a perpetua relaxatione partium denſiorum verſus antecedentia intervalla rariora; & pulſus eadem fere celeritate ſeſe in medii partes quieſcentes *KL*, *NO* hinc inde relaxare debent; pulſus illi eadem fere celeritate ſeſe dilatabunt undique in ſpatia immota *KL*, *NO*, qua propagantur directe a centro *A*; ideoque ſpatium totum *KLON* occupabunt. *Q. E. D.* Hoc experimur in ſonis, qui vel monte interpoſito audiuntur, vel in cubiculum per feneſtram admiſſi ſeſe in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi a parietibus oppoſitis, quam a feneſtra directe propagati, quantum ex ſenſu judicare licet.

Caſ. 3. Ponamus denique quod motus cujuſcunque generis propagetur ab *A* per foramen *BC*: & quoniam propagatio iſta non fit, niſi quatenus partes medii centro *A* propiores urgent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur fluidæ ſunt, ideoque recedunt quaquaverſum in regiones ubi minus premuntur: recedent eædem verſus medii partes omnes quieſcentes, tam laterales *KL* & *NO*, quam anteriores *PQ*, eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen *BC* tranſiit, dilatari incipiet & inde tanquam a principio & centro, in partes omnes directe propagari. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XLIII. THEOREMA XXXIV.

Corpus omne tremulum in medio elaſtico propagabit motum pulſuum undique in directum; in medio vero non elaſtico motum circularem excitabit.

Caſ. 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo, itu ſuo urgebunt & propellent partes medii ſibi proximas, & urgendo compriment eaſdem & condenſabunt; dein reditu ſuo ſinent partes compreſſas recedere & ſeſe expandere. Igitur partes medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad inſtar partium corporis illius tremuli: & qua ratione partes corporis hujus agitabant haſce medii partes, hæ ſimilibus tremoribus agitatæ agitabunt partes ſibi proximas, eæque ſimiliter agitatæ agitabunt ulteriores, & ſic deinceps in infinitum. Et quemadmodum

medii partes primæ eundo condenſantur & redeundo relaxantur, ſic partes reliquæ quoties eunt condenſabuntur, & quoties redeunt ſeſe expandent. Et propterea non omnes ibunt & ſimul redibunt (ſic enim determinatas ab invicem diſtantias ſervando, non rarefierent & condenſarentur per vices) ſed accedendo ad invicem ubi condenſantur, & recedendo ubi rarefiunt, aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo condenſatæ, ob motum ſuum progreſſivum, quo feriunt obſtacula, ſunt pulſus; & propterea pulſus ſucceſſivi a corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem diſtantiis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus ſuis ſingulis ſingulos pulſus excitat. Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant ſecundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulſus inde per medium propagati ſeſe dilatabunt ad latera, per propoſitionem præcedentem; & a corpore illo tremulo tanquam centro communi, ſecundum ſuperficies propemodum ſphæricas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus in undis, quæ ſi digito tremulo excitentur, non ſolum pergent hinc inde ſecundum plagam motus digiti, ſed, in modum circulorum concentricorum, digitum ſtatim cingent & undique propagabuntur. Nam gravitas undarum ſupplet locum vis elaſticæ.

Caſ. 2. Quod ſi medium non ſit elaſticum: quoniam ejus partes a corporis tremuli partibus vibratis preſſæ condenſari nequeunt, propagabitur motus in inſtanti ad partes ubi medium facillime cedit, hoc eſt, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas a tergo relinqueret. Idem eſt caſus cum caſu corporis in medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum; ſed in circulum eundo, pergit ad ſpatia quæ corpus relinquit a tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; & quoties corpus regreditur ad locum priorem, medium inde repelletur & ad locum ſuum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non ſit firmum, ſed modis omnibus flexile, ſi tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus ſuis nequit medium ubivis urgere, quin alibi eidem ſimul cedat; efficiet ut medium,

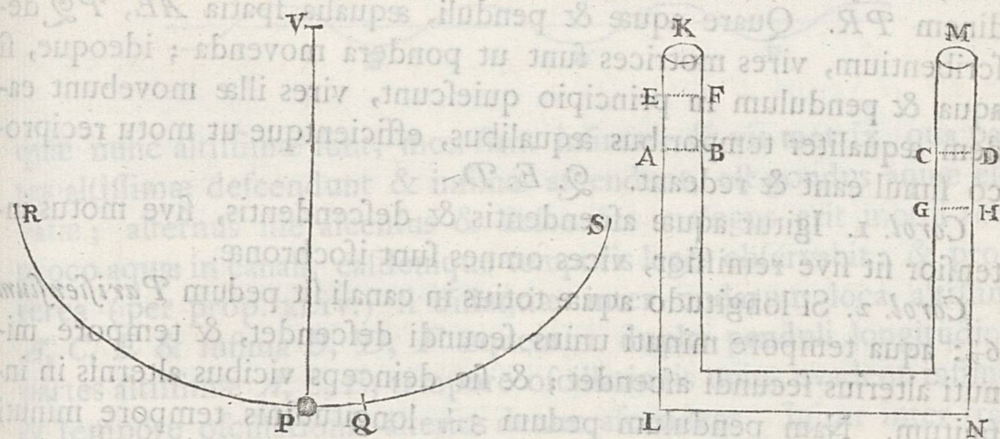
um, recedendo a partibus ubi premitur, pergat ſemper in orbem ad partes quæ eidem cedunt. *Q. E. D.*

Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium flammæ ad preſſionem, per medium ambiens, ſecundum lineas rectas propagandum conducere. Debebit ejuſmodi preſſio non ab agitatione ſola partium flammæ, ſed a totius dilatatione derivari.

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XXXV.

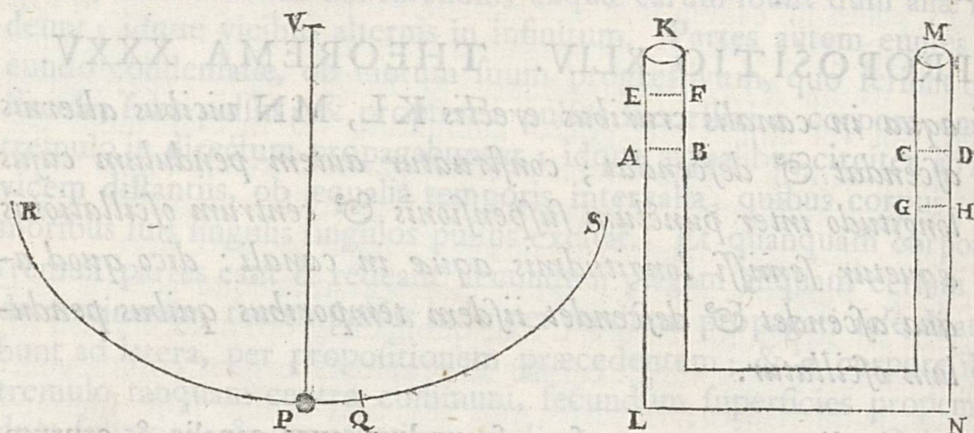
Si aqua in canalis cruribus erectis KL, MN *vicibus alternis aſcendat & deſcendat; conſtruatur autem pendulum cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis æquetur ſemiſſi longitudinis aquæ in canali: dico quod aqua aſcendet & deſcendet iiſdem temporibus quibus pendulum oſcillatur.*

Longitudinem aquæ menſuro ſecundum axes canalis & crurum, eandem ſummæ horum axium æquando; & reſiſtentiam aquæ, quæ oritur ab attritu canalis, hic non conſidero. Deſignent igitur *AB*, *CD* mediocrem altitudinem aquæ in crure utroque; & ubi aqua



in crure *KL* aſcendit ad altitudinem *EF*, deſcenderit aqua in crure *MN* ad altitudinem *GH*. Sit autem *P* corpus pendulum, *VP* filum, *V* punctum ſuſpenſionis, *RPQS* cyclois quam pendulum deſcribat, *P* ejus punctum infimum, *PQ* arcus altitudini *AE* æqualis.

lis. Vis, qua motus aquæ alternis vicibus acceleratur & retardatur, est excessus ponderis aquæ in alterutro crure supra pondus in altero, ideoque, ubi aqua in crure *KL* ascendit ad *EF*, & in crure altero descendit ad *GH*, vis illa est pondus duplicatum aquæ *EABF*, & propterea est ad pondus aquæ totius ut *AE* seu *PQ* ad *VP* seu



PR. Vis etiam, qua pondus *P* in loco quovis *Q* acceleratur & retardatur in cycloide (per corol. prop. LI.) est ad ejus pondus totum, ut ejus distantia *PQ* a loco infimo *P*, ad cycloidis longitudinem *PR*. Quare aquæ & penduli, æqualia spatia *AE*, *PQ* describentium, vires motrices sunt ut pondera movenda; ideoque, si aqua & pendulum in principio quiescunt, vires illæ movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficientque ut motu reciproco simul eant & redeant. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur aquæ ascendentis & descendentis, sive motus intensior sit sive remissior, vices omnes sunt isochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali sit pedum *Parisiensium* $6\frac{1}{9}$: aqua tempore minuti unius secundi descendet, & tempore minuti alterius secundi ascendet; & sic deinceps vicibus alternis in infinitum. Nam pendulum pedum $3\frac{1}{18}$ longitudinis tempore minuti unius secundi oscillatur.

Corol. 3. Aucta autem vel diminuta longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione subduplicata.

PROPO-

PROPOSITIO XLV. THEOREMA XXXVI.

Undarum velocitas est in subduplicata ratione latitudinum.

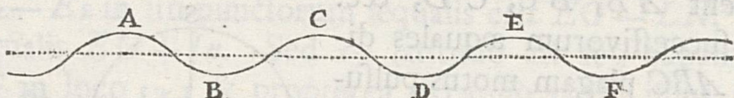
Consequitur ex constructione propositionis sequentis.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA X.

Invenire velocitatem undarum.

Constituatur pendulum cujus longitudo, inter punctum suspensionis & centrum oscillationis, æquetur latitudini undarum: & quo tempore pendulum illud oscillationes singulas peragit, eodem undæ progrediendo latitudinem suam propemodum conficient.

Undarum latitudinem voco mensuram transversam, quæ vel vallibus imis, vel summis culminibus interjacet. Designet *ABCDEF* superficiem aquæ stagnantis, undis successivis ascendentem ac descendentem; sintque *A, C, E,* &c. undarum culmina, & *B, D, F,* &c. valles intermedii. Et quoniam motus undarum fit per aquæ successivum ascensum & descensum, sic ut ejus partes *A, C, E,* &c.



quæ nunc altissimæ sunt, mox fiant infimæ; & vis motrix, qua partes altissimæ descendunt & infimæ ascendunt, est pondus aquæ elevatæ; alternus ille ascensus & descensus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, easdemque temporis leges observabit: & propterea (per prop. XLIV.) si distantiæ inter undarum loca altissima *A, C, E* & infima *B, D, F* æquentur duplæ penduli longitudini; partes altissimæ *A, C, E,* tempore oscillationis unius evadent infimæ, & tempore oscillationis alterius denuo ascendent. Igitur inter transitum undarum singularum tempus erit oscillationum duarum; hoc est, unda describet latitudinem suam, quo tempore pendulum illud bis oscillatur; sed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla est, ideoque æquat undarum latitudinem, oscillabitur semel. *Q. E. I.*

Corol.

Corol. 1. Igitur undæ, quæ pedes *Parisienses* $3\frac{1}{18}$ latæ sunt, tempore minuti unius secundi progrediendo latitudinem suam conficient; ideoque tempore minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, & horæ spatio pedes 11000 quamproxime.

Corol. 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in subduplicata ratione latitudinis.

Hæc ita se habent ex hypothesi quod partes aquæ recta ascendunt vel recta descendunt; sed ascensus & descensus ille verius fit per circulum, ideoque tempus hac propositione non nisi quamproxime definitum esse affirmo.

PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

Pulsibus per fluidum propagatis, singulæ fluidi particulæ, motu reciproco brevissimo euntes & redeuntes, accelerantur semper & retardantur pro lege oscillantis penduli.

Designent *AB*, *BC*, *CD*, &c. pulsuum successivorum æquales distantias; *ABC* plagam motus pulsuum ab *A* versus *B* propagati; *E*, *F*, *G* puncta tria physica medii quiescentis in recta *AC* ad æquales ab invicem distantias sita; *Ee*, *Ff*, *Gg* spatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco singulis vibrationibus eunt & redeunt; ε, φ, γ loca quævis intermedia eorundem punctorum; & *EF*, *FG* lineolas physicas seu medii partes lineares punctis illis interjectas, & successive translatas in loca $\varepsilon\varphi$, $\varphi\gamma$ & *ef*, *fg*. Rectæ *Ee* æqualis ducatur recta *PS*. Bisecetur eadem in *O*, centroque *O* & intervallo *OP* describatur circulus *SIPi*. Per hujus circumferentiam totam cum partibus suis exponatur tempus totum vibrationis unius

unius cum ipsius partibus proportionalibus; sic ut completo tempore quovis *PH* vel *PHSh*, si demittatur ad *PS* perpendiculum *HL* vel *hl*, & capiatur $E\varepsilon$ æqualis *PL* vel *Pl*, punctum physicum *E* reperiatur in ε. Hac lege punctum quodvis *E*, eundo ab *E* per ε ad *e*, & inde redeundo per ε ad *E*, iisdem accelerationis ac retardationis gradibus vibrationes singulas peraget cum oscillante pendulo. Probandum est quod singula medii puncta physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur medium tali motu a causa quacunque cieri, & videamus quid inde sequatur.

In circumferentia *PHSh* capiantur æquales arcus *HI*, *IK* vel *hi*, *ik*, eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ *EF*, *FG* ad pulsuum intervallum totum *BC*. Et demissis perpendiculis *IM*, *KN* vel *im*, *kn*; quoniam puncta *E*, *F*, *G* motibus similibus successive agitantur, & vibrationes suas integras ex itu & reditu compositas interea peragunt dum pulsus transfertur a *B* ad *C*; si *PH* vel *PHSh* sit tempus ab initio motus puncti *E*, erit *PI* vel *PHSi* tempus ab initio motus puncti *F*, & *PK* vel *PHSk* tempus ab initio motus puncti *G*; & propterea $E\varepsilon$, $F\varphi$, $G\gamma$ erunt ipsis *PL*, *PM*, *PN* in itu punctorum, vel ipsis *Pl*, *Pm*, *Pn* in punctorum reditu, æquales respective. Unde $\varepsilon\gamma$ seu $EG + G\gamma - E\varepsilon$ in itu punctorum æqualis erit $EG - LN$, in reditu autem æqualis $EG + ln$. Sed $\varepsilon\gamma$ latitudo est seu expansio partis medii *EG* in loco $\varepsilon\gamma$; & propterea expansio partis illius in itu est ad ejus expansionem mediocrem, ut $EG - LN$ ad *EG*; in reditu autem ut $EG + ln$ seu $EG + LN$ ad *EG*. Quare cum sit *LN* ad *KH* ut *IM* ad radium *OP*, & *KH* ad *EG* ut circumferentia *PHShP* ad *BC*, id est, si ponatur V pro radio circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo pulsuum *BC*, ut *OP* ad V; & ex æquo *LN* ad *EG* ut *IM* ad V: erit expansio partis *EG* punctive physici *F* in loco $\varepsilon\gamma$ ad expansionem mediocrem, quam pars illa habet in loco suo primo *EG*, ut $V - IM$ ad V in itu, utque $V + im$ ad V in reditu. Unde vis elastica puncti *F* in loco $\varepsilon\gamma$ est ad vim ejus elasticam mediocrem in loco *EG*, ut $\frac{1}{V - IM}$ ad $\frac{1}{V}$ in itu, in reditu vero ut $\frac{1}{V + im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento vires elasticæ punctorum

physico-

physicorum E & G in itu, sunt ut $\frac{1}{V-HL}$ & $\frac{1}{V-KN}$ ad $\frac{1}{V}$; & virium differentia ad medii vim elasticam mediocrem, ut $\frac{HL-KN}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN}$ ad $\frac{1}{V}$. Hoc est, ut $\frac{HL-KN}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$, sive ut $HL-KN$ ad V, si modo (ob angustos limites vibrationum) supponamus HL & KN indefinite minores esse quantitate V. Quare cum quantitas V detur, differentia virium est ut $HL-KN$, hoc est (ob proportionales $HL-KN$ ad HK, & OM ad OI vel OP, datasque HK & OP) ut OM; id est, si Ff bisecetur in Ω, ut $\Omega\varphi$. Et eodem argumento differentia virium elasticarum punctorum physicorum ε & γ, in reditu lineolæ physicæ $\varepsilon\gamma$ est ut $\Omega\varphi$. Sed differentia illa (id est, excessus vis elasticæ puncti ε supra vim elasticam puncti γ) est vis qua interjecta medii lineola physica $\varepsilon\gamma$ acceleratur in itu & retardatur in reditu; & propterea vis acceleratrix lineolæ physicæ $\varepsilon\gamma$, est ut ipsius distantia a medio vibrationis loco Ω. Proinde tempus (per prop. XXXVIII. lib. I.) recte exponitur per arcum PI; & medii pars linearis $\varepsilon\gamma$ lege præscripta movetur, id est, lege oscillantis penduli: estque par ratio partium omnium linearium ex quibus medium totum componitur. *Q. E. D.*

Corol. Hinc patet quod numerus pulsuum propagatorum idem sit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progressu. Nam lineola physica $\varepsilon\gamma$, quamprimum ad locum suum primum redierit, quiescet; neque deinceps movebitur, nisi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulsuum qui a corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quiescet igitur quamprimum pulsus a corpore tremulo propagari desinunt.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XXXVIII.

Pulsuum in fluido elastico propagatorum velocitates sunt in ratione composita ex subduplicata ratione vis elasticæ directe & subduplicata ratione densitatis inverse; si modo fluidi vis elastica ejusdem condensationi proportionalis esse supponatur.

Cas. I. Si media sint homogenea, & pulsuum distantiæ in his mediis æquentur inter se, sed motus in uno medio intensior sit: contractiones

tractiones & dilatationes partium analogarum erunt ut iidem motus. Accurata quidem non est hæc proportio. Veruntamen nisi contractiones & dilatationes sint valde intensæ, non errabit sensibiliter, ideoque pro physice accurata haberi potest. Sunt autem vires elasticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium simul genitæ sunt ut vires. Ideoque æquales & correspondentes pulsuum correspondentium partes itus & reditus suos per spatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ sunt ut spatia, simul peragent: & propterea pulsus, qui tempore itus & reditus unius latitudinem suam progrediendo conficiunt, & in loca pulsuum proxime præcedentium semper succedunt, ob æqualitatem distantiarum, æquali cum velocitate in medio utroque progredientur.

Cas. 2. Sin pulsuum distantiæ seu longitudines sint majores in uno medio quam in altero; ponamus quod partes correspondentes spatia latitudinibus pulsuum proportionalia singulis vicibus eundo & redeundo describant: & æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque si media sint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ elasticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda est ut pulsuum latitudo; & in eadem ratione est spatium per quod singulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. Estque tempus itus & reditus unius in ratione composita ex ratione subduplicata materiæ & ratione subduplicata spatii, atque ideo ut spatium. Pulsus autem temporibus itus & reditus unius eundo latitudines suas conficiunt, hoc est, spatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea sunt æquiveloces.

Cas. 3. In mediis igitur densitate & vi elastica paribus, pulsus omnes sunt æquiveloces. Quod si medii vel densitas vel vis elastica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis elasticæ, & materia movenda in ratione densitatis augetur; tempus, quo motus iidem peragantur ac prius, augebitur in subduplicata ratione densitatis, ac diminuetur in subduplicata ratione vis elasticæ. Et propterea velocitas pulsuum erit in ratione composita ex ratione subduplicata densitatis medii inverse & ratione subduplicata vis elasticæ directe. *Q. E. D.*

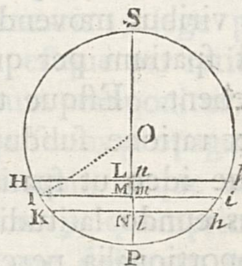
Hæc propositio ulterius patebit ex constructione sequentis.

PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA XI.

Datis medii densitate & vi elastica, invenire velocitatem pulsuum.

Fingamus medium ab incumbente pondere pro more aëris nostri comprimi; sitque A altitudo medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus densitas eadem sit cum densitate medii compressi, in quo pulsus propagantur. Constitui autem intelligatur pendulum, cujus longitudo inter punctum suspensionis & centrum oscillationis sit A: & quo tempore pendulum illud oscillationem integram ex itu & reditu compositam peragit, eodem pulsus eundo conficiet spatium circumferentiæ circuli radio A descripti æquale.

Nam stantibus quæ in propositione XLVII. constructa sunt, si linea quævis physica *EF*, singulis vibrationibus describendo spatium *PS*, urgeatur in extremis itus & reditus cujusque locis *P* & *S*, a vi elastica quæ ipsius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes singulas quo tempore eadem in cycloide, cujus perimeter tota longitudini *PS* æqualis est, oscillari posset: id adeo quia vires æquales æqualia corpuscula per æqualia spatia simul impellent. Quare cum oscillationum tempora sint in subduplicata ratione longitudinis pendulorum, & longitudo penduli æquetur dimidio arcui cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oscillationis penduli, cujus longitudo est A, in subduplicata ratione longitudinis $\frac{1}{2}$ *PS* seu *PO* ad longitudinem A. Sed vis elastica, qua lineola physica *EG*, in locis suis extremis *P*, *S* existens, urgetur, erat (in demonstratione propositionis XLVII.) ad ejus vim totam elasticam ut $HL - KN$ ad V, hoc est (cum punctum



K jam

K jam incidat in *P*) ut *HK* ad V: & vis illa tota, hoc eſt pondus incumbens, quo lineola *EG* comprimitur, eſt ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo A ad lineolæ longitudinem *EG*; ideoque ex æquo, vis qua lineola *EG* in locis ſuis *P* & *S* urgetur, eſt ad lineolæ illius pondus ut $HK \times A$ ad $V \times EG$, ſive ut $PO \times A$ ad VV, nam *HK* erat ad *EG* ut *PO* ad V. Quare cum tempora, quibus æqualia corpora per æqualia ſpatia impelluntur, ſint reciproce in ſubduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illa elaſtica, ad tempus vibrationis, urgente vi ponderis, in ſubduplicata ratione VV ac $PO \times A$, atque ideo ad tempus oſcillationis penduli cujus longitudo eſt A in ſubduplicata ratione VV ad $PO \times A$, & ſubduplicata ratione *PO* ad A conjunctim; id eſt, in ratione integra V ad A. Sed tempore vibrationis unius ex itu & reditu compoſitæ, pulſus progrediendo conficit latitudinem ſuam *BC*. Ergo tempus, quo pulſus percurrit ſpatium *BC*, eſt ad tempus oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ, ut V ad A, id eſt, ut *BC* ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A. Tempus autem, quo pulſus percurret ſpatium *BC*, eſt ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in eadem ratione; ideoque tempore talis oſcillationis pulſus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas pulſuum ea eſt, quam acquirunt gravia æqualiter accelerato motu cadendo, & caſu ſuo deſcribendo dimidium altitudinis A. Nam tempore caſus hujus, cum velocitate cadendo acquiſita, pulſus percurret ſpatium quod erit æquale toti altitudini A; ideoque tempore oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ percurret ſpatium æquale circumferentiæ circuli radio A deſcripti: eſt enim tempus caſus ad tempus oſcillationis ut radius circuli ad ejuſdem circumferentiam.

Corol. 2. Unde cum altitudo illa A ſit ut fluidi vis elaſtica directe & denſitas ejuſdem inverſe; velocitas pulſuum erit in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione denſitatis inverſe & ſubduplicata ratione vis elaſticæ directe.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XII.

Invenire pulſuum diſtantias.

Corporis, cujus tremore pulſus excitantur, inveniatur numerus vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur ſpatium quod pulſus eodem tempore percurrere poſſit, & pars inventa erit pulſus unius latitudo. *Q. E. I.*

Scholium.

Spectant propoſitiones noviſſimæ ad motum lucis & ſonorum. Lux enim cum propagetur ſecundum lineas rectas, in actione ſola (per prop. XLI. & XLII.) conſiſtere nequit. Soni vero propterea quod a corporibus tremulis oriantur, nihil aliud ſunt quam aëris pulſus propagati, per prop. XLIII. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, ſi modo vehementes ſint & graves, quales ſunt ſoni tympanorum. Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & ſonos quoſvis, in chordas corporibus ſonoris uniſonas impactos, excitare tremores notiſſimum eſt. Confirmatur etiam ex velocitate ſonorum. Nam cum pondera ſpecifica aquæ pluvialis & argenti vivi ſint ad invicem ut 1 ad $13\frac{2}{3}$ circiter, & ubi mercurius in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus ſpecificum aëris & aquæ pluvialis ſint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: erunt pondera ſpecifica aëris & argenti vivi ut 1 ad 11890. Proinde cum altitudo argenti vivi ſit 30 digitorum, altitudo aëris uniformis, cujus pondus aërem noſtrum ſubjectum comprimere poſſet, erit 356700 digitorum, ſeu pedum *Anglicorum* 29725. Eſtque hæc altitudo illa ipſa quam in conſtructione ſuperioris problematis nominavimus A. Circuli radio 29725 pedum deſcripti circumferentia eſt pedum 186768. Et cum pendulum digitos $39\frac{1}{5}$ longum oſcillationem ex itu & reditu compoſitam tempore minutorum duorum ſecundorum, uti notum eſt, abſolvat; pendulum pedes 29725 ſeu digitos 356700 longum oſcillationem conſimilem tempore minutorum ſecundorum $190\frac{3}{4}$ abſolvere debebit. Eo igitur tempore ſonus progrediendo conficiet pedes 186768, ideoque tempore minuti unius ſecundi pedes 979.

Cæterum

Cæterum in hoc computo nulla habetur ratio craſſitudinis ſolidarum particularum aëris, per quam ſonus utique propagatur in inſtanti. Cum pondus aëris ſit ad pondus aquæ ut 1 ad 870, & ſales ſint fere duplo denſiores quam aqua; ſi particulæ aëris ponantur eſſe ejuſdem circiter denſitatis cum particulis vel aquæ vel ſalium, & raritas aëris oriatur ab intervallis particularum: diameter particulæ aëris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979, quos ſonus tempore minuti unius ſecundi juxta calculum ſuperiorem conficiet, addere licet pedes $\frac{979}{9}$ ſeu 109 circiter, ob craſſitudinem particularum aëris: & ſic ſonus tempore minuti unius ſecundi conficiet pedes 1088 circiter.

His adde quod vapores in aëre latentes, cum ſint alterius elateris & alterius toni, vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri quo ſoni propagantur. His autem quieſcentibus, motus ille celerius propagabitur per ſolum aërem verum, idque in ſubduplicata ratione minoris materiæ. Ut ſi atmoſphæra conſtet ex decem partibus aëris veri & una parte vaporum, motus ſonorum celerior erit in ſubduplicata ratione 11 ad 10, vel in integra circiter ratione 21 ad 20, quam ſi propagaretur per undecim partes aëris veri: ideoque motus ſonorum ſupra inventus, augendus erit in hac ratione. Quo pacto ſonus, tempore minuti unius ſecundi, conficiet pedes 1142.

Hæc ita ſe habere debent tempore verno & autumnali, ubi aër per calorem temperatum rareſcit & ejus vis elaſtica nonnihil intenditur. At hyberno tempore, ubi aër per frigus condenſatur, & ejus vis elaſtica remittitur, motus ſonorum tardior eſſe debet in ſubduplicata ratione denſitatis; & viciſſim æſtivo tempore debet eſſe velocior.

Conſtat autem per experimenta quod ſoni tempore minuti unius ſecundi eundo conficiunt pedes *Londinenſes* plus minus 1142, *Pariſienſes* vero 1070.

Cognita ſonorum velocitate innoteſcunt etiam intervalla pulſuum. Invenit utique *D. Sauveur*, factis a ſe experimentis, quod fiſtula aperta, cujus longitudo eſt pedum *Pariſienſium* plus minus quinque, ſonum edit ejuſdem toni cum ſono chordæ quæ tempore minuti unius ſecundi centies recurrit. Sunt igitur pulſus plus minus centum in ſpatio pedum *Pariſienſium* 1070, quos ſonus tempore mi-

nuti

nuti unius ſecundi percurrit ; ideoque pulſus unus occupat ſpatium pedum *Pariſienſium* quaſi $10\frac{7}{10}$, id eſt, duplam circiter longitudinem fiſtulæ. Unde verſimile eſt quod latitudines pulſuum, in omnium apertarum fiſtularum ſonis, æquentur duplis longitudinibus fiſtularum.

Porro cur ſoni ceſſante motu corporis ſonori ſtatim ceſſant, neque diutius audiuntur ubi longiſſime diſtamus a corporibus ſonoris, quam cum proxime abſumus, patet ex corollario propoſitionis XLVII. libri hujus. Sed & cur ſoni in tubis ſtentorophonicis valde augentur ex allatis principiis manifeſtum eſt. Motus enim omnis reciprocus ſingulis recurſibus a cauſa generante augeri ſolet. Motus autem in tubis dilatationem ſonorum impedientibus, tardius amittitur & fortius recurrit, & propterea a motu novo ſingulis recurſibus impreſſo magis augetur. Et hæc ſunt præcipua phænomena ſonorum.

SECTIO IX.

De motu circulari fluidorum.

HYPOTHESIS.

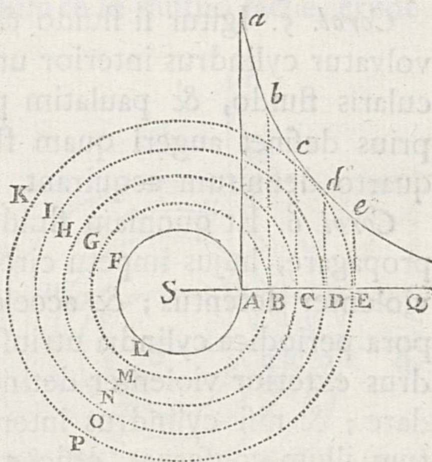
Reſiſtentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, proportionalem eſſe velocitati, qua partes fluidi ſeparantur ab invicem.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XXXIX.

Si cylindrus ſolidus infinite longus in fluido uniformi & infinito circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur fluidum in orbem, perſeveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo ; dico quod tempora periodica partium fluidi ſunt ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindri.

Sit *AFL* cylindrus uniformiter circa axem *S* in orbem actus, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. diſtinguatur fluidum

fluidum in orbes cylindricos innumeros concentricos solidos ejusdem crassitudinis. Et quoniam homogeneum est fluidum, impressiones contiguorum orbium in se mutuo factæ erunt (per hypothesin) ut eorum translationes ab invicem, & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est vel minor ex parte concava quam ex parte convexa; prævalebit impressio fortior, & motum orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones ex parte utraque sibi invicem æquari & fieri in regiones contrarias. Unde cum impressiones sunt ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem, erunt translationes inverse ut superficies, hoc est, inverse ut superficierum distantiæ ab axe. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directe & distantiæ inverse; hoc est, conjunctis rationibus, ut quadrata distantiarum inverse. Quare si ad infinitæ rectæ *SABCDEQ* partes singulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. ipsarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. quadratis reciproce proportionalia, & per terminos perpendicularium duci intelligatur linea curva hyperbolica; erunt summæ differentiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, id est, si ad constituendum medium uniformiter fluidum, orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum, ut areæ hyperbolicæ his summis analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. Et tempora motibus angularibus reciproce proportionalia, erunt etiam his areis reciproce proportionalia. Est igitur tempus periodicum particulæ cujusvis *D* reciproce ut area *DdQ*, hoc est (per notas curvarum quadraturas) directe ut distantia *SD*. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc motus angulares particularum fluidi sunt reciproce ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri, & velocitates absolutæ sunt æquales.

Corol.

Corol. 2. Si fluidum in vaſe cylindrico longitudinis infinitæ contineatur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, ſintque revolutionum tempora ut ipſorum ſemidiametri, & perſeveret fluidi pars unaquæque in motu ſuo: erunt partium ſingularum tempora periodica ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quam retardatur.

Corol. 4. Unde ſi toti cylindrorum & fluidi ſyſtemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, habebitur motus fluidi in cylindro quieſcente.

Corol. 5. Igitur ſi fluido & cylindro exteriore quieſcentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius deſinet augeri quam fluidi partes ſingulæ motum corollario quarto definitum acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum ſuum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior niſi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus quoad uſque tempora periodica cylindri utriuſque æquentur inter ſe. Quod ſi cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & niſi cylindrus interior vi aliqua extrinſecus impreſſa motum illum conſervet, efficiet ut idem paulatim ceſſet.

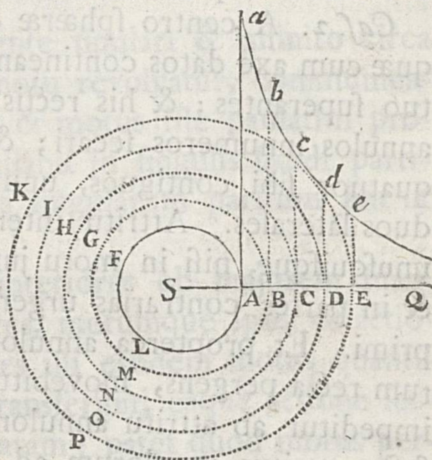
Quæ omnia in aqua profunda ſtagnante experiri licet.

PROPO-

PROPOSITIO LII. THEOREMA XL.

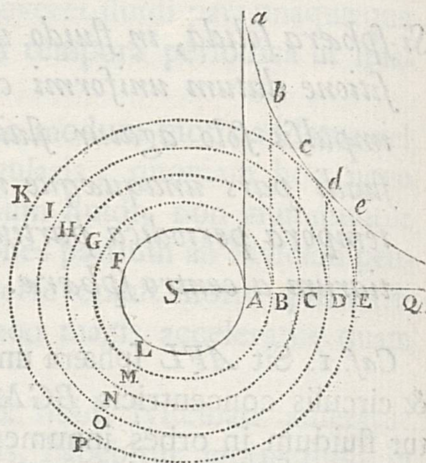
Si sphæra solida, in fluido uniformi & infinito, circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem; perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata distantiarum a centro sphæræ.

Cas. 1. Sit *AFL* sphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. distinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis. Finge autem orbes illos esse solidos; & quoniam homogeneum est fluidum, impressiones contiguorum orbium in se mutuo factæ, erunt (per hypothesin) ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est vel minor ex parte concava quam ex parte convexa; prævalebit impressio fortior, & velocitatem orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unusquisque in motu suo perseveret uniformiter, debebunt impressiones ex parte utraque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impressiones sint ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem; erunt translationes inverse ut superficies, hoc est, inverse ut quadrata distantiarum superficierum a centro. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directe & distantiæ inverse; hoc est, conjunctis rationibus ut cubi distantiarum inverse. Quare si ad rectæ infinitæ *SABCDEQ* partes singulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*,



 Dd,

Dd, *Ee*, &c. ipsarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. cubis reciproce proportionalia, erunt summæ differentiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*: id est (si ad constituendum medium uniformiter fluidum, numerus orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ hyperbolicæ his summis analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciproce proportionalia erunt etiam his areis reciproce proportionalia. Est igitur tempus periodicum orbis cujusvis *DIO* reciproce ut area *DdQ*, hoc est, per notas curvarum quadraturas, directe ut quadratum distantiæ *SD*. Id quod volui primo demonstrare.



Cas. 2. A centro sphæræ ducantur infinitæ rectæ quam plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis se mutuo superantes; & his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos innumeros secari; & annulus unusquisque habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem & duos laterales. Attritu interioris & exterioris non potest annulus unusquisque, nisi in motu juxta legem casus primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonstratione casus primi. Et propterea annulorum series quælibet a globo in infinitum recta pergens, movebitur pro lege casus primi, nisi quatenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hac lege facto attritus annulorum ad latera nullus est; neque ideo motum, quo minus hac lege fiat, impediet. Si annuli, qui a centro æqualiter distant, vel citius revolverentur vel tardius juxta polos quam juxta eclipticam; tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuo, & sic vergerent semper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege casus primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat secundum legem casus primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc est, annulorum singulorum tempora periodica erunt ut quadrata distantiarum ipsorum a centro globi. Quod volui secundo demonstrare.

Caſ. 3. Dividatur jam annulus unuſquiſque ſectionibus tranſverſis in particulas innumeras conſtituentes ſubſtantiam abſolute & uniformiter fluidam ; & quoniam hæ ſectiones non ſpectant ad legem motus circularis, ſed ad conſtitutionem fluidi ſolummodo conducunt, perſeverabit motus circularis ut prius. His ſectionibus annuli omnes quam minimi aſperitatem & vim attritus mutui aut non mutabunt, aut mutabunt æqualiter. Et manente cauſarum proportione manebit effectuum proportio, hoc eſt, proportio motuum & periodicorum temporum. *Q. E. D.* Cæterum cum motus circularis, & inde orta vis centrifuga, major ſit ad eclipticam quam ad polos ; debebit cauſa aliqua adeſſe qua particulæ ſingulæ in circulis ſuis retineantur ; ne materia, quæ ad eclipticam eſt, recedat ſemper a centro & per exteriora vorticis migret ad polos, indeque per axem ad eclipticam circulatione perpetua revertatur.

Corol. 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi, ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a centro globi, & velocitates abſolutæ reciproce ut eadem quadrata applicata ad diſtantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quieſcente ſimilari & infinito circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem vorticis, & motus iſte paulatim propagabitur in infinitum ; neque prius ceſſabit in ſingulis fluidi partibus accelerari, quam tempora periodica ſingularum partium ſint ut quadrata diſtantiarum a centro globi.

Corol. 3. Quoniam vorticis partes interiores ob majorem ſuam velocitatem atterunt & urgent exteriores, motumque ipſis ea actione perpetuo communicant, & exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores ſimul transferunt, eaque actione ſervant quantitatem motus ſui plane invariatam ; patet quod motus perpetuo transfertur a centro ad circumferentiam vorticis, & per infinitatem circumferentiæ abſorbetur. Materia inter ſphæricas duas quaſvis ſuperficies vortici concentricas nunquam accelerabitur, eo quod motum omnem a materia interiore acceptum transfert ſemper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conſervationem vorticis conſtanter in eodem movendi ſtatu, requiritur principium aliquod activum, a quo globus eandem ſemper quantitatem motus accipiat, quam imprimit in ma-

De Motu Corporum

teriam vorticis. Sine tali principio necesse est ut globus & vorticis partes interiores, propagantes semper motum suum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardescant paulatim & in orbem agi desinant.

Corol. 5. Si globus alter huic vortici ad certam ab ipsius centro distantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliqua constanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in vorticem: & primo revolveretur hic vortex novus & exiguus una cum globo circa centrum alterius, & interea latius serperet ipsius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum vorticis primi. Et eadem ratione, qua hujus globus raperetur motu vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, sic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, seque mutuo ob motum illum circularem fugerent, nisi per vim aliquam cohibiti. Postea si vires constanter impressæ, quibus globi in motibus suis perseverant, cessarent, & omnia legibus mechanicis permitterentur, languesceret paulatim motus globorum (ob rationem in corol. 3. & 4. assignatam) & vortices tandem conquiescerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes positione datos certis cum velocitatibus constanter revolverentur, fierent vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi singuli eadem ratione, qua unus aliquis motum suum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus suos in infinitum, adeo ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus resultat. Unde vortices non definientur certis limitibus, sed in se mutuo paulatim excurrent; globique per actiones vorticum in se mutuo perpetuo movebuntur de locis suis, uti in corollario superiore expositum est; neque certam quamvis inter se positionem servabunt, nisi per vim aliquam retenti. Cessantibus autem viribus illis quæ in globos constanter impressæ conservant hosce motus, materia ob rationem in corollario tertio & quarto assignatam, paulatim requiescet & in vortices agi desinet.

Corol. 7. Si fluidum similare claudatur in vase sphærico, ac globi in centro consistentis uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, sintque eorum tempora periodica ut quadrata semidiametrorum: partes fluidi non prius perseverabunt in motibus suis sine accelera-

tione

tione & retardatione, quam ſint eorum tempora periodica ut quadrata diſtantiarum a centro vorticis. Alia nulla vorticis conſtitutio poteſt eſſe permanens. LIBER SECUNDUS.

Corol. 8. Si vas, fluidum incluſum, & globus ſervent hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in ſe invicem, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium inter ſe pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quam acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. Unde ſi vas quieſcat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum tranſire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone ſummam temporis revolutionis hujus & revolutionis globi eſſe ad tempus revolutionis globi, ut quadratum ſemidiametri vaſis ad quadratum ſemidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi reſpectu plani hujus erunt ut quadrata diſtantiarum ſuarum a centro globi.

Corol. 10. Proinde ſi vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diverſum aliquem data cum velocitate quacunque moveatur, dabitur motus fluidi. Nam ſi ſyſtemati toti auferatur vaſis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter ſe qui prius, per corol. VIII. Et motus iſti per corol. IX. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quieſcant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas niſi violenter detentum, neque prius deſinent fluidum & vas accelerari, quam ſint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod ſi vas vi aliqua detineatur vel revolvatur motu quovis conſtanti & uniformi, deveniet medium paulatim ad ſtatum motus in corollariis VIII. IX. & X. definiti, nec in alio unquam ſtatu quocunque perſeverabit. Deinde vero ſi, viribus illis ceſſantibus quibus vas & globus certis motibus revolvebantur, permittatur ſyſtema totum legibus mechanicis; vas & globus in ſe invicem agent mediante fluido, neque motus ſuos in ſe mutuo per fluidum propagare prius ceſſabunt, quam eorum tempora periodica æquentur inter ſe, & ſyſtema totum ad inſtar corporis unius ſolidi ſimul revolvatur.

Scholium.

Scholium.

In his omnibus ſuppono fluidum ex materia quoad denſitatem & fluiditatem uniformi conſtare. Tale eſt in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus ſimiles & æquales, ad æquales ſemper a ſe diſtantias, ubivis in fluido conſtitutus, propagare poſſit. Conatur quidem materia per motum ſuum circularem recedere ab axe vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hac preſſione fit attritus partium fortior & ſeparatio ab invicem difficilior; & per conſequens diminuitur materiæ fluiditas. Rurſus ſi partes fluidi ſunt alicubi craſſiores ſeu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores ſuperficies in quibus partes ſeparentur ab invicem. In hujuſmodi caſibus deficientem fluiditatem vel lubricitate partium vel lentore aliave aliqua conditione reſtitui ſuppono. Hoc niſi fiat, materia ubi minus fluida eſt magis cohærebit & ſegnior erit, ideoque motum tardius recipiet & longius propagabit quam pro ratione ſuperius aſſignata. Si figura vaſis non ſit ſphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus ſed conformibus eidem vaſis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium diſtantiarum a centro quamproxime. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora ſunt ſpatia, tardiores erunt motus, ubi anguſtiora velociores, neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim deſcribent minus curvos, & conatus recedendi a centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quam augebitur per incrementum velocitatis. Pergendo a ſpatiis anguſtioribus in latiora recedent paulo longius a centro, ſed iſto receſſu tardeſcent; & accedendo poſtea de latioribus ad anguſtiora accelerabuntur, & ſic per vices tardeſcent & accelerabuntur particulæ ſingulæ in perpetuum. Hæc ita ſe habebunt in vaſe rigido. Nam in fluido infinito conſtitutio vorticum innoteſcit per propoſitionis hujus corollarium ſextum.

Proprietates autem vorticum hac propoſitione inveſtigare conatus ſum, ut pertentarem ſiqua ratione phænomena cœleſtia per vortices explicari poſſint. Nam phænomenon eſt, quod planetarum circa jovem revolventium tempora periodica ſunt in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum a centro jovis; & eadem regula obtinet in planetis qui circa ſolem revolvuntur. Obtinent autem hæ regulæ in planetis

tis utrisque quam accuratissime, quatenus observationes astronomicæ hactenus prodidere. Ideoque si planetæ illi a vorticibus circa jovem & solem revolventibus deferantur, debebunt etiam hi vortices eadem lege revolvi. Verum tempora periodica partium vorticis prodierunt in ratione duplicata distantiarum a centro motus: neque potest ratio illa diminui & ad rationem sesquiplicatam reduci, nisi vel materia vorticis eo fluidior sit quo longius distat a centro, vel resistentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, ex aucta velocitate qua partes fluidi separantur ab invicem, augeatur in majori ratione quam ea est in qua velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi consentaneum videtur. Partes crassiores & minus fluidæ, nisi graves sint in centrum, circumferentiam petent; & verisimile est quod, etiamsi demonstrationum gratia hypothesin talem initio sectionis hujus proposuerim, ut resistentia velocitati proportionalis esset, tamen resistentia in minori sit ratione quam ea velocitatis est. Quo concesso, tempora periodica partium vorticis erunt in majori quam duplicata ratione distantiarum ab ipsius centro. Quod si vortices (uti aliquorum est opinio) celerius moveantur prope centrum, dein tardius usque ad certum limitem, tum denuo celerius juxta circumferentiam; certe nec ratio sesquiplicata neque alia quævis certa ac determinata obtinere potest. Viderint itaque philosophi quo pacto phænomenon illud rationis sesquiplicatæ per vortices explicari possit.

PROPOSITIO LIII. THEOREMA XLI.

Corpora, quæ in vortice delata in orbem redeunt, ejusdem sunt densitatis cum vortice, & eadem lege cum ipsius partibus quoad velocitatem & cursus determinationem moventur.

Nam si vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ seu puncta physica datum servant situm inter se, congelari supponatur: hæc, quoniam neque quoad densitatem suam, neque quoad vim insitam aut figuram suam mutatur, movebitur eadem lege ac prius: & contra, si vorticis pars congelata & solida ejusdem sit densitatis cum reliquo vortice, & resolvatur in fluidum; movebitur hæc eadem lege ac prius, nisi quatenus ipsius particulæ jam fluidæ factæ moveantur

inter-

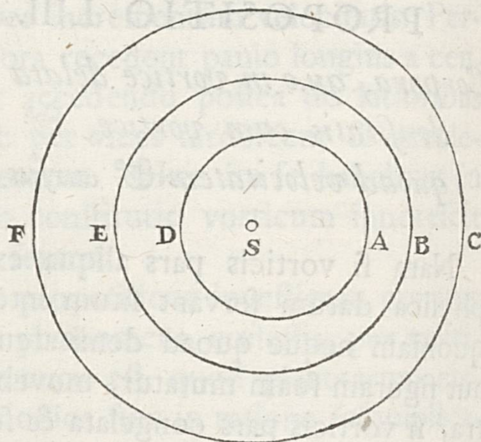
inter ſe. Negligatur igitur motus particularum inter ſe, tanquam ad totius motum progreſſivum nil ſpectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum vorticis partium a centro æqualiter diſtantium, propterea quod ſolidum in fluidum reſolutum fit pars vorticis cæteris partibus conſimilis. Ergo ſolidum, ſi ſit ejuſdem denſitatis cum materia vorticis, eodem motu cum ipſius partibus movebitur, in materia proxime ambiente relative quieſcens. Sin denſius ſit, jam magis conabitur recedere a centro vorticis quam prius; ideoque vorticis vim illam, qua prius in orbita ſua tanquam in æquilibrio conſtitutum retinebatur, jam ſuperans, recedet a centro & revolvendo deſcribet ſpiralem, non amplius in eundem orbem rediens. Et eodem argumento ſi rarius ſit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem orbem niſi ſit ejuſdem denſitatis cum fluido. Eo autem in caſu oſtenſum eſt, quod revolveretur eadem lege cum partibus fluidi a centro vorticis æqualiter diſtantibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo ſolidum quod in vortice revolvitur & in eundem orbem ſemper redit, relative quieſcit in fluido cui innatat.

Corol. 2. Et ſi vortex ſit quoad denſitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet a centro vorticis diſtantiam revolvi poteſt.

Scholium.

Hinc liquet planetas a vorticibus corporeis non deferri. Nam planetæ ſecundum hypotheſin *Copernicæam* circa ſolem delati revolvuntur in ellipſibus umbilicum habentibus in ſole, & radiis ad ſolem ductis areas deſcribunt temporibus proportionales. At partes vorticis tali motu revolvi nequeunt. Deſignent *AD*, *BE*, *CF*, orbes tres circa ſolem *S* deſcriptos, quorum extimus *CF* circulus ſit ſoli concentricus, & interiorum duorum aphelia ſint *A*, *B* & perihelia *D*, *E*. Ergo corpus quod revolvitur in orbe *CF*, radio ad ſolem ducto areas temporibus proportionales



portionales describendo, movebitur uniformi cum motu. Corpus autem, quod revolvitur in orbe *BE*, tardius movebitur in aphelio *B* & velocius in perihelio *E*, secundum leges astronomicas; cum tamen secundum leges mechanicas materia vorticis in spatio angustiore inter *A* & *C* velocius moveri debeat quam in spatio latiore inter *D* & *F*; id est, in aphelio velocius quam in perihelio. Quæ duo repugnant inter se. Sic in principio signi virginis, ubi aphelium martis jam versatur, distantia inter orbes martis & veneris est ad distantiam eorundem orbium in principio signi piscium ut ternarius ad binarium circiter, & propterea materia vorticis inter orbes illos in principio piscium debet esse velocior quam in principio virginis in ratione ternarii ad binarium. Nam quo angustius est spatium per quod eadem materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore transit, eo majori cum velocitate transire debet. Igitur si terra in hac materia cœlesti relative quiescens ab ea deferretur, & una circa solem revolveretur, foret hujus velocitas in principio piscium ad ejusdem velocitatem in principio virginis in ratione sesquialtera. Unde solis motus diurnus apparens in principio virginis major esset quam minutorum primorum septuaginta, & in principio piscium minor quam minutorum quadraginta & octo: cum tamen (experientia teste) apparens iste solis motus major sit in principio piscium quam in principio virginis, & propterea terra velocior in principio virginis quam in principio piscium. Itaque hypothesis vorticum cum phænomenis astronomicis omnino pugnat, & non tam ad explicandos quam ad perturbandos motus cœlestes conducit. Quomodo vero motus isti in spatiis liberis sine vorticibus peraguntur intelligi potest ex libro primo, & in mundi systemate jam plenius docebitur.

DE MUNDI SYSTEMATE.

LIBER TERTIUS.

IN libris præcedentibus principia philosophiæ tradidi, non tamen philosophica sed mathematica tantum, ex quibus videlicet in rebus philosophicis disputari possit. Hæc sunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad philosophiam maxime spectant. Eadem tamen, ne sterilia videantur, illustravi scholiis quibusdam philosophicis, ea tractans quæ generalia sunt, & in quibus philosophia maxime fundari videtur, uti corporum densitatem & resistentiam, spatia corporibus vacua, motumque lucis & sonorum. Superest ut ex iisdem principiis doceamus constitutionem systematis mundani. De hoc argumento composueram librum tertium methodo populari, ut a pluribus legeretur. Sed quibus principia posita satis intellecta non fuerint, ii vim consequentiarum minime percipient, neque præjudicia deponent, quibus a multis retro annis insueverunt: & propterea ne res in disputationes trahatur, summam libri illius transtuli in propositiones, more mathematico, ut ab iis solis legantur qui principia prius evolverint. Veruntamen quoniam propositiones ibi quam plurimæ occurrant, quæ lectoribus etiam mathematice doctis moram nimiam injicere possint, auctor esse nolo ut quisquam eas omnes evolvat; suffecerit siquis definitiones, leges motuum & sectiones tres priores libri primi sedulo legat, dein transeat ad hunc librum de mundi systemate, & reliquas librorum priorum propositiones hic citatas pro lubitu consulat.

REGULÆ PHILOSOPHANDI.

REGULA I.

Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quæ & veræ sint & earum phænomenis explicandis sufficiant.

Dicunt utique philosophi: Natura nihil agit frustra, & frustra fit per plura quod fieri potest per pauciora. Natura enim simplex est & rerum causis superfluis non luxuriat.

REGULA II.

Ideoque effectuum naturalium ejusdem generis eædem assignandæ sunt causæ, quatenus fieri potest.

Uti respirationis in homine & in bestia; descensus lapidum in *Europa* & in *America*; lucis in igne culinari & in sole; reflexionis lucis in terra & in planetis.

REGULA III.

Qualitates corporum quæ intendi & remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta instituere licet, pro qualitatibus corporum universorum habendæ sunt.

Nam qualitates corporum non nisi per experimenta innotescunt, ideoque generales statuendæ sunt quotquot cum experimentis ge-

De Mundi Systemate

neraliter quadrant; & quæ minui non possunt, non possunt auferri. Certe contra experimentorum tenorem somnia temere confingenda non sunt, nec a naturæ analogia recedendum est, cum ea simplex esse soleat & sibi semper consona. Extensio corporum non nisi per sensus innotescit, nec in omnibus sentitur: sed quia sensibilibus omnibus competit, de universis affirmatur. Corpora plura dura esse experimur. Oritur autem durities totius a duritie partium, & inde non horum tantum corporum quæ sentiuntur, sed aliorum etiam omnium particulas indivisas esse duras merito concludimus. Corpora omnia impenetrabilia esse non ratione sed sensu colligimus. Quæ tractamus, impenetrabilia inveniuntur, & inde concludimus impenetrabilitatem esse proprietatem corporum universorum. Corpora omnia mobilia esse, & viribus quibusdam (quas vires inertiæ vocamus) perseverare in motu vel quiete, ex hisce corporum visorum proprietatibus colligimus. Extensio, durities, impenetrabilitas, mobilitas & vis inertiæ totius oritur ab extensione, duritie, impenetrabilitate, mobilitate & viribus inertiæ partium: & inde concludimus omnes omnium corporum partes minimas extendi & duras esse & impenetrabiles & mobiles & viribus inertiæ praeditas. Et hoc est fundamentum philosophiæ totius. Porro corporum partes divisas & sibi mutuo contiguas ab invicem separari posse, ex phænomenis novimus, & partes indivisas in partes minores ratione distingui posse ex mathematica certum est. Utrum vero partes illæ distinctæ & nondum divisæ per vires naturæ dividi & ab invicem separari possint, incertum est. At si vel unico constaret experimento quod particula aliqua indivisa, frangendo corpus durum & solidum, divisionem pateretur: concluderemus vi hujus regulæ, quod non solum partes divisæ separabiles essent, sed etiam quod indivisæ in infinitum dividi possent.

Denique si corpora omnia in circuitu terræ gravia esse in terram, idque pro quantitate materiæ in singulis, & lunam gravem esse in terram pro quantitate materiæ suæ, & vicissim mare nostrum grave esse in lunam, & planetas omnes graves esse in se mutuo, & cometarum similem esse gravitatem in solem, per experimenta & observationes astronomicas universaliter constet: dicendum erit per hanc regulam quod corpora omnia in se mutuo gravitant. Nam & fortius erit argumentum ex phænomenis de gravitate universali, quam

de

de corporum impenetrabilitate: de qua utique in corporibus cœlestibus nullum experimentum, nullam prorsus observationem habemus. Attamen gravitatem corporibus essentialem esse minime affirmo. Per vim insitam intelligo solam vim inertiæ. Hæc immutabilis est. Gravitas recedendo a terra, diminuitur.

REGULA IV.

In philosophia experimentali, propositiones ex phænomenis per inductionem collectæ, non obstantibus contrariis hypothesibus, pro veris aut accurate aut quamproxime haberi debent, donec alia occurrerint phænomena, per quæ aut accuratiores reddantur aut exceptionibus obnoxiæ.

Hoc fieri debet ne argumentum inductionis tollatur per hypotheses.

PHÆNO-

De Mundi Systemate

PHÆNOMENA.

PHÆNOMENON I.

Planetas circumjoviales, radiis ad centrum jovis ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquiplicata distantiarum ab ipsius centro.

Constat ex observationibus astronomicis. Orbes horum planetarum non differunt sensibiliter a circulis jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora vero periodica esse in sesquiplicata ratione semidiametrorum orbium consentiunt astronomi ; & idem ex tabula sequente manifestum est.

Satellitum jovialium tempora periodica.

$1^d. 18^h. 27'. 34''.$ $3^d\ 13^h. 13'. 42''.$ $7^d. 3^h. 42'. 36''.$ $16^d. 16^h. 32'. 9''.$

Distantiæ satellitum a centro jovis.

Ex observationibus	1	2	3	4	
Borelli	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	Semidiam. Jovis
Townlei *per microm.*	5,52	8,78	13,47	24,72	
Cassini *per telescop.*	5	8	13	23	
Cassini *per eclips. satell.*	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	
Ex temporibus periodicis.	5,667	9,017	14,384	25,299	

Elongationes satellitum jovis & diametrum ejus D. *Pound* micrometris optimis determinavit ut sequitur. Elongatio maxima heliocentrica satellitis quarti a centro jovis micrometro in tubo quindecim pedes longo capta fuit, & prodiit in mediocri jovis a terra distantia 8′. 16″ circiter. Ea satellitis tertii micrometro in telescopio pedes

pedes 123 longo capta fuit, & prodiit in eadem jovis a terra diſtantia $4'. 42''$. Elongationes maximæ reliquorum ſatellitum in eadem jovis a terra diſtantia ex temporibus periodicis prodeunt $2'. 56''. 47'''$, & $1'. 51''. 6'''$.

Diameter jovis micrometro in teleſcopio pedes 123 longo ſæpius capta fuit, & ad mediocrem jovis a ſole vel terra diſtantiam reducta, ſemper minor prodiit quam $40''$, nunquam minor quam $38''$, ſæpius $39''$. In teleſcopiis brevioribus hæc diameter eſt $40''$ vel $41''$. Nam lux jovis per inæqualem refrangibilitatem nonnihil dilatatur, & hæc dilatatio minorem habet rationem ad diametrum jovis in longioribus & perfectoribus teleſcopiis quam in brevioribus & minus perfectis. Tempora quibus ſatellites duo, primus ac tertius, tranſibant per corpus jovis, ab initio ingreſſus ad initium exitus, & ab ingreſſu completo ad exitum completum, obſervata ſunt ope teleſcopii ejuſdem longioris. Et diameter jovis in mediocri ejus a terra diſtantia prodiit per tranſitum primi ſatellitis $37\frac{1}{8}''$, & per tranſitum tertii $37\frac{3}{8}''$. Tempus etiam quo umbra primi ſatellitis tranſiit per corpus jovis obſervatum fuit, & inde diameter jovis in mediocri ejus a terra diſtantia prodiit $37''$ circiter. Aſſumamus diametrum ejus eſſe $37\frac{1}{4}''$ quamproxime; & elongationes maximæ ſatellitis primi, ſecundi, tertii, & quarti æquales erunt ſemidiametris jovis 5,965, 9,494, 15,141, & 26,63 reſpective.

PHÆNOMENON II.

Planetas circumſaturnios, radiis ad ſaturnum ductis, areas deſcribere temporibus proportionales, & eorum tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum ab ipſius centro.

Caſſinus utique ex obſervationibus ſuis diſtantias eorum a centro ſaturni & periodica tempora hujuſmodi eſſe ſtatuit.

Satellitum ſaturniorum tempora periodica.

$1^d. 21^h. 18'. 27''$. $2^d. 17^h. 41'. 22''$. $4^d. 12^h. 25'. 12''$. $15^d. 22^h. 41'. 14''$. $79^d. 7^h. 48'. 00''$.

Diſtantiæ

Diſtantiæ ſatellitum a centro ſaturni in ſemidiametris annuli.

Ex obſervationibus	$1\frac{19}{20}$.	$2\frac{1}{2}$.	$3\frac{1}{2}$.	8.	24.
Ex temporibus periodicis.	1,93.	2,47.	3,45.	8.	23,35.

Quarti ſatellitis elongatio maxima a centro ſaturni ex obſervationibus colligi ſolet eſſe ſemidiametrorum octo quamproxime. At elongatio maxima ſatellitis hujus a centro ſaturni, micrometro optimo in teleſcopio Hugeniano pedes 123 longo capta, prodiit ſemidiametrorum octo cum ſeptem decimis partibus ſemidiametri. Et ex hac obſervatione & temporibus periodicis, diſtantiæ ſatellitum a centro ſaturni in ſemidiametris annuli ſunt 2,1. 2,69. 3,75. 8,7. & 25,35. Saturni diameter in eodem teleſcopio erat ad diametrum annuli ut 3 ad 7, & diameter annuli diebus Maii 28 & 29 anni 1719. prodiit 43″. Et inde diameter annuli in mediocri ſaturni a terra diſtantia eſt 42″, & diameter ſaturni 18″. Hæc ita ſunt in teleſcopiis longiſſimis & optimis, propterea quod magnitudines apparentes corporum cœleſtium in longioribus teleſcopiis majorem habeant proportionem ad dilatationem lucis in terminis illorum corporum quam in brevioribus. Si rejiciatur lux omnis erratica, manebit diameter ſaturni haud major quam 16″.

PHÆNOMENON III.

Planetas quinque primarios mercurium, venerem, martem, jovem & ſaturnum orbibus ſuis ſolem cingere.

Mercurium & venerem circa ſolem revolvi ex eorum phaſibus lunaribus demonſtratur. Plena facie lucentes ultra ſolem ſiti ſunt; dimidiata e regione ſolis; falcata cis ſolem, per diſcum ejus ad modum macularum nonnunquam tranſeuntes. Ex martis quoque plena facie prope ſolis conjunctionem, & gibboſa in quadraturis, certum eſt, quod is ſolem ambit. De jove etiam & ſaturno idem ex eorum phaſibus ſemper plenis demonſtratur: hos enim luce a ſole mutuata ſplendere ex umbris ſatellitum in ipſos projectis manifeſtum eſt.

PHÆ-

PHÆNOMENON IV.

Planetarum quinque primariorum, & vel ſolis circa terram vel terræ circa ſolem tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicata mediocrium diſtantiarum a ſole.

Hæc a *Keplero* inventa ratio in confeſſo eſt apud omnes. Eadem utique ſunt tempora periodica, eædemque orbium dimenſiones, ſive ſol circa terram, ſive terra circa ſolem revolvatur. Ac de menſura quidem temporum periodicorum convenit inter aſtronomos univerſos. Magnitudines autem orbium *Keplerus* & *Bullialdus* omnium diligentiſſime ex obſervationibus determinaverunt: & diſtantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis reſpondent, non differunt ſenſibiliter a diſtantiis quas illi invenerunt, ſuntque inter ipſas ut plurimum intermediæ; uti in tabula ſequente videre licet.

Planetarum ac telluris tempora periodica circa ſolem reſpectu fixarum, in diebus & partibus decimalibus diei.

♄	♃	♂	♁	♀	☿
10759,275.	4332,514.	686,9785.	365,2565.	224,6176.	87,9692.

Planetarum ac telluris diſtantiæ mediocres a ſole.

	♄	♃	♂	♁	♀	☿
Secundum *Keplerum*	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Secundum *Bullialdum*	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Secundum tempora periodica	954006.	520096.	152369.	100000.	72333.	38710.

De diſtantiis mercurii & veneris a ſole diſputandi non eſt locus, cum hæ per eorum elongationes a ſole determinentur. De diſtantiis etiam ſuperiorum planetarum a ſole tollitur omnis diſputatio per eclipſes ſatellitum jovis. Etenim per eclipſes illas determinatur poſitio umbræ quam jupiter projicit, & eo nomine habetur jovis longitudo heliocentrica. Ex longitudinibus autem heliocentrica & geocentrica inter ſe collatis determinatur diſtantia jovis.

PHÆNOMENON V.

Planetas primarios, radiis ad terram ductis, areas describere temporibus minime proportionales; at radiis ad solem ductis, areas temporibus proportionales percurrere.

Nam respectu terræ nunc progrediuntur, nunc stationarii sunt, nunc etiam regrediuntur: At solis respectu semper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, sed paulo celerius tamen in periheliis ac tardius in apheliis, sic ut arearum æquabilis sit descriptio. Propositio est astronomis notissima, & in jove apprime demonstratur per eclipses satellitum, quibus eclipsibus heliocentricas planetæ hujus longitudines & distantias a sole determinari diximus.

PHÆNOMENON VI.

Lunam radio ad centrum terræ ducto, aream tempori proportionalem describere.

Patet ex lunæ motu apparente cum ipsius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus lunaris aliquantulum a vi solis, sed errorum insensibiles minutias in hisce phænomenis negligo.

PROPO-

PROPOSITIONES.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Vires, quibus planetæ circumjoviales perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis & in orbibus suis retinentur, respicere centrum jovis, & esse reciproce ut quadrata distantiarum locorum ab eodem centro.

PAtet pars prior propositionis per phænomenon primum, & propositionem secundam vel tertiam libri primi: & pars posterior per phænomenon primum, & corollarium sextum propositionis quartæ ejusdem libri.

Idem intellige de planetis qui saturnum comitantur, per phænomenon secundum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Vires, quibus planetæ primarii perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in orbibus suis retinentur, respicere solem, & esse reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro.

Patet pars prior propositionis per phænomenon quintum, & propositionem secundam libri primi: & pars posterior per phænomenon quartum, & propositionem quartam ejusdem libri. Accuratissime autem demonstratur hæc pars propositionis per quietem apheliorum. Nam aberratio quam minima a ratione duplicata (per corol. 1. prop. XLV. lib. 1.) motum apsidum in singulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.

De Mundi Systemate

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Vim, qua luna retinetur in orbe suo, respicere terram, & esse reciproce ut quadratum distantiæ locorum ab ipsius centro.

Patet assertionis pars prior per phænomenon sextum, & propositionem secundam vel tertiam libri primi: & pars posterior per motum tardissimum lunaris apogæi. Nam motus ille, qui singulis revolutionibus est graduum tantum trium & minutorum trium in consequentia, contemni potest. Patet enim (per corol. 1. prop. XLV. lib. 1.) quod si distantia lunæ a centro terræ sit ad semidiametrum terræ ut D ad 1; vis a qua motus talis oriatur sit reciproce ut $D^{2\frac{4}{243}}$, id est, reciproce ut ea ipsius D dignitas cujus index est $2\frac{4}{243}$, hoc est, in ratione distantiæ paulo majore quam duplicata inverse, sed quæ partibus $59\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit. Oritur vero ab actione solis (uti posthac dicetur) & propterea hic negligendus est. Actio solis quatenus lunam distrahit a terra, est ut distantia lunæ a terra quamproxime; ideoque (per ea quæ dicuntur in corol. 2. prop. XLV. lib. 1.) est ad lunæ vim centripetam ut 2 ad 357,45 circiter, seu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Et neglecta solis vi tantilla, vis reliqua qua luna retinetur in orbe erit reciproce ut D^2. Id quod etiam plenius constabit conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in propositione sequente.

Corol. Si vis centripeta mediocris qua luna retinetur in orbe augeatur primo in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, deinde etiam in ratione duplicata semidiametri terræ ad mediocrem distantiam centri lunæ a centro terræ: habebitur vis centripeta lunaris ad superficiem terræ, posito quod vis illa descendendo ad superficiem terræ perpetuo augeatur in reciproca altitudinis ratione duplicata.

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Lunam gravitare in terram, & vi gravitatis retrahi semper a motu rectilineo, & in orbe suo retineri.

Lunæ distantia mediocris a terra in syzygiis est semidiametrorum terrestrium, secundum *Ptolemæum* & plerosque astronomorum 59, secundum

ſecundum *Vendelinum* & *Hugenium* 60, ſecundum *Copernicum* $60\frac{1}{3}$, ſecundum *Streetum* $60\frac{2}{5}$, & ſecundum *Tychonem* $56\frac{1}{2}$. Aſt *Tycho*, & quotquot ejus tabulas refractionum ſequuntur, conſtituendo refractiones ſolis & lunæ (omnino contra naturam lucis) majores quam fixarum, idque ſcrupulis quaſi quatuor vel quinque, auxerunt parallaxin lunæ ſcrupulis totidem, hoc eſt, quaſi duodecima vel decima quinta parte totius parallaxeos. Corrigatur iſte error, & diſtantia evadet quaſi $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium, fere ut ab aliis aſſignatum eſt. Aſſumamus diſtantiam mediocrem ſexaginta ſemidiametrorum in ſyzygiis; & lunarem periodum reſpectu fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab aſtronomis ſtatuitur; atque ambitum terræ eſſe pedum Pariſienſium 123249600, uti a *Gallis* menſurantibus definitum eſt: & ſi luna motu omni privari fingatur ac dimitti, ut urgente vi illa omni, qua (per corol prop. III.) in orbe ſuo retinetur, deſcendat in terram; hæc ſpatio minuti unius primi cadendo deſcribet pedes Pariſienſes $15\frac{1}{12}$. Colligitur hoc ex calculo vel per propoſitionem XXXVI. libri primi, vel (quod eodem recidit) per corollarium nonum propoſitionis quartæ ejuſdem libri, confecto. Nam arcus illius quem luna tempore minuti unius primi, medio ſuo motu, ad diſtantiam ſexaginta ſemidiametrorum terreſtrium deſcribat, ſinus verſus eſt pedum Pariſienſium $15\frac{1}{12}$ circiter, vel magis accurate pedum 15. dig. 1. & lin. $1\frac{4}{9}$. Unde cum vis illa accedendo ad terram augeatur in duplicata diſtantiæ ratione inverſa, ideoque ad ſuperficiem terræ major ſit partibus 60×60 quam ad lunam; corpus vi illa in regionibus noſtris cadendo, deſcribere deberet ſpatio minuti unius primi pedes Pariſienſes $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$, & ſpatio minuti unius ſecundi pedes $15\frac{1}{12}$, vel magis accurate pedes 15 dig. 1. & lin. $1\frac{4}{9}$. Et eadem vi gravia revera deſcendunt in terram. Nam penduli, in latitudine Lutetiæ Pariſiorum ad ſingula minuta ſecunda oſcillantis, longitudo eſt pedum trium Pariſienſium & linearum $8\frac{1}{2}$, ut obſervavit *Hugenius*. Et altitudo, quam grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribit, eſt ad dimidiam longitudinem penduli hujus in duplicata ratione circumferentiæ circuli ad diametrum ejus (ut indicavit etiam *Hugenius*) ideoque eſt pedum Pariſienſium 15. dig. 1. lin. $1\frac{7}{9}$. Et propterea vis qua luna in orbe ſuo retinetur, ſi deſcendatur in ſuperficiem terræ, æqualis evadit vi gravitatis apud nos, ideoque (per reg. I.

&. II.) est illa ipsa vis quam nos gravitatem dicere solemus. Nam si gravitas ab ea diversa esset, corpora viribus utrisque conjunctis terram petendo duplo velocius descenderent, & spatio minuti unius secundi cadendo describerent pedes Parisienses $30\frac{1}{6}$: omnino contra experientiam.

Calculus hic fundatur in hypothesi quod terra quiescit. Nam si terra & luna moveantur circum solem, & interea quoque circum commune gravitatis centrum revolvantur; manente lege gravitatis distantia centrorum lunæ ac terræ ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum terrestrium circiter; uti computationem ineunti patebit. Computatio autem iniri potest per prop. LX. lib. I.

Scholium.

Demonstratio propositionis sic fusius explicari potest. Si lunæ plures circum terram revolverentur, perinde ut fit in systemate saturni vel jovis: harum tempora periodica (per argumentum inductionis) observarent legem planetarum a *Keplero* detectam, & propterea harum vires centripetæ forent reciproce ut quadrata distantiarum a centro terræ, per prop. I. hujus. Et si earum infima esset parva, & vertices altissimorum montium prope tangeret: hujus vis centripeta qua retineretur in orbe, gravitates corporum in verticibus illorum montium (per computationem præcedentem) æquaret quamproxime, efficeretque ut eadem lunula, si motu omni quo pergit in orbe suo privaretur, defectu vis centrifugæ qua in orbe permanserat, descenderet in terram, idque eadem cum velocitate qua gravia cadunt in illorum montium verticibus, propter æqualitatem virium quibus descendunt. Et si vis illa qua lunula illa infima descendit, diversa esset a gravitate, & lunula illa etiam gravis esset in terram more corporum in verticibus montium: eadem lunula vi utraque conjuncta duplo velocius descenderet. Quare cum vires utræque, & hæ corporum gravium, & illæ lunarum, centrum terræ respiciant, & sint inter se similes & æquales, eædem (per reg. I. & II.) eandem habebunt causam. Et propterea vis illa, qua luna retinetur in orbe suo, ea ipsa erit quam nos gravitatem dicere solemus: idque maxime ne lunula in vertice montis vel gravitate careat, vel duplo velocius cadat quam corpora gravia solent cadere.

PROPO-

PROPOSITIO V. THEOREMA V.

Planetas circumjoviales gravitare in jovem, circumsaturnios in saturnum, & circumsolares in solem, & vi gravitatis suæ retrahi semper a motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retineri.

Nam revolutiones planetarum circumjovialium circa jovem, circumsaturniorum circa saturnum, & mercurii ac veneris reliquorumque circumsolarium circa solem sunt phænomena ejusdem generis cum revolutione lunæ circa terram; & propterea (per reg. II.) a caussis ejusdem generis dependent: præsertim cum demonstratum sit quod vires, a quibus revolutiones illæ dependent, respiciant centra jovis, saturni ac solis, & recedendo a jove, saturno & sole decrescant eadem ratione ac lege, qua vis gravitatis decrescit in recessu a terra.

Corol. 1. Gravitas igitur datur in planetas universos. Nam venerem, mercurium, cæterosque esse corpora ejusdem generis cum jove & saturno, nemo dubitat. Et cum attractio omnis per motus legem tertiam mutua sit, jupiter in satellites suos omnes, saturnus in suos, terraque in lunam, & sol in planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. Gravitatem, quæ planetam unumquemque respicit, esse reciproce ut quadratum distantiæ locorum ab ipsius centro.

Corol. 3. Graves sunt planetæ omnes in se mutuo per corol. 1. & 2. Et hinc jupiter & saturnus prope conjunctionem se invicem attrahendo, sensibiliter perturbant motus mutuos, sol perturbat motus lunares, sol & luna perturbant mare nostrum, ut in sequentibus explicabitur.

Scholium.

Hactenus vim illam qua corpora cœlestia in orbibus suis retinentur centripetam appellavimus. Eandem jam gravitatem esse constat, & propterea gravitatem in posterum vocabimus. Nam causa vis illius centripetæ, qua luna retinetur in orbe, extendi debet ad omnes planetas per reg. I, II. & IV.

PROPO-

PROPOSITIO VI. THEOREMA VI.

Corpora omnia in planetas ſingulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis planetam, paribus diſtantiis a centro planetæ, proportionalia eſſe quantitati materiæ in ſingulis.

Deſcenſus gravium omnium in terram (dempta ſaltem inæquali retardatione quæ ex aëris perexigua reſiſtentia oritur) æqualibus temporibus fieri, jamdudum obſervarunt alii; & accuratiſſime quidem notare licet æqualitatem temporum in pendulis. Rem tentavi in auro, argento, plumbo, vitro, arena, ſale communi, ligno, aqua, tritico. Comparabam pyxides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam ligno, & idem auri pondus ſuſpendebam (quam potui exacte) in alterius centro oſcillationis. Pyxides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes, conſtituebant pendula, quoad pondus, figuram, & aëris reſiſtentiam omnino paria: & paribus oſcillationibus, juxta poſitæ, ibant una & redibant diutiſſime. Proinde copia materiæ in auro (per corol. 1. & 6. prop. xxiv. lib. II.) erat ad copiam materiæ in ligno, ut vis motricis actio in totum aurum ad ejuſdem actionem in totum lignum; hoc eſt, ut pondus ad pondus. Et ſic in cæteris. In corporibus ejuſdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor eſſet quam pars milleſima materiæ totius, his experimentis manifeſto deprehendi potuit. Jam vero naturam gravitatis in planetas eandem eſſe atque in terram, non eſt dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc terreſtria ad uſque orbem lunæ, & una cum luna motu omni privata demitti, ut in terram ſimul cadant; & per jam ante oſtenſa certum eſt quod temporibus æqualibus deſcribent æqualia ſpatia cum luna, ideoque quod ſunt ad quantitatem materiæ in luna, ut pondera ſua ad ipſius pondus. Porro quoniam ſatellites jovis temporibus revolvuntur quæ ſunt in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum a centro jovis, erunt eorum gravitates acceleratrices in jovem reciproce ut quadrata diſtantiarum a centro jovis; & propterea in æqualibus a jove diſtantiis, eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo, deſcriberent æqualia ſpatia; perinde

ut

ut ſit in gravibus in hac terra noſtra. Et eodem argumento planetæ circumſolares, ab æqualibus a ſole diſtantiis demiſſi, deſcenſu ſuo in ſolem æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcriberent. Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, ſunt ut corpora; hoc eſt, pondera ut quantitates materiæ in planetis. Porro jovis & ejus ſatellitum pondera in ſolem proportionalia eſſe quantitatibus materiæ eorum patet ex motu ſatellitum quam maxime regulari; per corol 3. prop. LXV. lib. I. Nam ſi horum aliqui magis traherentur in ſolem, pro quantitate materiæ ſuæ, quam cæteri: motus ſatellitum (per corol. 2. prop. LXV. lib. I.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si, paribus a ſole diſtantiis, ſatelles aliquis gravior eſſet in ſolem pro quantitate materiæ ſuæ, quam jupiter pro quantitate materiæ ſuæ, in ratione quacunque data, puta *d* ad *e*: diſtantia inter centrum ſolis & centrum orbis ſatellitis, major ſemper foret quam diſtantia inter centrum ſolis & centrum jovis in ratione ſubduplicata quam proxime; uti calculo quodam inito inveni. Et ſi ſatelles minus gravis eſſet in ſolem in ratione illa *d* ad *e*, diſtantia centri orbis ſatellitis a ſole minor foret quam diſtantia centri jovis a ſole in ratione illa ſubduplicata. Ideoque ſi in æqualibus a ſole diſtantiis, gravitas acceleratrix ſatellitis cujuſvis in ſolem major eſſet vel minor quam gravitas acceleratrix jovis in ſolem, parte tantum milleſima gravitatis totius; foret diſtantia centri orbis ſatellitis a ſole major vel minor quam diſtantia jovis a ſole parte $\frac{1}{2000}$ diſtantiæ totius, id eſt, parte quinta diſtantiæ ſatellitis extimi a centro jovis: quæ quidem orbis eccentricitas foret valde ſenſibilis. Sed orbes ſatellitum ſunt jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices jovis & ſatellitum in ſolem æquantur inter ſe. Et eodem argumento pondera ſaturni & comitum ejus in ſolem, in æqualibus a ſole diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in ipſis: & pondera lunæ ac terræ in ſolem vel nulla ſunt, vel earum maſſis accurate proportionalia. Aliqua autem ſunt per corol. I. & 3. prop. V.

Quinetiam pondera partium ſingularum planetæ cujuſque in alium quemcunque ſunt inter ſe ut materia in partibus ſingulis. Nam ſi partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quam pro quantitate materiæ: planeta totus, pro genere partium quibus maximæ abundet, gravitaret magis vel minus quam pro quantitate materiæ totius.

De Mundi Systemate

Sed nec refert utrum partes illæ externæ ſint vel internæ. Nam ſi verbi gratia corpora terreſtria, quæ apud nos ſunt, in orbem lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore lunæ: ſi horum pondera eſſent ad pondera partium externarum lunæ ut quantitates materiæ in iiſdem, ad pondera vero partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam ſupra oſtenſum eſt.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam ſi cum formis variari poſſent; forent majora vel minora, pro varietate formarum, in æquali materia: omnino contra experientiam.

Corol. 2. Corpora univerſa, quæ circa terram ſunt, gravia ſunt in terram; & pondera omnium, quæ æqualiter a centro terræ diſtant, ſunt ut quantitates materiæ in iiſdem. Hæc eſt qualitas omnium in quibus experimenta inſtituere licet, & propterea per reg. III. de univerſis affirmanda eſt. Si æther aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omnino deſtitueretur, vel pro quantitate materiæ ſuæ minus gravitaret: quoniam id (ex mente *Ariſtotelis*, *Carteſii* & aliorum) non differt ab aliis corporibus niſi in forma materiæ, poſſet idem per mutationem formæ gradatim transmutari in corpus ejuſdem conditionis cum iis, quæ pro quantitate materiæ quam maxime gravitant, & viciſſim corpora maxime gravia, formam illius gradatim induendo, poſſent gravitatem ſuam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent a formis corporum, poſſentque cum formis variari, contra quam probatum eſt in corollario ſuperiore.

Corol. 3. Spatia omnia non ſunt æqualiter plena. Nam ſi ſpatia omnia æqualiter plena eſſent, gravitas ſpecifica fluidi quo regio aëris impleretur, ob ſummam denſitatem materiæ, nil cederet gravitati ſpecificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuſcunque denſiſſimi; & propterea nec aurum neque aliud quodcunque corpus in aëre deſcendere poſſet. Nam corpora in fluidis, niſi ſpecifice graviora ſint, minime deſcendunt. Quod ſi quantitas materiæ in ſpatio dato per rarefactionem quamcunque diminui poſſit, quidni diminui poſſit in infinitum?

Corol. 4. Si omnes omnium corporum particulæ ſolidæ ſint ejuſdem denſitatis, neque ſine poris rarefieri poſſint, vacuum datur.

Ejuſdem

Ejusdem densitatis esse dico, quarum vires inertiæ sunt ut magnitudines.

Corol. 5. Vis gravitatis diversi est generis a vi magnetica. Nam attractio magnetica non est ut materia attracta. Corpora aliqua magis trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Et vis magnetica in uno & eodem corpore intendi potest & remitti, estque nonnunquam longe major pro quantitate materiæ quam vis gravitatis, & in recessu a magnete descrescit in ratione distantiæ non duplicata, sed fere triplicata, quantum ex crassis quibusdam observationibus animadvertere potui.

PROPOSITIO VII. THEOREMA VII.

Gravitatem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitati materiæ in singulis.

Planetas omnes in se mutuo graves esse jam ante probavimus, ut & gravitatem in unumquemque seorsim spectatum esse reciproce ut quadratum distantiæ locorum a centro planetæ. Et inde consequens est (per prop. LXIX. lib. I. & ejus corollaria) gravitatem in omnes proportionalem esse materiæ in iisdem.

Porro cum planetæ cujusvis *A* partes omnes graves sint in planetam quemvis *B*, & gravitas partis cujusque sit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius, & actioni omni reactio (per motus legem tertiam) æqualis sit ; planeta *B* in partes omnes planetæ *A* vicissim gravitabit, & erit gravitas sua in partem unamquamque ad gravitatem suam in totum, ut materia partis ad materiam totius. *Q. E. D.*

Corol. I. Oritur igitur & componitur gravitas in planetam totum ex gravitate in partes singulas. Cujus rei exempla habemus in attractionibus magneticis & electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes singulas. Res intelligetur in gravitate, concipiendo planetas plures minores in unum globum coire & planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. Siquis objiciat quod corpora omnia, quæ apud nos sunt, hac lege gravitare deberent in se mutuo, cum tamen ejusmodi gravitas neutiquam sentiatur: respondeo quod

De Mundi Systemate

gravitas in hæc corpora, cum ſit ad gravitatem in terram totam ut ſunt hæc corpora ad terram totam, longe minor eſt quam quæ ſentiri poſſit.

Corol. 2. Gravitatio in ſingulas corporis particulas æquales eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum a particulis. Patet per corol 3. prop. LXXIV. lib. I.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VIII.

Si globorum duorum in ſe mutuo gravitantium materia undique in regionibus, quæ a centris æqualiter diſtant, homogenea ſit: erit pondus globi alterutrius in alterum reciproce ut quadratum diſtantiæ inter centra.

Poſtquam inveniſſem gravitatem in planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & eſſe in partes ſingulas reciproce proportionalem quadratis diſtantiarum a partibus; dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accurate in vi tota ex viribus pluribus compoſita, an vero quam proxime. Nam fieri poſſet ut proportio, quæ in majoribus diſtantiis ſatis accurate obtineret, prope ſuperficiem planetæ ob inæquales particularum diſtantias & ſitus diſſimiles, notabiliter erraret. Tandem vero, per prop. LXXV. & LXXVI. libri primi & ipſarum corollaria, intellexi veritatem propoſitionis de qua hic agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri & inter ſe comparari poſſunt pondera corporum in diverſos planetas. Nam pondera corporum æqualium circum planetas in circulis revolventium ſunt (per corol. 2. prop. IV. lib. I.) ut diametri circulorum directe & quadrata temporum periodicorum inverſe; & pondera ad ſuperficies planetarum, aliaſve quaſvis a centro diſtantias, majora ſunt vel minora (per hanc propoſitionem) in duplicata ratione diſtantiarum inverſa. Sic ex temporibus periodicis veneris circum ſolem dierum 224 & horarum $16\frac{3}{4}$, ſatellitis extimi circumjovialis circum jovem dierum 16 & horarum $16\frac{8}{15}$, ſatellitis Hugeniani circum ſaturnum dierum 15 & horarum $22\frac{2}{3}$, & lunæ circum terram dierum 27. hor. 7. min. 43, collatis cum diſtantia mediocri veneris a ſole & cum elongationibus maximis heliocentricis ſatellitis extimi circumjovialis a centro jovis 8′. 16″. ſatellitis Huge-

Hugeniani a centro ſaturni 3′. 4″. & lunæ a centro terræ 10′. 33″. computum ineundo inveni quod corporum æqualium & a centro ſolis, jovis, ſaturni ac terræ æqualiter diſtantium pondera ſint in ſolem, jovem, ſaturnum ac terram ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, & $\frac{1}{169282}$ reſpective, & auctis vel diminutis diſtantiis, pondera diminuuntur vel augentur in duplicata ratione: pondera æqualium corporum in ſolem, jovem, ſaturnum ac terram in diſtantiis 10000, 997, 791, & 109 ab eorum centris, atque ideo in eorum ſuperficiebus, erunt ut 10000, 943, 529, & 435 reſpective. Quanta ſint pondera corporum in ſuperficie lunæ dicetur in ſequentibus.

Corol. 2. Innoteſcit etiam quantitas materiæ in planetis ſingulis. Nam quantitates materiæ in planetis ſunt ut eorum vires in æqualibus diſtantiis ab eorum centris, id eſt, in ſole, jove, ſaturno ac terra ſunt ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, & $\frac{1}{169282}$ reſpective. Si parallaxis ſolis ſtatuatur major vel minor quam 10″. 30‴, debebit quantitas materiæ in terra augeri vel diminui in triplicata ratione.

Corol. 3. Innoteſcunt etiam denſitates planetarum. Nam pondera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras homogeneas ſunt in ſuperficiebus ſphærarum ut ſphærarum diametri, per prop. LXXII. lib. I. ideoque ſphærarum heterogenearum denſitates ſunt ut pondera illa applicata ad ſphærarum diametros. Erant autem veræ ſolis, jovis, ſaturni ac terræ diametri ad invicem ut 10000, 997, 791, & 109, & pondera in eoſdem ut 10000, 943, 529 & 435 reſpective, & propterea denſitates ſunt ut 100, 94½, 67 & 400. Denſitas terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet a parallaxi ſolis, ſed determinatur per parallaxin lunæ, & propterea hic recte definitur. Eſt igitur ſol paulo denſior quam jupiter, & jupiter quam ſaturnus, & terra quadruplo denſior quam ſol. Nam per ingentem ſuum calorem ſol rareſcit. Luna vero denſior eſt quam terra, ut in ſequentibus patebit.

Corol. 4. Denſiores igitur ſunt planetæ qui ſunt minores, cæteris paribus. Sic enim vis gravitatis in eorum ſuperficiebus ad æqualitatem magis accedit. Sed & denſiores ſunt planetæ, cæteris paribus, qui ſunt ſoli propiores; ut jupiter ſaturno, & terra jove. In diverſis utique diſtantiis a ſole collocandi erant planetæ ut quilibet pro gradu denſitatis calore ſolis majore vel minore frueretur. Aqua noſtra, ſi terra locaretur in orbe ſaturni, rigeſceret, ſi in orbe mer-

De Mundi Systemate

curii in vapores ſtatim abiret. Nam lux ſolis, cui calor proportionalis eſt, ſeptuplo denſior eſt in orbe mercurii quam apud nos: & thermometro expertus ſum quod ſeptuplo ſolis æſtivi calore aqua ebullit. Dubium vero non eſt quin materia mercurii ad calorem accommodetur, & propterea denſior ſit hac noſtra; cum materia omnis denſior ad operationes naturales obeundas majorem calorem requirat.

PROPOSITIO IX. THEOREMA IX.

Gravitatem pergendo a ſuperficiebus planetarum deorſum decreſcere in ratione diſtantiarum a centro quam proxime.

Si materia planetæ quoad denſitatem uniformis eſſet, obtineret hæc propoſitio accurate: per prop. LXXIII. lib. I. Error igitur tantus eſt, quantus ab inæquabili denſitate oriri poſſit.

PRPOSITIO X. THEOREMA X.

Motus planetarum in cœlis diutiſſime conſervari poſſe.

In ſcholio propoſitionis XL. lib. II. oſtenſum eſt quod globus aquæ congelatæ, in aëre noſtro libere movendo & longitudinem ſemidiametri ſuæ deſcribendo, ex reſiſtentia aëris amitteret motus ſui partem $\frac{1}{4586}$. Obtinet autem eadem proportio quam proxime in globis utcunque magnis & velocibus. Jam vero globum terræ noſtræ denſiorem eſſe, quam ſi totus ex aqua conſtaret, ſic colligo. Si globus hicce totus eſſet aqueus, quæcunque rariora eſſent quam aqua, ob minorem ſpecificam gravitatem emergerent & ſupernatarent. Eaque de cauſa globus terreus aquis undique coopertus, ſi rarior eſſet quam aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione oppoſita. Et par eſt ratio terræ noſtræ maribus magna ex parte circumdatæ. Hæc ſi denſior non eſſet, emergeret ex maribus, & parte ſui pro gradu levitatis extaret ex aqua, maribus omnibus in regionem oppoſitam confluentibus. Eodem argumento maculæ ſolares leviores ſunt quam materia lucida ſolaris cui ſupernatant. Et in formatione qualicunque planetarum, ex aqua materia omnis gravior, quo tempore maſſa fluida erat,

centrum petebat. Unde cum terra communis ſuprema quaſi duplo gravior ſit quam aqua, & paulo inferius in fodinis quaſi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: veriſimile eſt quod copia materiæ totius in terra quaſi quintuplo vel ſextuplo major ſit quam ſi tota ex aqua conſtaret; præſertim cum terram quaſi quadruplo denſiorem eſſe quam jovem jam ante oſtenſum ſit. Quare ſi jupiter paulo denſior ſit quam aqua, hic ſpatio dierum triginta, quibus longitudinem 459 ſemidiametrorum ſuarum deſcribit, amitteret in medio ejuſdem denſitatis cum aëre noſtro motus ſui partem fere decimam. Verum cum reſiſtentia mediorum minuatur in ratione ponderis ac denſitatis, ſic ut aqua, quæ partibus $13\frac{2}{3}$ levior eſt quam argentum vivum, minus reſiſtat in eadem ratione; & aer, qui partibus 860 levior eſt quam aqua, minus reſiſtat in eadem ratione: ſi aſcendatur in cœlos ubi pondus medii, in quo planetæ moventur, diminuitur in immenſum, reſiſtentia prope ceſſabit. Oſtendimus utique in ſcholio ad prop. XXII. lib. II. quod ſi aſcenderetur ad altitudinem milliarium ducentorum ſupra terram, aër ibi rarior foret quam ad ſuperficiem terræ in ratione 30 ad 0,0000000000003998, ſeu 75000000000000 ad 1 circiter. Et hinc ſtella jovis in medio ejuſdem denſitatis cum aere illo ſuperiore revolvendo, tempore annorum 1000000, ex reſiſtentia medii non amitteret motus ſui partem decimam centeſimam milleſimam. In ſpatiis utique terræ proximis, nihil invenitur quod reſiſtentiam creet præter aërem exhalationes & vapores. His ex vitro cavo cylindrico diligentiſſime exhauſtis gravia intra vitrum liberrime & ſine omni reſiſtentia ſenſibili cadunt; ipſum aurum & pluma tenuiſſima ſimul demiſſa æquali cum velocitate cadunt, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem pedum quatuor ſex vel octo ſimul incidunt in fundum, ut experientia compertum eſt. Et propterea ſi in cœlos aſcendatur aëre & exhalationibus vacuos, planetæ & cometæ ſine omni reſiſtentia ſenſibili per ſpatia illa diutiſſime movebuntur.

HYPO-

HYPOTHESIS I.

Centrum ſyſtematis mundani quieſcere.

Hoc ab omnibus conceſſum eſt, dum aliqui terram, alii ſolem in centro ſyſtematis quieſcere contendant. Videamus quid inde ſequatur.

PROPOSITIO XI. THEOREMA XI.

Commune centrum gravitatis terræ, ſolis & planetarum omnium quieſcere.

Nam centrum illud (per legum corol. IV.) vel quieſcet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo ſemper progrediente, centrum mundi quoque movebitur contra hypotheſin.

PROPOSITIO XII. THEOREMA XII.

Solem motu perpetuo agitari, ſed nunquam longe recedere a communi gravitatis centro planetarum omnium.

Nam cum (per corol. 2. prop. VIII.) materia in ſole ſit ad materiam in jove ut 1067 ad 1, & diſtantia jovis a ſole ſit ad ſemidiametrum ſolis in ratione paulo majore; incidet commune centrum gravitatis jovis & ſolis in punctum paulo ſupra ſuperficiem ſolis. Eodem argumento cum materia in ſole ſit ad materiam in ſaturno ut 3021 ad 1, & diſtantia ſaturni a ſole ſit ad ſemidiametrum ſolis in ratione paulo minore: incidet commune centrum gravitatis ſaturni & ſolis in punctum paulo infra ſuperficiem ſolis. Et ejuſdem calculi veſtigiis inſiſtendo ſi terra & planetæ omnes ex una ſolis parte conſiſterent, commune omnium centrum gravitatis vix integra ſolis diametro a centro ſolis diſtaret. Aliis in caſibus diſtantia centrorum ſemper minor eſt. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuo quieſcit, ſol pro vario planetarum ſitu in omnes partes movebitur, ſed a centro illo nunquam longe recedet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum terræ, ſolis & planetarum omnium pro centro mundi habendum eſt. Nam cum terra, ſol

sol & planetæ omnes gravitent in se mutuo, & propterea, pro vi gravitatis suæ, secundum leges motus perpetuo agitentur: perspicuum est quod horum centra mobilia pro mundi centro quiescente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum esset in quod corpora omnia maxime gravitant (uti vulgi est opinio) privilegium istud concedendum esset soli. Cum autem sol moveatur, eligendum erit punctum quiescens, a quo centrum solis quam minime discedit, & a quo idem adhuc minus discederet, si modo sol densior esset & major, ut minus moveretur.

PROPOSITIO XIII. THEOREMA XIII.

Planetæ moventur in ellipsibus umbilicum habentibus in centro solis, & radiis ad centrum illud ductis areas describunt temporibus proportionales.

Disputavimus supra de his motibus ex phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœlestes a priori. Quoniam pondera planetarum in solem sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centro solis; si sol quiesceret & planetæ reliqui non agerent in se mutuo, forent orbes eorum elliptici, solem in umbilico communi habentes, & areæ describerentur temporibus proportionales (per prop. I. & XI. & corol. I. prop. XIII. lib. I.) actiones autem planetarum in se mutuo perexiguæ sunt (ut possint contemni) & motus planetarum in ellipsibus circa solem mobilem minus perturbant (per prop. LXVI. lib. I.) quam si motus isti circa solem quiescentem peragerentur.

Actio quidem jovis in saturnum non est omnino contemnenda. Nam gravitas in jovem est ad gravitatem in solem (paribus distantiis) ut 1 ad 1067; ideoque in conjunctione jovis & saturni, quoniam distantia saturni a jove est ad distantiam saturni a sole fere ut 4 ad 9, erit gravitas saturni in jovem ad gravitatem saturni in solem ut 81 ad 16×1067 seu 1 ad 211 circiter. Et hinc oritur perturbatio orbis saturni in singulis planetæ hujus cum jove conjunctionibus adeo sensibilis ut ad eandem astronomi hæreant. Pro vario situ planetæ in his conjunctionibus, eccentricitas ejus nunc augetur nunc diminuitur, aphelium nunc promovetur nunc forte retrahitur, & medius

De Mundi Systemate

motus per vices acceleratur & retardatur. Error tamen omnis in motu ejus circum solem a tanta vi oriundus (præterquam in motu medio) evitari fere potest constituendo umbilicum inferiorem orbis ejus in communi centro gravitatis jovis & solis (per prop. LXVII. lib. I.) & propterea ubi maximus est, vix superat minuta duo prima. Et error maximus in motu medio vix superat minuta duo prima annuatim. In conjunctione autem jovis & saturni gravitates acceleratrices solis in saturnum, jovis in saturnum & jovis in solem sunt fere ut 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$ seu 156609, ideoque differentia gravitatum solis in saturnum & jovis in saturnum est ad gravitatem jovis in solem ut 65 ad 156609 seu 1 ad 2409. Huic autem differentiæ proportionalis est maxima saturni efficacia ad perturbandum motum jovis, & propterea perturbatio orbis jovialis longe minor est quam ea saturnii. Reliquorum orbium perturbationes sunt adhuc longe minores, præterquam quod orbis terræ sensibiliter perturbatur a luna. Commune centrum gravitatis terræ & lunæ, ellipsin circum solem in umbilico positum percurrit, & radio ad solem ducto areas in eadem temporibus proportionales describit, terra vero circum hoc centrum commune motu menstruo revolvitur.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XIV.

Orbium aphelia & nodi quiescunt.

Aphelia quiescunt, per prop. XI. lib. I. ut & orbium plana, per ejusdem libri prop. I. & quiescentibus planis quiescunt nodi. Attamen a planetarum revolventium & cometarum actionibus in se invicem orientur inæqualitates aliquæ, sed quæ ob parvitatem hic contemni possunt.

Corol. 1. Quiescunt etiam stellæ fixæ, propterea quod datas ad aphelia nodosque positiones servant.

Corol. 2. Ideoque cum nulla sit earum parallaxis sensibilis ex terræ motu annuo oriunda, vires earum ob immensam corporum distantiam nullos edent sensibiles effectus in regione systematis nostri. Quinimo fixæ in omnes cœli partes æqualiter dispersæ contrariis attractionibus vires mutuas destruunt, per prop. LXX. lib. I.

Scholium.

Scholium.

Cum planetæ ſoli propiores (nempe mercurius, venus, terra, & mars) ob corporum parvitatem parum agant in ſe invicem: horum aphelia & nodi quieſcent, niſi quatenus a viribus jovis, ſaturni & corporum ſuperiorum turbentur. Et inde colligi poteſt per theoriam gravitatis, quod horum aphelia moventur aliquantulum in conſequentia reſpectu fixarum, idque in proportione ſeſquiplicata diſtantiarum horum planetarum a ſole. Ut ſi aphelium martis in annis centum conficiat 33′. 20″ in conſequentia reſpectu fixarum; aphelia terræ, veneris, & mercurii in annis centum conficient 17′. 40″, 10′. 53″, & 4′. 16″ reſpective. Et hi motus, ob parvitatem, negliguntur in hac propoſitione.

PROPOSITIO XV. PROBLEMA I.

Invenire orbium principales diametros.

Capiendæ ſunt hæ in ratione ſubſeſquiplicata temporum periodicorum, per prop. XV. lib. I. deinde ſigillatim augendæ in ratione ſummæ maſſarum ſolis & planetæ cujuſque revolventis ad primam duarum medie proportionalium inter ſummam illam & ſolem, per prop. LX. lib. I.

PROPOSITIO XVI. PROBLEMA II.

Invenire orbium eccentricitates & aphelia.

Problema confit per prop. XVIII. lib. I.

PROPOSITIO XVII. THEOREMA XV.

Planetarum motus diurnos uniformes eſſe, & librationem lunæ ex ipſius motu diurno oriri.

Patet per motus legem I. & corol. 22. prop. LXVI. lib. I. Jupiter utique reſpectu fixarum revolvitur horis 9. 56′, mars horis 24. 39′. venus horis 23 circiter, terra horis 23. 56′, ſol diebus $25\frac{1}{2}$ & luna diebus 27. 7 hor. 43′. Hæc ita ſe habere ex phænomenis manifeſtum eſt. Maculæ in corpore ſolis ad eundem ſitum in diſco ſolis redeunt diebus $27\frac{1}{2}$ circiter, reſpectu terræ; ideoque reſpectu fixarum ſol revolvitur diebus $25\frac{1}{2}$ circiter. Quoniam vero lunæ circa

De Mundi Systemate

axem ſuum uniformiter revolventis dies menſtruus eſt: hujus facies eadem ulteriorem umbilicum orbis ejus ſemper reſpiciet quamproxime, & propterea pro ſitu umbilici illius deviabit hinc inde a terra. Hæc eſt libratio lunæ in longitudinem: Nam libratio in latitudinem orta eſt ex latitudine lunæ & inclinatione axis ejus ad planum eclipticæ. Hanc librationis lunaris theoriam D. *N. Mercator* in aſtronomia ſua initio anni 1676 edita, ex literis meis plenius expoſuit. Simili motu extimus ſaturni ſatelles circa axem ſuum revolvi videtur, eadem ſui facie ſaturnum perpetuo reſpiciens. Nam circum ſaturnum revolvendo, quoties ad orbis ſui partem orientalem accedit, ægerrime videtur, & plerumque videri ceſſat: id quod evenire poteſt per maculas quaſdam in ea corporis parte quæ terræ tunc obvertitur, ut *Caſſinus* notavit. Simili etiam motu ſatelles extimus jovialis circa axem ſuum revolvi videtur, propterea quod in parte corporis jovi averſa maculam habeat quæ tanquam in corpore jovis cernitur ubicunque ſatelles inter jovem & oculos noſtros tranſit.

PROPOSITIO XVIII. THEOREMA XVI.

Axes planetarum diametris quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur minores eſſe.

Planetæ ſublato omni motu circulari diurno figuram ſphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. Per motum illum circularem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem aſcendere conentur. Ideoque materia ſi fluida ſit aſcenſu ſuo ad æquatorem diametros adaugebit, axem vero deſcenſu ſuo ad polos diminuet. Sic jovis diameter (conſentientibus aſtronomorum obſervationibus) brevior deprehenditur inter polos quam ab oriente in occidentem. Eodem argumento, niſi terra noſtra paulo altior eſſet ſub æquatore quam ad polos, maria ad polos ſubſiderent, & juxta æquatorem aſcendendo, ibi omnia inundarent.

PROPOSITIO XIX. PROBLEMA III.

Invenire proportionem axis planetæ ad diametros eidem perpendiculares.

Norwoodus noſter circa annum 1635 menſurando diſtantiam pedum Londi-

Londinensium 905751 inter *Londinum* & *Eboracum*, & observando differentiam latitudinum 2 *gr.* 28′ collegit mensuram gradus unius esse pedum Londinensium 367196, id est, hexapedarum Parisiensium 57300.

Picartus mensurando arcum gradus unius & 22′. 55″ in meridiano inter *Ambianum* & *Malvoisinam*, invenit arcum gradus unius esse hexapedarum Parisiensium 57060. *Cassinus* senior mensuravit distantiam in meridiano a villa *Collioure* in *Roussilion* ad observatorium Parisiense; & filius ejus addidit distantiam ab observatorio ad turrem urbis *Dunkirk*. Distantia tota erat hexapedarum $486156\frac{1}{2}$, & differentia latitudinum villæ *Collioure* & urbis *Dunkirk* erat graduum octo & 31′. $11\frac{5}{6}$″. Unde arcus gradus unius prodit hexapedarum Parisiensium 57061. Et ex his mensuris colligitur ambitus terræ pedum Parisiensium 123249600, & semidiameter ejus pedum 19615800, ex hypothesi quod terra sit sphærica.

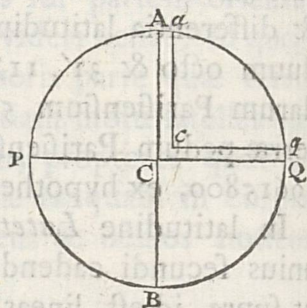
In latitudine *Lutetiæ Parisiorum* corpus grave tempore minuti unius secundi cadendo describit pedes Parisienses 15 dig. 1 lin. $1\frac{7}{9}$ ut supra, id est, lineas $2173\frac{7}{9}$. Pondus corporis diminuitur per pondus aëris ambientis. Ponamus pondus amissum esse partem undecimam millesimam ponderis totius, & corpus illud grave cadendo in vacuo describet altitudinem linearum 2174 tempore minuti unius secundi.

Corpus in circulo ad distantiam pedum 19615800 a centro, singulis diebus sidereis horarum 23. 56′. 4″ uniformiter revolvens tempore minuti unius secundi describet arcum pedum 1433,46, cujus sinus versus est pedum 0,0523656, seu linearum 7,54064. Ideoque vis, qua gravia descendunt in latitudine *Lutetiæ*, est ad vim centrifugam corporum in æquatore a terræ motu diurno oriundam, ut 2174 ad 7,54064.

Vis centrifuga corporum in æquatore terræ est ad vim centrifugam, qua corpora directe tendunt a terra in latitudine *Lutetiæ* graduum 48. 50′. 10″, in duplicata ratione radii ad sinum complementi latitudinis illius, id est, ut 7,54064 ad 3,267. Addatur hæc vis ad vim qua gravia descendunt in latitudine illa *Lutetiæ*, & corpus in latitudine illa vi tota gravitatis cadendo, tempore minuti unius secundi describet lineas 2177,267, seu pedes Parisienses 15 dig. 1 & lin. 5,267. Et vis tota gravitatis in latitudine illa erit ad vim centri-

De Mundi Systemate centrifugam corporum in æquatore terræ ut 2177,267 ad 7,54064 seu 289 ad 1.

Unde si *APBQ* figuram terræ designet jam non amplius sphæricam sed revolutione ellipseos circum axem minorem *PQ* genitam, sitque *ACQqca* canalis aquæ plena, a polo *Qq* ad centrum *Cc*, & inde ad æquatorem *Aa* pergens: debebit pondus aquæ in canalis crure *ACca*, esse ad pondus aquæ in crure altero *QCcq* ut 289 ad 288, eo quod vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam e ponderis partibus 289 sustinebit ac detrahet, & pondus 288 in altero crure sustinebit reliquas. Porro (ex propositionis xci. corol. 2. lib. 1.) computationem ineundo, invenio quod si terra constaret ex uniformi materia, motuque omni privaretur, & esset ejus axis *PQ* ad diametrum *AB* ut 100 ad 101: gravitas in loco *Q* in terram foret ad gravitatem in eodem loco *Q* in sphæram centro *C* radio *PC* vel *QC* descriptam, ut 126 ad 125. Et eodem argumento gravitas in loco *A* in sphæroidem, convolutione ellipseos *APBQ* circa axem *AB* descriptam, est ad gravitatem in eodem loco *A* in sphæram centro *C* radio *AC* descriptam, ut 125 ad 126. Est autem gravitas in loco *A* in terram media proportionalis inter gravitates in dictam sphæroidem & sphæram: propterea quod sphæra, diminuendo diametrum *PQ* in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram terræ; & hæc figura diminuendo in eadem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus *AB*, *PQ* perpendicularis est, vertitur in dictam sphæroidem; & gravitas in *A*, in casu utroque, diminuitur in eadem ratione quam proxime. Est igitur gravitas in *A* in sphæram centro *C* radio *AC* descriptam, ad gravitatem in *A* in terram ut 126 ad $125\frac{1}{2}$, & gravitas in loco *Q* in sphæram centro *C* radio *QC* descriptam, est ad gravitatem in loco *A* in sphæram centro *C* radio *AC* descriptam, in ratione diametrorum (per prop. lxxii. lib. 1.) id est, ut 100 ad 101. Conjungantur jam hæ tres rationes, 126 ad 125, 126 ad $125\frac{1}{2}$, & 100 ad 101: & fiet gravitas in loco *Q* in terram ad gravitatem in loco *A* in terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, seu ut 501 ad 500.



Jam

Jam cum (per corol. 3. prop. XCI. lib. I.) gravitas in canalis crure utrovis *ACca* vel *QCcq* ſit ut diſtantia locorum a centro terræ; ſi crura illa ſuperficiebus tranſverſis & æquidiſtantibus diſtinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium ſingularum in crure *ACca* ad pondera partium totidem in crure altero, ut magnitudines & gravitates acceleratrices conjunctim; id eſt, ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc eſt, ut 505 ad 501. Ac proinde ſi vis centrifuga partis cujuſque in crure *ACca* ex motu diurno oriunda, fuiſſet ad pondus partis ejuſdem ut 4 ad 505, eo ut de pondere partis cujuſque, in partes 505 diviſo, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea fluidum conſiſteret in æquilibrio. Verum vis centrifuga partis cujuſque eſt ad pondus ejuſdem ut 1 ad 289, hoc eſt, vis centrifuga quæ deberet eſſe ponderis pars $\frac{4}{505}$ eſt tantum pars $\frac{1}{289}$. Et propterea dico, ſecundum regulam auream, quod ſi vis centrifuga $\frac{4}{505}$ faciat ut altitudo aquæ in crure *ACca* ſuperet altitudinem aquæ in crure *QCcq* parte centeſima totius altitudinis: vis centrifuga $\frac{1}{289}$ faciet ut exceſſus altitudinis in crure *ACca* ſit altitudinis in crure altero *QCcq* pars tantum $\frac{1}{229}$. Eſt igitur diameter terræ ſecundum æquatorem ad ipſius diametrum per polos ut 230 ad 229. Ideoque cum terræ ſemidiameter mediocris, juxta menſuram *Picarti*, ſit pedum Pariſienſium 19615800, ſeu milliarium 3923,16 (poſito quod milliare ſit menſura pedum 5000) terra altior erit ad æquatorem quam ad polos exceſſu pedum 85472, ſeu milliarum $17\frac{1}{10}$. Et altitudo ejus ad æquatorem erit 19658600 pedum circiter, & ad polos 19573000 pedum.

Si planeta major ſit vel minor quam terra manente ejus denſitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum ſecundum æquatorem. At ſi motus diurnus in ratione quacunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicata illa ratione, & propterea differentia diametrorum augebitur vel minuetur in eadem duplicata ratione quamproxime. Et ſi denſitas planetæ augeatur vel minuatur in ratione quavis, gravitas etiam in ipſum tendens augebitur vel minuetur in eadem ratione, & differentia diametrorum viciſſim minuetur in ratione gravitatis auctæ vel augebitur in ratione

gravitatis

gravitatis diminutæ. Unde cum terra respectu fixarum revolvatur horis 23. 56′, jupiter autem horis 9 56′, sintque temporum quadrata ut 29 ad 5, & revolventium densitates ut 400 ad $94\frac{1}{2}$: differentia diametrorum jovis erit ad ipsius diametrum minorem ut $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ ad 1, seu 1 ad $9\frac{1}{3}$ quamproxime. Est igitur diameter jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ejus diametrum inter polos ut $10\frac{1}{3}$ ad $9\frac{1}{3}$ quamproxime. Unde cum ejus diameter major sit 37″, ejus diameter minor quæ polis interjacet, erit 33″. 25‴. Pro luce erratica addantur 3″ circiter, & hujus planetæ diametri apparentes evadent 40″ & 36″. 25‴: quæ sunt ad invicem ut $11\frac{1}{6}$ ad $10\frac{1}{6}$ quamproxime. Hoc ita se habet ex hypothesi quod corpus jovis sit uniformiter densum. At si corpus ejus sit densius versus planum æquatoris quam versus polos, diametri ejus possunt esse ad invicem ut 12 ad 11, vel 13 ad 12, vel forte 14 ad 13. Et *Cassinus* quidem anno 1691 observavit, quod jovis diameter ab oriente in occidentem porrecta diametrum alteram superaret parte sui circiter decima quinta. *Poundus* autem noster telescopio pedum 123 longitudinis & optimo micrometro, diametros jovis anno 1719, mensuravit ut sequitur.

Tempora.		*Diam. max.*	*Diam. min.*	*Diametri ad invicem.*	
dies	*hor.*	*part.*	*part.*		
Jan. 28	6	13,40	12,28	*ut* 12	*ad* 11
Mar. 6	7	13,12	12,20	$13\frac{3}{4}$	$12\frac{3}{4}$
Mar. 9	7	13,12	12,08	$12\frac{2}{3}$	$11\frac{2}{3}$
Apr. 9	9	12,32	11,48	$14\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$

Congruit igitur theoria cum phænomenis. Nam planetæ magis incalescunt ad lucem solis versus æquatores suos, & propterea paulo magis ibi decoquuntur quam versus polos.

Quinetiam gravitatem per rotationem diurnam terræ nostræ minui sub æquatore, atque ideo terram ibi altius surgere quam ad polos (si materia ejus uniformiter densa sit) patebit per experimenta pendulorum quæ recensentur in propositione sequente.

PROPO.

PROPOSITIO XX. PROBLEMA IV.

Invenire & inter se comparare pondera corporum in terræ hujus regionibus diversis.

Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ *ACQqca* æqualia sunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & similiter in totis sitarum, sunt ad invicem ut pondera totorum, ideoque etiam æquantur inter se; erunt pondera æqualium & in cruribus similiter sitarum partium reciproce ut crura, id est, reciproce ut 230 ad 229. Et par est ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus similiter sitorum corporum. Horum pondera sunt reciproce ut crura, id est, reciproce ut distantiæ corporum a centro terræ. Proinde si corpora in supremis canalium partibus, sive in superficie terræ consistant; erunt pondera eorum ad invicem reciproce ut distantiæ eorum a centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuscunque per totam terræ superficiem regionibus, sunt reciproce ut distantiæ locorum a centro; & propterea, ex hypothesi quod terra sphærois sit, dantur proportione.

Unde tale consit theorema, quod incrementum ponderis pergendo ab æquatore ad polos, sit quam proxime ut sinus versus latitudinis duplicatæ, vel quod perinde est, ut quadratum sinus recti latitudinis. Et in eadem circiter ratione augentur arcus graduum latitudinis in meridiano. Ideoque cum latitudo *Lutetiæ Parisiorum* sit 48 gr. 50′, ea locorum sub æquatore 00 gr. 00′, & ea locorum ad polos 90 gr. & duplorum sinus versi sint 11334, 00000 & 20000, existente radio 10000, & gravitas ad polum sit ad gravitatem sub æquatore ut 230 ad 229, & excessus gravitatis ad polum ad gravitatem sub æquatore ut 1 ad 229: erit excessus gravitatis in latitudine *Lutetiæ* ad gravitatem sub æquatore, ut $1 \times \frac{11334}{20000}$ ad 229, seu 5667 ad 2290000. Et propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000. Quare cum longitudines pendulorum æqualibus temporibus oscillantium sint ut gravitates, & in latitudine *Lutetiæ Parisiorum* longitudo penduli singulis minutis secundis oscillantis sit pedum trium Parisiensium & linearum $8\frac{1}{2}$, vel potius ob pondus aëris $8\frac{5}{9}$: longitudo penduli sub æquatore superabitur a longitudine synchroni penduli Parisiensis, excessu lineæ unius & 87 partium millesimarum lineæ. Et simili computo consit tabula sequens.

Latitudo loci.	*Longitudo penduli.*		*Mensura gradus unius in meridiano.*
grad.	*ped.*	*lin.*	*hexapedæ.*
0	3	7,468	56637
5	3	7,482	56642
10	3	7,526	56659
15	3	7,596	56687
20	3	7,692	56724
25	3	7,812	56769
30	3	7,948	56823
35	3	8,099	56882
40	3	8,261	56945
1	3	8,294	56958
2	3	8,327	56971
3	3	8,361	56984
4	3	8,394	56997
45	3	8,428	57010
6	3	8,461	57022
7	3	8,494	57035
8	3	8,528	57048
9	3	8,561	57061
50	3	8,594	57074
55	3	8,756	57137
60	3	8,907	57196
65	3	9,044	57250
70	3	9,162	57295
75	3	9,258	57332
80	3	9,329	57360
85	3	9,372	57377
90	3	9,387	57382

Vid: Maupertuisi zationem in Mesure de la Terre au Cercle Polaire, Ch. VI.

Constat autem per hanc tabulam quod graduum inæqualitas tam parva sit, ut in rebus geographicis figura terræ pro sphærica haberi possit: præsertim si terra paulo densior sit versus planum æquatoris quam versus polos.

Jam vero astronomi aliqui in longinquas regiones ad observationes astronomicas faciendas missi, observarunt quod horologia oscillatoria tardius moverentur prope æquatorem quam in regionibus nostris. Et primo quidem D. *Richer* hoc observavit anno 1672 in insula *Cayennæ*. Nam dum observaret transitum fixarum per meridianum mense

menſe *Auguſto*, reperit horologium ſuum tardius moveri quam pro medio motu ſolis, exiſtente differentia 2′. 28″ ſingulis diebus. Deinde faciendo ut pendulum ſimplex ad minuta ſingula ſecunda per horologium optimum menſurata oſcillaret, notavit longitudinem penduli ſimplicis, & hoc fecit ſæpius ſingulis ſeptimanis per menſes decem. Tum in *Galliam* redux contulit longitudinem hujus penduli cum longitudine penduli Pariſienſis (quæ erat trium pedum Pariſienſium, & octo linearum cum tribus quintis partibus lineæ) & reperit breviorem eſſe, exiſtente differentia lineæ unius cum quadrante.

Poſtea *Halleius* noſter circa annum 1677 ad inſulam *Sanctæ Hellenæ* navigans, reperit horologium ſuum oſcillatorium ibi tardius moveri quam *Londini*, ſed differentiam non notavit. Pendulum vero brevius reddidit pluſquam octava parte digiti, ſeu linea una cum ſemiſſe. Et ad hoc efficiendum, cum longitudo cochleæ in ima parte penduli non ſufficeret, annulum ligneum thecæ cochleæ & ponderi pendulo interpoſuit.

Deinde anno 1682 D. *Varin* & D. *Des Hayes* invenerunt longitudinem penduli ſingulis minutis ſecundis oſcillantis in obſervatorio regio Pariſienſi eſſe ped. 3. lin. $8\frac{5}{9}$. Et in inſula *Gorea* eadem methodo longitudinem penduli ſynchroni invenerunt eſſe ped. 3. lin. $6\frac{5}{9}$, exiſtente longitudinum differentia lin. 2. Et eodem anno ad inſulas *Guadaloupam* & *Martinicam* navigantes, invenerunt longitudinem penduli ſynchroni in his inſulis eſſe ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$.

Poſthac D. *Couplet* filius anno 1697 menſe *Julio*, horologium ſuum oſcillatorium ad motum ſolis medium in obſervatorio regio Pariſienſi ſic aptavit, ut tempore ſatis longo horologium cum motu ſolis congrueret. Deinde *Ulyſſipponem* navigans invenit quod menſe *Novembri* proximo horologium tardius iret quam prius, exiſtente differentia 2′. 13″ in horis 24. Et menſe *Martio* ſequente *Paraibam* navigans invenit ibi horologium ſuum tardius ire quam *Pariſiis*, exiſtente differentia 4′. 12″ in horis 24. Et affirmat pendulum ad minuta ſecunda oſcillans brevius fuiſſe *Ulyſſipponi* lineis $2\frac{1}{2}$ & *Paraibæ* lineis $3\frac{2}{3}$ quam *Pariſiis*. Rectius poſuiſſet differentias eſſe $1\frac{1}{3}$ & $2\frac{5}{9}$. Nam hæ differentiæ differentiis temporum 2′. 13″, & 4′. 12″ reſpondent. Craſſioribus hujus obſervationibus minus fidendum eſt.

 Annis

Annis proximis (1699 & 1700) D. *Des Hayes* ad *Americam* denuo navigans, determinavit quod in insulis *Cayennæ* & *Granadæ* longitudo penduli ad minuta secunda oscillantis, esset paulo minor quam ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$, quodque in insula *S. Christophori* longitudo illa esset ped. 3. lin. $6\frac{3}{4}$, & quod in insula *S. Dominici* eadem esset ped. 3. lin. 7.

Annoque 1704. *P. Feuelleus* invenit in *Porto-belo* in *America* longitudinem penduli ad minuta secunda oscillantis, esse pedum trium Parisiensium & linearum tantum $5\frac{7}{12}$, id est, tribus fere lineis breviorem quam *Lutetiæ Parisiorum*, sed errante observatione. Nam deinde ad insulam *Martinicam* navigans, invenit longitudinem penduli isochroni esse pedum tantum trium Parisiensium & linearum $5\frac{10}{12}$.

Latitudo autem *Paraibæ* est 6 gr. 38′ ad austrum, & ea *Porto beli* 9 gr. 33′ ad boream, & latitudines insularum *Cayennæ*, *Goreæ*, *Guadaloupæ*, *Martinicæ*, *Granadæ*, *Sancti Christophori*, & *Sancti Dominici* sunt respective 4 gr. 55′, 14 gr. 40′, 14 gr. 00′, 14 gr. 44′, 12 gr. 6′, 17 gr. 19′, & 19 gr. 48′ ad boream. Et excessus longitudinis penduli Parisiensis supra longitudines pendulorum isochronorum in his latitudinibus observatas sunt paulo majores quam pro tabula longitudinum penduli superius computata. Et propterea terra aliquanto altior est sub æquatore quam pro superiore calculo, & densior ad centrum quam in fodinis prope superficiem, nisi forte calores in zona torrida longitudinem pendulorum aliquantulum auxerint.

Observavit utique D. *Picartus* quod virga ferrea, quæ tempore hyberno ubi gelabant frigora erat pedis unius longitudine, ad ignem calefacta evasit pedis unius cum quarta parte lineæ. Deinde D. *de la Hire* observavit quod virga ferrea quæ tempore consimili hyberno sex erat pedum longitudinis, ubi soli æstivo exponebatur evasit sex pedum longitudinis cum duabus tertiis partibus lineæ. In priore casu calor major fuit quam in posteriore, in hoc vero major fuit quam calor externarum partium corporis humani. Nam metalla ad solem æstivum valde incalescunt. At virga penduli in horologio oscillatorio nunquam exponi solet calori solis æstivi, nunquam calorem concipit calori externæ superficiei corporis humani æqualem. Et propterea virga penduli in horologio tres pedes longa, paulo quidem longior erit tempore æstivo quam hyberno, sed excessu

quartam partem lineæ unius vix ſuperante. Proinde differentia tota longitudinis pendulorum quæ in diverſis regionibus iſochrona ſunt, diverſo calori attribui non poteſt. Sed neque erroribus aſtronomorum e *Gallia* miſſorum tribuenda eſt hæc differentia. Nam quamvis eorum obſervationes non perfecte congruant inter ſe, tamen errores ſunt adeo parvi ut contemni poſſint. Et in hoc concordant omnes, quod iſochrona pendula ſunt breviora ſub æquatore quam in obſervatorio regio Pariſienſi, exiſtente differentia non minore quam lineæ unius cum quadrante, non majore quam linearum $2\frac{2}{3}$. Per obſervationes D. *Richeri* in *Cayenna* factas differentia fuit lineæ unius cum quadrante. Per eas D. *Des Hayes* differentia illa correcta prodiit lineæ unius cum ſemiſſe vel unius cum tribus quartis partibus lineæ. Per eas aliorum minus accuratas prodiit eadem quaſi duarum linearum. Et hæc diſcrepantia partim ab erroribus obſervationum, partim a diſſimilitudine partium internarum terræ & altitudine montium, & partim a diverſis aëris caloribus, oriri potuit.

Virga ferrea pedes tres longa, tempore hyberno in *Anglia*, brevior eſt quam tempore æſtivo, ſexta parte lineæ unius, quantum ſentio. Ob calores ſub æquatore auferatur hæc quantitas de differentia lineæ unius cum quadrante a *Richero* obſervata, & manebit linea $1\frac{1}{12}$: quæ cum linea $1\frac{87}{1000}$ per theoriam jam ante collecta probe congruit. *Richerus* autem obſervationes in *Cayenna* factas, ſingulis ſeptimanis per menſes decem iteravit, & longitudines penduli in virga ferrea ibi notatas cum longitudinibus ejus in *Gallia* ſimiliter notatis contulit. Quæ diligentia & cautela in aliis obſervatoribus defuiſſe videtur. Si hujus obſervationibus fidendum eſt, terra altior erit ad æquatorem quam ad polos exceſſu milliarium ſeptendecim circiter, ut ſupra per theoriam prodiit.

PROPO-

De Mundi Systemate

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVII.

Puncta æquinoctialia regredi, & axem terræ singulis revolutionibus annuis nutando bis inclinari in eclipticam & bis redire ad positionem priorem.

Patet per corol. 20. prop. LXVI. lib. I. Motus tamen iste nutandi perexiguus esset debet, & vix aut ne vix quidem sensibilis.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVIII.

Motus omnes lunares, omnesque motuum inæqualitates ex allatis principiis consequi.

Planetas majores, interea dum circa solem feruntur, posse alios minores circum se revolventes planetas deferre, & minores illos in ellipsibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per prop. LXV. lib. I. Actione autem solis perturbabuntur eorum motus multimode, iisque adficientur inæqualitatibus quæ in luna nostra notantur. Hæc utique (per corol. 2, 3, 4, & 5. prop. LXVI.) velocius movetur, ac radio ad terram ducto describit aream pro tempore majorem, orbemque habet minus curvum, atque ideo propius accedit ad terram, in syzygiis quam in quadraturis, nisi quatenus impedit motus eccentricitatis. Eccentricitas enim maxima est (per corol. 9. prop. LXVI.) ubi apogæum lunæ in syzygiis versatur, & minima ubi idem in quadraturis consistit; & inde luna in perigæo velocior est & nobis propior, in apogæo autem tardior & remotior in syzygiis quam in quadraturis. Progreditur insuper apogæum, & regrediuntur nodi, sed motu inæquabili. Et apogæum quidem (per corol. 7. & 8. prop. LXVI.) velocius progreditur in syzygiis suis, tardius regreditur in quadraturis, & excessu progressus supra regressum annuatim fertur in consequentia. Nodi autem (per corol. 2. prop. LXVI.) quiescunt in syzygiis suis & velocissime regrediuntur in quadraturis. Sed & major est lunæ latitudo maxima in ipsius quadraturis (per corol. 10. prop. LXVI.) quam in syzygiis: & motus medius tardior in perihelio terræ (per corol. 6. prop. LXVI.) quam in ipsius aphelio. Atque hæ sunt inæqualitates insigniores ab astronomis notatæ.

Sunt

Sunt etiam aliæ quædam a prioribus aſtronomis non obſervatæ inæqualitates, quibus motus lunares adeo perturbantur, ut nulla hactenus lege ad regulam aliquam certam reduci potuerint. Velocitates enim ſeu motus horarii apogæi & nodorum lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter eccentricitatem maximam in ſyzygiis & minimam in quadraturis, & inæqualitas quæ variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per corol. 14. prop. LXVI.) in triplicata ratione diametri apparentis ſolaris. Et variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicata ratione temporis inter quadraturas quam proxime (per corol. 1, & 2. lem. x. & corol. 16. prop. LXVI. lib. I.) ſed hæc inæqualitas in calculo aſtronomico ad proſthaphæreſin lunæ referri ſolet, & cum ea confundi.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA V.

Motus inæquales ſatellitum jovis & ſaturni a motibus lunaribus derivare.

Ex motibus lunæ noſtræ motus analogi lunarum ſeu ſatellitum jovis ſic derivantur. Motus medius nodorum ſatellitis extimi jovialis, eſt ad motum medium nodorum lunæ noſtræ, in ratione compoſita ex ratione duplicata temporis periodici terræ circa ſolem ad tempus periodicum jovis circa ſolem, & ratione ſimplici temporis periodici ſatellitis circa jovem ad tempus periodicum lunæ circa terram (per corol. 16. prop. LXVI. lib. I.) ideoque annis centum conficit nodus iſte 8 gr. 24′. in antecedentia. Motus medii nodorum ſatellitum interiorum ſunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus (per idem corollarium) & inde dantur. Motus autem augis ſatellitis cujuſque in conſequentia eſt ad motum nodorum ipſius in antecedentia, ut motus apogæi lunæ noſtræ ad hujus motum nodorum, (per idem corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus augis ſic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob cauſam quam hic exponere non vacat. Æquationes maximæ nodorum & augis ſatellitis cujuſque fere ſunt ad æquationes maximas nodorum & augis lunæ reſpective, ut motus nodorum & augis ſatellitum tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus nodorum & apogæi lunæ tempore unius revolutionis æquationum

tionum posteriorum. Variatio satellitis e jove spectati, est ad variationem lunæ, ut sunt ad invicem toti motus nodorum temporibus quibus satelles & luna ad solem revolvuntur, per idem corollarium; ideoque in satellite extimo non superat $5''. 12'''$.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Fluxum & refluxum maris ab actionibus solis ac lunæ oriri.

Mare singulis diebus tam lunaribus quam solaribus bis intumescere debere ac bis defluere, patet per corol. 19. & 20. prop. LXVI. lib. I. ut & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulsum luminarium ad meridianum loci minori quam sex horarum spatio sequi, uti fit in maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* & promontorium *Bonæ Spei* ut & in maris *Pacifici* littore *Chilensi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æstus in horam circiter secundam, tertiam vel quartam, incidit, nisi ubi motus ab oceano profundo per loca vadosa propagatus usque ad horam quintam sextam septimam aut ultra retardatur. Horas numero ab appulsu luminaris utriusque ad meridianum loci, tam infra horizontem quam supra, & per horas diei lunaris intelligo vigesimas quartas partes temporis quo luna motu apparente diurno ad meridianum loci revertitur. Vis solis vel lunæ ad mare elevandum maxima est in ipso appulsu luminaris ad meridianum loci. Sed vis eo tempore in mare impressa manet aliquamdiu & per vim novam subinde impressam augetur, donec mare ad altitudinem maximam ascenderit, id quod fiet spatio horæ unius duarumve sed sæpius ad littora spatio horarum trium circiter, vel etiam plurium si mare sit vadosum.

Motus autem bini, quos luminaria duo excitant, non cernentur distincte, sed motum quendam mixtum efficient. In luminarium conjunctione vel oppositione conjungentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In quadraturis sol attollet aquam ubi luna deprimit, deprimetque ubi luna attollit; & ex effectuum differentia æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientia teste, major est effectus lunæ quam solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam lunarem circiter. Extra syzygias & quadraturas, æstus maximus qui sola vi lunari incidere semper deberet in horam tertiam lunarem, & sola solari in tertiam solarem,

com-

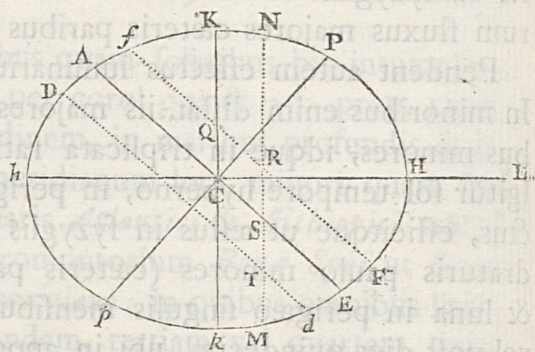
compositis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ lunari propinquius est; ideoque in transitu lunæ a syzygiis ad quadraturas, ubi hora tertia solaris præcedit tertiam lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam lunarem, idque maximo intervallo paulo post octantes lunæ; & paribus intervallis æstus maximus sequetur horam tertiam lunarem in transitu lunæ a quadraturis ad syzygias. Hæc ita sunt in mari aperto. Nam in ostiis fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἀκμὴν venient.

Pendent autem effectus luminarium ex eorum distantiis a terra. In minoribus enim distantiis majores sunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicata ratione diametrorum apparentium. Igitur sol tempore hyberno, in perigæo existens, majores edit effectus, efficitque ut æstus in syzygiis paulo majores sint, & in quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quam tempore æstivo; & luna in perigæo singulis mensibus majores ciet æstus quam ante vel post dies quindecim, ubi in apogæo versatur. Unde fit ut æstus duo omnino maximi in syzygiis continuis se mutuo non sequantur.

Pendet etiam effectus utriusque luminaris ex ipsius declinatione seu distantia ab æquatore. Nam si luminare in polo constitueretur, traheret illud singulas aquæ partes constanter, sine actionis intensione & remissione, ideoque nullam motus reciprocationem cieret. Igitur luminaria recedendo ab æquatore polum versus, effectus suos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æstus in syzygiis solstitialibus quam in æquinoctialibus. In quadraturis autem solstitialibus majores ciebunt æstus quam in quadraturis æquinoctialibus; eo quod lunæ jam in æquatore constitutæ effectus maxime superat effectum solis. Incidunt igitur æstus maximi in syzygias & minimi in quadraturas luminarium, circa tempora æquinoctii utriusque. Et æstum maximum in syzygiis comitatur semper minimus in quadraturis, ut experientia compertum est. Per minorem autem distantiam solis a terra, tempore hyberno quam tempore æstivo, fit ut æstus maximi & minimi sæpius præcedant æquinoctium vernum quam sequantur, & sæpius sequantur autumnale quam præcedant.

Pendent etiam effectus luminarium ex locorum latitudine. Designet $ApEP$ tellurem aquis profundis undique coopertam; C centrum ejus; P, p polos; AE æquatorem; F locum quemvis extra æquatorem; Ff parallelum loci; Dd parallelum ei respondentem ex altera

tera parte æquatoris; *L* locum quem luna tribus ante horis occupabat; *H* locum telluris ei perpendiculariter subjectum; *h* locum huic oppositum; *K*, *k* loca inde gradibus 90 distantia, *CH*, *Ch* maris altitudines maximas mensuratas a centro telluris; & *CK*, *Ck* altitudines minimas: & si axibus *Hh*, *Kk* describatur ellipsis, deinde ellipseos hujus revolutione circa axem majorem *Hh* describatur sphærois *HPKhpk*; designabit hæc figuram maris quam proxime, & erunt *CF*, *Cf*, *CD*, *Cd* altitudines maris in locis *F*, *f*, *D*, *d*. Quinetiam si in præfata ellipseos revolutione punctum quodvis *N* describat circulum *NM*, secantem parallelos *Ff*, *Dd* in locis quibusvis *R*, *T*, & æquatorem *AE* in *S*; erit *CN* altitudo maris in locis omnibus *R*, *S*, *T*, sitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurna loci cujusvis *F*, affluxus erit maximus in *F*, hora tertia post appulsum lunæ ad meridianum supra horizontem; postea defluxus maximus in *Q* hora tertia post occasum lunæ; dein affluxus maximus in *f* hora tertia post appulsum lunæ ad meridianum infra horizontem; ultimo defluxus maximus in *Q* hora tertia post ortum lunæ; & affluxus posterior in *f* erit minor quam affluxus prior in *F*. Distinguitur enim mare totum in duos omnino fluctus hemisphæricos, unum in hemisphærio *KHk* ad boream vergentem, alterum in hemisphærio opposito *Khk*; quos igitur fluctum borealem & fluctum australem nominare licet. Hi fluctus semper sibi mutuo oppositi veniunt per vices ad meridianos locorum singulorum, interposito intervallo horarum lunarium duodecim. Cumque regiones boreales magis participant fluctum borealem, & australes magis australem, inde oriuntur æstus alternis vicibus majores & minores, in locis singulis extra æquatorem, in quibus luminaria oriuntur & occidunt. Æstus autem major, luna in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam post appulsum lunæ ad meridianum supra horizontem, & luna declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in tempora solstitiorum; præsertim si lunæ nodus ascendens versatur in principio arietis.



Sic

Sic experientia compertum eſt, quod æſtus matutini tempore hyberno ſuperent veſpertinos & verſpertini tempore æſtivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quaſi pedis unius, ad *Briſtoliam* vero altitudine quindecim digitorum: obſervantibus *Colepreſſio* & *Sturmio*.

Motus autem hactenus deſcripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, qua maris æſtus, etiam ceſſantibus uminarium actionibus, poſſet aliquamdiu perſeverare. Conſervatio hæcce motus impreſſi minuit differentiam æſtuum alternorum; & æſtus proxime poſt ſyzygias majores reddit, eoſque proxime poſt quadraturas minuit. Unde ſit ut æſtus alterni ad *Plymuthum* & *Briſtoliam* non multo magis differant ab invicem quam altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æſtus omnium maximi in iiſdem portubus, non ſint primi a ſyzygiis, ſed tertii. Retardantur etiam motus omnes in tranſitu per vada, adeo ut æſtus omnium maximi, in fretis quibuſdam & fluviorum oſtiis, ſint quarti vel etiam quinti a ſyzygiis.

Porro fieri poteſt ut æſtus propagetur ab oceano per freta diverſa ad eundem portum, & citius tranſeat per aliqua freta quam per alia: quo in caſu æſtus idem, in duos vel plures ſucceſſive advenientes diviſus, componere poſſit motus novos diverſorum generum. Fingamus æſtus duos æquales a diverſis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum ſpatio horarum ſex, incidatque in horam tertiam ab appulſu lunæ ad meridianum portus. Si luna in hocce ſuo ad meridianum appulſu verſabatur in æquatore, venient ſingulis horis ſenis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eoſdem affluxibus æquabunt, & ſic ſpatio diei illius efficient ut aqua tranquille ſtagnet. Si luna tunc declinabat ab æquatore, fient æſtus in oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum eſt; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altiſſimam in medio inter utrumque, affluxus major & minor faciet ut aqua aſcendat ad mediocrem altitudinem in medio ipſorum, & inter affluxus binos minores aqua aſcendet ad altitudinem minimam. Sic ſpatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri ſolet, ſed ſemel tantum perveniet ad maximam altitudinem & ſemel ad minimam; & altitudo maxima, ſi luna declinat in

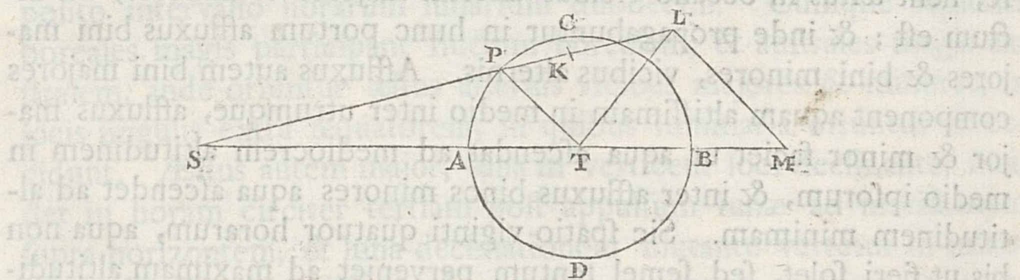
polum supra horizontem loci, incidet in horam vel sextam vel tricesimam ab appulsu lunæ ad meridianum, atque luna declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum in portu regni *Tunquini* ad *Batsham* sub latitudine boreali 20gr. 50′. *Halleius* ex nautarum observationibus patefecit. Ibi aqua die transitum lunæ per æquatorem sequente stagnat, dein luna ad boream declinante incipit fluere & refluere, non bis, ut in aliis portubus, sed semel singulis diebus; & æstus incidit in occasum lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum lunæ declinatione augetur hic æstus, usque ad diem septimum vel octavum, dein per alios septem dies iisdem gradibus decrescit, quibus antea creverat; & luna declinationem mutante cessat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim subinde defluxus in occasum lunæ & affluxus in ortum, donec luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab oceano *Sinensi* inter continentem & insulam *Luconiam*, alter a mari *Indico* inter continentem & insulam *Borneo*. An æstus spatio horarum duodecim a mari *Indico*, & spatio horarum sex a mari *Sinensi* per freta illa venientes, & sic in horam tertiam & nonam lunarem incidentes, componant hujusmodi motus; sitne alia marium illorum conditio, observationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

Hactenus causas motuum lunæ & marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua subjungere.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA VI.

Invenire vires solis ad perturbandos motus lunæ.

Designet *S* solem, *T* terram, *P* lunam, *CADB* orbem lunæ. In



SP capiatur *SK* æqualis *ST*; sitque *SL* ad *SK* in duplicata ratione

SK ad *SP*, & ipsi *PT* agatur parallela *LM*; & si gravitas acceleratrix terræ in solem exponatur per distantiam *ST* vel *SK*, erit *SL* gravitas acceleratrix lunæ in solem. Ea componitur ex partibus *SM*, *LM*, quarum *LM* & ipsius *SM* pars *TM* perturbat motum lunæ, ut in libri primi prop. LXVI. & ejus corollariis expositum est. Quatenus terra & luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus terræ circa centrum illud a viribus consimilibus; sed summas tam virium quam motuum referre licet ad lunam, & summas virium per lineas ipsis analogas *TM* & *ML* designare. Vis *ML* in mediocri sua quantitate est ad vim centripetam, qua luna in orbe suo circa terram quiescentem ad distantiam *PT* revolvi posset, in duplicata ratione temporum periodicorum lunæ circa terram & terræ circa solem (per corol. 17. prop. LXVI. lib. 1.) hoc est, in duplicata ratione dierum 27. hor. 7. min. 43. ad dies 365. hor. 6. min. 9. id est, ut 1000 ad 178725, seu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Invenimus autem in propositione quarta quod, si terra & luna circa commune gravitatis centrum revolvantur, earum distantia mediocris ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum mediocrium terræ quamproxime. Et vis qua luna in orbe circa terram quiescentem, ad distantiam *PT* semidiametrorum terrestrium $60\frac{1}{2}$ revolvi posset, est ad vim, qua eodem tempore ad distantiam semidiametrorum 60 revolvi posset, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60×60 quamproxime. Ideoque vis mediocris *ML* est ad vim gravitatis in superficie terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, seu 1 ad 638092,6. Inde vero & ex proportione linearum *TM*, *ML*, datur etiam vis *TM*: & hæ sunt vires solis quibus lunæ motus perturbantur. *Q. E. I.*

PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA VII.

Invenire incrementum horarium areæ quam luna, radio ad terram ducto, in orbe circulari describit.

Diximus aream, quam luna radio ad terram ducto describit, esse tempori proportionalem, nisi quatenus motus lunaris ab actione solis turbatur. Inæqualitatem momenti, vel incrementi horarii hic investigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem lunæ circularem esse, & inæqualitates omnes negligamus, ea

sola

ſola excepta, de qua hic agitur. Ob ingentem vero ſolis diſtantiam, ponamus etiam lineas *SP*, *ST* ſibi invicem parallelas eſſe. Hoc pacto vis *LM* reducetur ſemper ad mediocrem ſuam quantitatem *TP*, ut & vis *TM* ad mediocrem ſuam quantitatem 3*PK*. Hæ vires (per legum corol. 2.) componunt vim *TL*; & hæc vis, ſi in radium *TP* demittatur perpendiculum *LE*, reſolvitur in vires *TE*, *EL*, quarum *TE*, agendo ſemper ſecundum radium *TP*, nec accelerat nec retardat deſcriptionem areæ *TPC* radio illo *TP* factam; & *EL* agendo ſecundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipſam, quantum accelerat vel retardat lunam. Acceleratio illa lunæ, in tranſitu ipſius a quadratura *C* ad conjunctionem *A*, ſingulis temporis momentis facta, eſt ut ipſa vis accelerans *EL*, hoc eſt, ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Exponatur tempus per motum medium lunarem, vel (quod eodem fere recidit) per angulum *CTP*, vel etiam per arcum *CP*. Ad *CT* erigatur normalis *CG* ipſi *CT* æqualis. Et diviſo arcu quadrantali *AC* in particulas innumeras æquales *Pp*, &c. per quas æquales totidem particulæ temporis exponi poſſint, ductaque *pk* perpendiculari ad *CT*, jungatur *TG* ipſis *KP*, *kp* productis occurrens in *F* & *f*; & erit *FK* æqualis *TK*, & *Kk* erit ad *PK* ut *Pp* ad *Tp*, hoc eſt in data ratione, ideoque *FK* × *Kk* ſeu area *FKkf*, erit ut

ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$, id eſt, ut EL; & compoſite, area tota $GCKF$ ut ſumma omnium virium EL tempore toto CP impreſſarum in lunam, atque ideo etiam ut velocitas hac ſumma genita, id eſt, ut acceleratio deſcriptionis areæ CTP, ſeu incrementum momenti. Vis qua luna circa terram quieſcentem ad diſtantiam TP, tempore ſuo periodico $CADB$ dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvi poſſet, efficeret ut corpus, tempore CT cadendo, deſcriberet longitudinem $\frac{1}{2}CT$, & velocitatem ſimul acquireret æqualem velocitati, qua luna in orbe ſuo movetur. Patet hoc per corol. 9. prop. IV. lib. I. Cum autem perpendiculum Kd in TP demiſſum ſit ipſius EL pars tertia, & ipſius TP ſeu ML in octantibus pars dimidia, vis EL in octantibus, ubi maxima eſt, ſuperabit vim ML in ratione 3 ad 2, ideoque erit ad vim illam, qua luna tempore ſuo periodico circa terram quieſcentem revolvi poſſet, ut 100 ad $\frac{2}{3} \times 17872\frac{1}{2}$ ſeu 11915, & tempore CT velocitatem generare deberet quæ eſſet pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis lunaris, tempore autem CPA velocitatem majorem generaret in ratione CA ad CT ſeu TP. Exponatur vis maxima EL in octantibus per aream $FK \times Kk$ rectangulo $\frac{1}{2}TP \times Pp$ æqualem. Et velocitas, quam vis maxima tempore quovis CP generare poſſet, erit ad velocitatem quam vis omnis minor EL eodem tempore generat, ut rectangulum $\frac{1}{2}TP \times CP$ ad aream $KCGF$: tempore autem toto CPA, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2}TP \times CA$ & triangulum TCG, ſive ut arcus quadrantalis CA & radius TP. Ideoque (per prop. IX. lib. V. elem.) velocitas poſterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis lunæ. Huic lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga eſt, addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius; & ſi momentum mediocre exponatur per numerum 11915, ſumma 11915+50 ſeu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in ſyzygia A, ac differentia 11915—50 ſeu 11865 ejuſdem momentum minimum in quadraturis. Igitur areæ temporibus æqualibus in ſyzygiis & quadraturis deſcriptæ, ſunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod ſit ad momentorum differentiam 100 ut trapezium $FKCG$ ad triangulum TCG (vel quod perinde eſt, ut quadratum ſinus PK ad quadratum radii TP, id eſt, ut Pd ad TP) & ſumma exhibebit momentum areæ, ubi luna eſt in loco quovis intermedio P.

Hæc

Hæc omnia ita se habent, ex hypothesi quod sol & terra quiescunt, & luna tempore synodico dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvitur. Cum autem periodus synodica lunaris vere sit dierum 29. hor. 12. & min. 44, augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis, id est, in ratione 1080853 ad 1000000. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{100}{11515}$ momenti mediocris, jam fiet ejusdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideoque momentum areæ in quadratura lunæ erit ad ejus momentum in syzygia ut 11023−50 ad 11023+50, seu 10973 ad 11073; & ad ejus momentum, ubi luna in alio quovis loco intermedio P versatur, ut 10973 ad 10973+Pd, existente videlicet TP æquali 100.

Area igitur, quam luna radio ad terram ducto singulis temporis particulis æqualibus describit, est quam proxime ut summa numeri 219,46 & sinus versi duplicatæ distantiæ lunæ a quadratura proxima, in circulo cujus radius est unitas. Hæc ita se habent ubi variatio in octantibus est magnitudinis mediocris. Sin variatio ibi major sit vel minor, augeri debet vel minui sinus ille versus in eadem ratione.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA VIII.

Ex motu horario lunæ invenire ipsius distantiam a terra.

Area, quam luna radio ad terram ducto singulis temporis momentis describit, est ut motus horarius lunæ & quadratum distantiæ lunæ a terra conjunctim; & propterea distantia lunæ a terra est in ratione composita ex subduplicata ratione areæ directe & subduplicata ratione motus horarii inverse. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc datur lunæ diameter apparens: quippe quæ sit reciproce ut ipsius distantia a terra. Tentent astronomi quam probe hæc regula cum phænomenis congruat.

Corol. 2. Hinc etiam orbis lunaris accuratius ex phænomenis quam antehac definiri potest.

PROPO-

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA IX.

Invenire diametros orbis in quo luna, sine eccentricitate, moveri deberet.

Curvatura trajectoriæ, quam mobile, si secundum trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, describit, est ut attractio directe & quadratum velocitatis inverse. Curvaturas linearum pono esse inter se in ultima proportione sinuum vel tangentium angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium, ubi radii illi in infinitum diminuuntur. Attractio autem lunæ in terram in syzygiis est excessus gravitatis ipsius in terram supra vim solarem $2PK$ (vide *fig. pag.* 428.) qua gravitas acceleratrix lunæ in solem superat gravitatem acceleratricem terræ in solem vel ab ea superatur. In quadraturis autem attractio illa est summa gravitatis lunæ in terram & vis solaris KT, qua luna in terram trahitur. Et hæ attractiones, si $\frac{AT+CT}{2}$ dicatur N, sunt ut $\frac{178725}{ATq} - \frac{2000}{CT \times N}$ & $\frac{178725}{CTq} + \frac{1000}{AT \times N}$ quam proxime; seu ut $178725 N \times CTq - 2000 ATq \times CT$ & $178725 N \times ATq + 1000 CTq \times AT$. Nam si gravitas acceleratrix lunæ in terram exponatur per numerum 178725, vis mediocris ML, quæ in quadraturis est PT vel TK & lunam trahit in terram, erit 1000, & vis mediocris TM in syzygiis erit 3000; de qua, si vis mediocris ML subducatur, manebit vis 2000 qua luna in syzygiis distrahitur a terra, quamque jam ante nominavi $2PK$. Velocitas autem lunæ in syzygiis A & B est ad ipsius velocitatem in quadraturis C & D, ut CT ad AT & momentum areæ quam luna radio ad terram ducto describit in syzygiis ad momentum ejusdem areæ in quadraturis conjunctim, i. e. ut $11073\, CT$ ad $10973\, AT$. Sumatur hæc ratio bis inverse & ratio prior semel directe, & fiet curvatura orbis lunaris in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis ut $120406729 \times 178725 ATq \times CTq \times N - 120406729 \times 2000\, ATqq \times CT$ ad $122611329 \times 178725\, ATq \times CTq \times N + 122611329 \times 1000\, CTqq \times AT$, i. e. ut $2151969\, AT \times CT \times N - 24081\, AT\ cub.$ ad $2191371\, AT \times CT \times N + 12261\, CT\ cub.$

Quoniam figura orbis lunaris ignoratur, hujus vice assumamus ellipsin $DBCA$, in cujus centro T terra collocetur, & cujus axis major

jor *DC* quadraturis, minor *AB* syzygiis interjaceat. Cum autem planum ellipseos hujus motu angulari circa terram revolvatur, & trajectoria cujus curvaturam consideramus describi debet in plano quod omni motu angulari omnino destituitur: consideranda erit figura, quam luna in ellipsi illa revolvendo describit in hoc plano, hoc est figura *Cpa*, cujus puncta singula *p* inveniuntur capiendo punctum quodvis *P* in ellipsi, quod locum lunæ repræsentet, & ducendo *Tp* æqualem *TP*, ea lege ut angulus *PTp* æqualis sit motui apparenti solis a tempore quadraturæ *C* confecto; vel (quod eodem fere recidit) ut angulus *CTp* sit ad angulum *CTP* ut tempus revolutionis synodicæ lunaris ad tempus revolutionis periodicæ seu $29^d. 12^h. 44'$, ad $27^d. 7^h. 43'$. Capiatur igitur angulus *CTa* in eadem ratione ad angulum rectum *CTA*, & sit longitudo *Ta* æqualis longitudini *TA*; & erit *a* apsis ima & *C* apsis summa orbis hujus *Cpa*. Rationes autem ineundo invenio quod differentia inter curvaturam orbis *Cpa* in vertice *a*, & curvaturam circuli centro *T* intervallo *TA* descripti, sit ad differentiam inter curvaturam ellipseos in vertice *A* & curvaturam ejusdem circuli, in duplicata ratione anguli *CTP* ad angulum *CTp*; & quod curvatura ellipseos in *A* sit ad curvaturam circuli illius, in duplicata ratione *TA* ad *TC*; & curvatura circuli illius ad curvaturam circuli centro *T* intervallo *TC* descripti, ut *TC* ad *TA*; hujus autem curvatura ad curvaturam ellipseos in *C*, in duplicata ratione *TA* ad *TC*; & differentia inter curvaturam ellipseos in vertice *C* & curvaturam circuli novissimi, ad differentiam inter curvaturam figuræ *Tpa* in vertice *C* & curvaturam ejusdem circuli, in duplicata ratione anguli *CTp* ad angulum *CTP*. Quæ quidem rationes ex sinubus angulorum contactus ac differentiarum angulorum facile colliguntur. His autem inter se collatis, prodit curvatura figuræ *Cpa* in *a* ad ipsius curvaturam in *C*, ut $AT\ cub. + \frac{16824}{100000} CTq \times AT$ ad $CT\ cub. + \frac{16824}{100000} ATq \times CT$. Ubi nume-

rus

rus $\frac{16824}{100007}$ designat differentiam quadratorum angulorum *CTP* & *CTp* applicatam ad quadratum anguli minoris *CTP*, seu (quod perinde est) differentiam quadratorum temporum $27^d. 7^h. 43'$, & $29^d. 12^h. 44'$, applicatam ad quadratum temporis $27^d. 7^h. 43'$.

Igitur cum *a* designet syzygiam lunæ, & *C* ipsius quadraturam, proportio jam inventa eadem esse debet cum proportione curvaturæ orbis lunæ in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis, quam supra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio *CT* ad *AT*, duco extrema & media in se invicem. Et termini prodeuntes ad $AT \times CT$ applicati, fiunt $2062{,}79\ CTqq - 2151969\ N \times CT\ cub. + 368676\ N \times AT \times CTq + 36342\ ATq \times CTq - 362047\ N \times ATq \times CT + 2191371\ N \times AT\ cub. + 4051{,}4\ ATqq = 0$. Hic pro terminorum *AT* & *CT* semisumma N scribo 1, & pro eorundem semidifferentia ponendo x, fit $CT = 1 + x$, & $AT = 1 - x$: quibus in æquatione scriptis, & æquatione prodeunte resoluta, obtinetur x æqualis 0,00719, & inde semidiameter *CT* fit 1,00719, & semidiameter *AT* 0,99281, qui numeri sunt ut $70\frac{1}{24}$ & $69\frac{1}{24}$ quam proxime. Est igitur distantia lunæ a terra in syzygiis ad ipsius distantiam in quadraturis (seposita scilicet eccentricitatis consideratione) ut $69\frac{1}{24}$ ad $70\frac{1}{24}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA X.

Invenire variationem lunæ.

Oritur hæc inæqualitas partim ex forma elliptica orbis lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam luna radio ad terram ducto describit. Si luna *P* in ellipsi *DBCA* circa terram in centro ellipseos quiescentem moveretur, & radio *TP* ad terram ducto describeret aream *CTP* tempori proportionalem; esset autem ellipseos semidiameter maxima *CT* ad semidiametrum minimam *TA* ut 70 ad 69: foret tangens anguli *CTP* ad tangentem anguli motus medii a quadratura *C* computati, ut ellipseos semidiameter *TA* ad ejusdem semidiametrum *TC* seu 69 ad 70. Debet autem descriptio areæ *CTP*, in progressu lunæ a quadratura ad syzygiam, ea ratione accelerari, ut ejus momentum in syzygia lunæ sit ad ejus momentum in quadratura ut 11073 ad 10973, utque excessus momenti in loco quovis intermedio *P* supra momentum in quadratura sit ut quadra-

De Mundi Systemate

tum ſinus anguli *CTP*. Id quod ſatis accurate fiet, ſi tangens anguli *CTP* diminuatur in ſubduplicata ratione numeri 10973 ad numerum 11073, id eſt, in ratione numeri 68,6877 ad numerum 69. Quo pacto tangens anguli *CTP* jam erit ad tangentem motus medii ut 68,6877 ad 70, & angulus *CTP* in octantibus, ubi motus medius eſt 45^{gr}. invenietur 44^{gr}. 27′. 28″. qui ſubductus de angulo motus medii 45^{gr}. relinquit variationem maximam 32′. 32″. Hæc ita ſe haberent ſi luna, pergendo a quadratura ad ſyzygiam, deſcriberet angulum *CTA* graduum tantum nonaginta. Verum ob motum terræ, quo ſol in conſequentia motu apparente transfertur, luna, priuſquam ſolem aſſequitur, deſcribit angulum *CTa* angulo recto majorem in ratione temporis revolutionis lunaris ſynodicæ ad tempus revolutionis periodicæ, id eſt, in ratione 29^{d}. 12^{h}. 44′. ad 27^{d}. 7^{h}. 43′. Et hoc pacto anguli omnes circa centrum *T* dilatantur in eadem ratione, & variatio maxima quæ ſecus eſſet 32′. 32″, jam aucta in eadem ratione fit 35′. 10″.

Hæc eſt ejus magnitudo in mediocri diſtantia ſolis a terra, neglectis differentiis quæ a curvatura orbis magni majorique ſolis actione in lunam falcatam & novam quam in gibboſam & plenam, oriri poſſint. In aliis diſtantiis ſolis a terra, variatio maxima eſt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione temporis revolutionis ſynodicæ lunaris (dato anni tempore) directe, & triplicata ratione diſtantiæ ſolis a terra inverſe. Ideoque in apogæo ſolis, variatio maxima eſt 33′. 14″, & in ejus perigæo 37′. 11″, ſi modo eccentricitas ſolis ſit ad orbis magni ſemidiametrum tranſverſam ut $16\frac{15}{16}$ ad 1000.

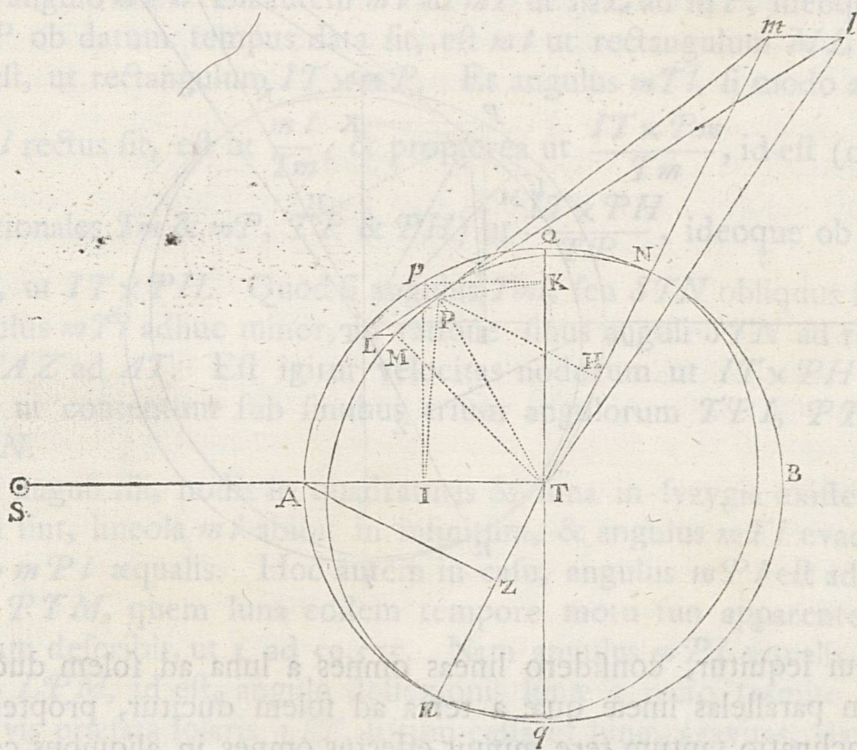
Hactenus variationem inveſtigavimus in orbe non eccentrico, in quo utique luna in octantibus ſuis ſemper eſt in mediocri ſua diſtantia a terra. Si luna propter eccentricitatem ſuam, magis vel minus diſtat a terra quam ſi locaretur in hoc orbe, variatio paulo major eſſe poteſt vel paulo minor quam pro regula hic allata: ſed exceſſum

cessum vel defectum ab astronomis per phænomena determinandum relinquo.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XI.

Invenire motum horarium nodorum lunæ in orbe circulari.

Designet *S* solem, *T* terram, *P* lunam, *NPn* orbem lunæ, *Npn* vestigium orbis in plano eclipticæ; *N*, *n* nodos, *nTNm* lineam nodorum infinite productam; *PI*, *PK* perpendicula demissa in lineas *ST*, *Qq*; *Pp* perpendiculum demissum in planum eclipticæ; *A*, *B* syzygias lunæ in plano eclipticæ; *AZ* perpendiculum in lineam no-



dorum *Nn*; *Q*, *q* quadraturas lunæ in plano eclipticæ, & *pK* perpendiculum in lineam *Qq* quadraturis interjacentem. Vis solis ad perturbandum motum lunæ (per. prop. xxv.) duplex est, altera lineæ *LM* in schemate propositionis illius, altera lineæ *MT* proportionalis. Et luna vi priore in terram, posteriore in solem secundum lineam rectæ

De Mundi Systemate

rectæ *ST* a terra ad solem ductæ parallelam trahitur. Vis prior *LM* agit secundum planum orbis lunaris, & propterea situm plani nil mutat. Hæc igitur negligenda est. Vis posterior *MT* qua planum orbis lunaris perturbatur eadem est cum vi 3*PK* vel 3*IT*. Et hæc vis (per prop. XXV.) est ad vim qua luna in circulo circa terram quiescentem tempore suo periodico uniformiter revolvi posset, ut 3*IT* ad radium circuli multiplicatum per numerum 178,725, sive ut *IT* ad radium multiplicatum per 59,575. Cæterum in hoc calculo, & eo

omni qui sequitur, considero lineas omnes a luna ad solem ductas tanquam parallelas lineæ quæ a terra ad solem ducitur, propterea quod inclinatio tantum fere minuit effectus omnes in aliquibus casibus, quantum auget in aliis; & nodorum motus mediocres quærimus, neglectis istiusmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

Designet jam *PM* arcum, quem luna dato tempore quam minimo describit, & *ML* lineolam cujus dimidium luna, impellente vi præfata 3*IT*, eodem tempore describere posset. Jungantur *PL*, *MP*,

& pro-

& producantur eæ ad m & l, ubi ſecent planum eclipticæ; inque Tm demittatur perpendiculum PH. Et quoniam recta ML parallela eſt plano eclipticæ, ideoque cum recta ml quæ in plano illo jacet concurrere non poteſt, & tamen jacent hæ rectæ in plano communi $LMPml$; parallelæ erunt hæ rectæ, & propterea ſimilia erunt triangula LMP, lmP. Jam cum MPm ſit in plano orbis, in quo luna in loco P movebatur, incidet punctum m in lineam Nn per orbis illius nodos N, n ductam. Et quoniam vis qua dimidium lineolæ LM generatur, ſi tota ſimul & ſemel in loco P impreſſa eſſet, generaret lineam illam totam; & efficeret ut luna moveretur in arcu, cujus chorda eſſet LP, atque ideo transferret lunam de plano $MPmT$ in planum $LPlT$; motus angularis nodorum a vi illa genitus, æqualis erit angulo mTl. Eſt autem ml ad mP ut ML ad MP, ideoque cum MP ob datum tempus data ſit, eſt ml ut rectangulum $ML \times mP$, id eſt, ut rectangulum $IT \times mP$. Et angulus mTl, ſi modo angulus Tml rectus ſit, eſt ut $\frac{ml}{Tm}$, & propterea ut $\frac{IT \times Pm}{Tm}$, id eſt (ob proportionales Tm & mP, TP & PH) ut $\frac{IT \times PH}{TP}$, ideoque ob datam TP, ut $IT \times PH$. Quod ſi angulus Tml, ſeu STN obliquus ſit, erit angulus mTl adhuc minor, in ratione ſinus anguli STN ad radium, ſeu AZ ad AT. Eſt igitur velocitas nodorum ut $IT \times PH \times AZ$, ſive ut contentum ſub ſinubus trium angulorum TPI, PTN & STN.

Si anguli illi, nodis in quadraturis & luna in ſyzygia exiſtentibus, recti ſint, lineola ml abibit in infinitum, & angulus mTl evadet angulo mPl æqualis. Hoc autem in caſu, angulus mPl eſt ad angulum PTM, quem luna eodem tempore motu ſuo apparente circa terram deſcribit, ut 1 ad 59,575. Nam angulus mPl æqualis eſt angulo LPM, id eſt, angulo deflexionis lunæ a recto tramite, quem ſola vis præfata ſolaris $3IT$, ſi tum ceſſaret lunæ gravitas, dato illo tempore generare poſſet; & angulus PTM æqualis eſt angulo deflexionis lunæ a recto tramite, quem vis illa, qua luna in orbe ſuo retinetur, ſi tum ceſſaret vis ſolaris $3IT$, eodem tempore generaret. Et hæ vires, ut ſupra diximus, ſunt ad invicem ut 1 ad 59,575. Ergo cum motus medius horarius lunæ reſpectu fixarum ſit $32'.\ 56''.\ 27'''.\ 12^{iv}\frac{1}{2}$, motus horarius nodi in hoc caſu erit $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.\ 12^{v}$. Aliis autem

autem in caſibus motus iſte horarius erit ad $33''. 10'''. 33^{iv}. 12^{v}.$ ut contentum ſub ſinubus angulorum trium TPI, PTN, & STN (ſeu diſtantiarum lunæ a quadratura, lunæ a nodo, & nodi a ſole) ad cubum radii. Et quoties ſignum anguli alicujus de affirmativo in negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regreſſivus in progreſſivum & progreſſivus in regreſſivum mutari. Unde fit ut nodi progrediantur quoties luna inter quadraturam alterutram & nodum quadraturæ proximum verſatur. Aliis in caſibus regrediuntur, & per exceſſum regreſſus ſupra progreſſum ſingulis menſibus feruntur in antecedentia.

Corol. 1. Hinc ſi a dati arcus quam minimi PM terminis P & M ad lineam quadraturas jungentem Qq demittantur perpendicula PK, Mk, eademque producantur donec ſecent lineam nodorum Nn in D & d; erit motus horarius nodorum ut area $MPDd$ & quadratum lineæ AZ conjunctim. Sunto enim PK, PH & AZ prædicti tres ſinus. Nempe PK ſinus diſtantiæ lunæ a quadratura, PH ſinus diſtantiæ lunæ a nodo, & AZ ſinus diſtantiæ nodi a ſole: & erit velocitas nodi ut contentum $PK \times PH \times AZ$. Eſt autem PT ad PK ut PM ad Kk, ideoque ob datas PT & PM eſt Kk ipſi PK proportionalis. Eſt & AT ad PD ut AZ ad PH, & propterea PH rectangulo $PD \times AZ$ proportionalis, & conjunctis rationibus, $PK \times PH$ eſt ut contentum $Kk \times PD \times AZ$, & $PK \times PH \times AZ$ ut $Kk \times PD \times AZ$ *qu.* id eſt, ut area $PDdM$ & AZ *qu.* conjunctim. *Q. E. D.*

Corol.

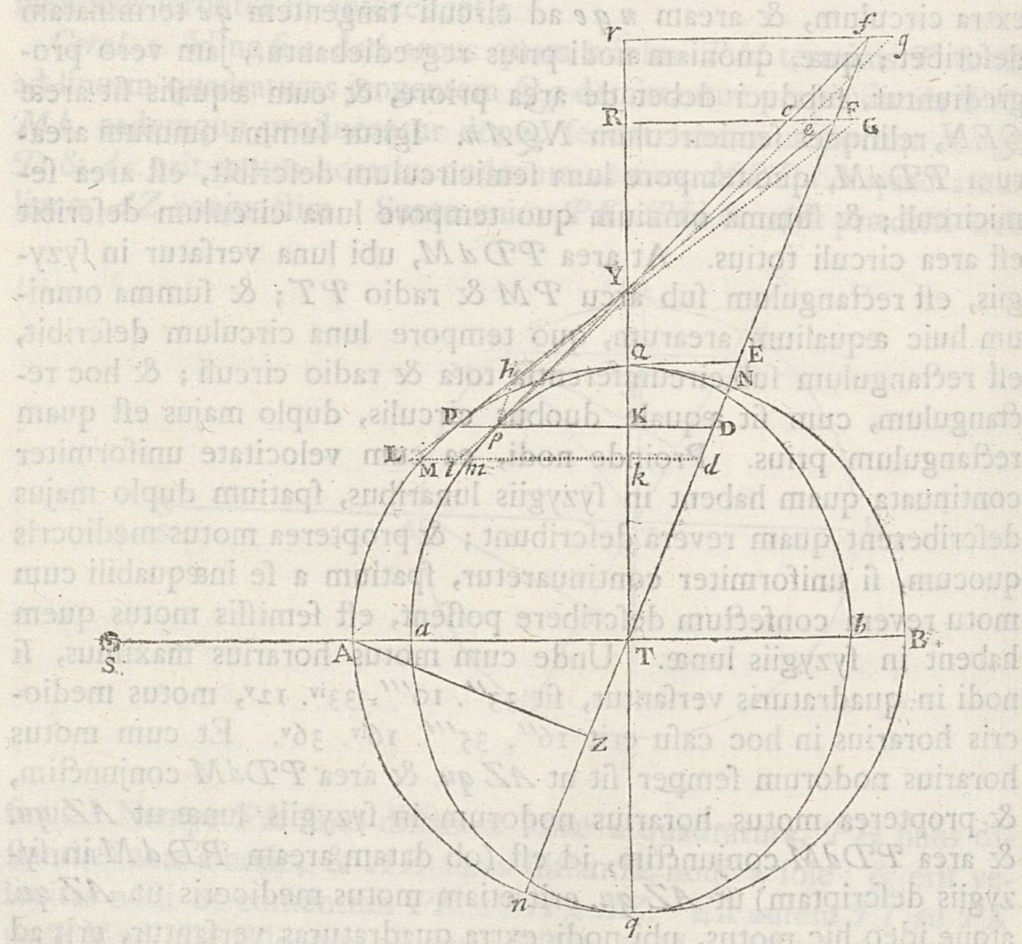
Corol. 2. In data quavis nodorum positione, motus horarius mediocris est semissis motus horarii in syzygiis lunæ, ideoque est ad 16″. 35‴. 16^{iv} 36^{v}. ut quadratum sinus distantiæ nodorum a syzygiis ad quadratum radii, sive ut *AZ qu.* ad *AT qu.* Nam si luna uniformi cum motu perambulet semicirculum *QAq*, summa omnium arearum *PDdM*, quo tempore luna pergit a *Q* ad *M*, erit area *QMdE* quæ ad circuli tangentem *QE* terminatur; & quo tempore luna attingit punctum *n*, summa illa erit area tota *EQAn* quam linea *PD* describit, dein luna pergente ab *n* ad *q*, linea *PD* cadet extra circulum, & aream *nqe* ad circuli tangentem *qe* terminatam describet; quæ, quoniam nodi prius regrediebantur, jam vero progrediuntur, subduci debet de area priore, & cum æqualis sit areæ *QEN*, relinquet semicirculum *NQAn*. Igitur summa omnium arearum *PDdM*, quo tempore luna semicirculum describit, est area semicirculi; & summa omnium quo tempore luna circulum describit est area circuli totius. At area *PDdM*, ubi luna versatur in syzygiis, est rectangulum sub arcu *PM* & radio *PT*; & summa omnium huic æqualium arearum, quo tempore luna circulum describit, est rectangulum sub circumferentia tota & radio circuli; & hoc rectangulum, cum sit æquale duobus circulis, duplo majus est quam rectangulum prius. Proinde nodi, ea cum velocitate uniformiter continuata quam habent in syzygiis lunaribus, spatium duplo majus describerent quam revera describunt; & propterea motus mediocris quocum, si uniformiter continuaretur, spatium a se inæquabili cum motu revera confectum describere possent, est semissis motus quem habent in syzygiis lunæ. Unde cum motus horarius maximus, si nodi in quadraturis versantur, sit 33″. 10‴. 33^{iv}. 12^{v}, motus mediocris horarius in hoc casu erit 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. Et cum motus horarius nodorum semper sit ut *AZ qu.* & area *PDdM* conjunctim, & propterea motus horarius nodorum in syzygiis lunæ ut *AZ qu.* & area *PDdM* conjunctim, id est (ob datam aream *PDdM* in syzygiis descriptam) ut *AZ qu.* erit etiam motus mediocris ut *AZ qu.* atque ideo hic motus, ubi nodi extra quadraturas versantur, erit ad 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut *AZ qu.* ad *AT qu.* *Q. E. D.*

De Mundi Systemate.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XII.

Invenire motum horarium nodorum lunæ in orbe elliptico.

Designet *Qpmaq* ellipsin, axe majore *Qq*, minore *ab* descriptam, *QAqB* circulum circumscriptum, *T* terram in utriusque centro communi, *S* solem, *p* lunam in ellipsi motam, & *pm* arcum quem data temporis particula quam minima describit, *N* & *n* nodos



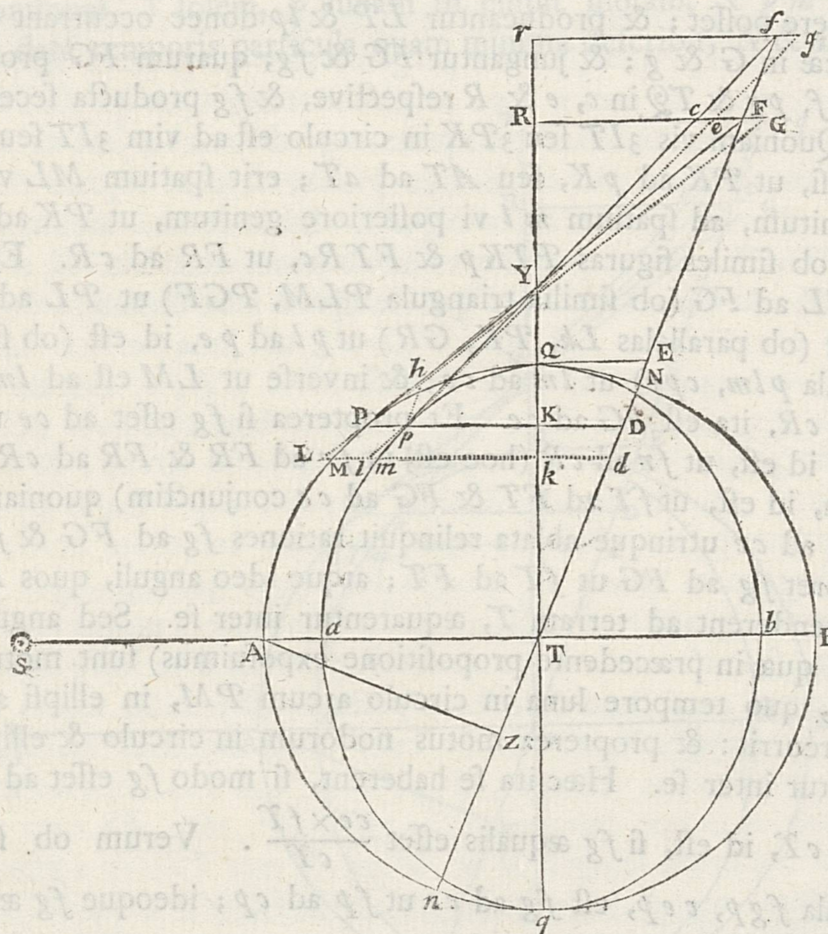
linea *Nn* junctos, *pK* & *mk* perpendicula in axem *Qq* demissa & hinc inde producta, donec occurrant circulo in *P* & *M*, & lineæ nodorum in *D* & *d*. Et si luna, radio ad terram ducto, aream describat tempori proportionalem, erit motus horarius nodi in ellipsi ut area *pDdm* & *AZq* conjunctim.

Nam

Nam si PF tangat circulum in P, & producta occurrat TN in F, & pf tangat ellipsin in p & producta occurrat eidem TN in f, conveniant autem hæ tangentes in axe TQ ad Y; & si ML designet spatium quod luna in circulo revolvens, interea dum describit arcum PM, urgente & impellente vi prædicta $3IT$, seu $3PK$ motu transverso describere posset, & ml designet spatium quod luna in ellipsi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi $3IT$ seu $3PK$, describere posset; & producantur LP & lp donec occurrant plano eclipticæ in G & g; & jungantur FG & fg, quarum FG producta secet pf, pg & TQ in c, e & R respective, & fg producta secet TQ in r. Quoniam vis $3IT$ seu $3PK$ in circulo est ad vim $3IT$ seu $3pK$ in ellipsi, ut PK ad pK, seu AT ad aT; erit spatium ML vi priore genitum, ad spatium ml vi posteriore genitum, ut PK ad pK, id est, ob similes figuras $PYKp$ & $FYRc$, ut FR ad cR. Est autem ML ad FG (ob similia triangula PLM, PGF) ut PL ad PG, hoc est (ob parallelas Lk, PK, GR) ut pl ad pe, id est (ob similia triangula plm, cpe) ut lm ad ce; & inverse ut LM est ad lm, seu FR ad cR, ita est FG ad ce. Et propterea si fg esset ad ce ut fY ad cY, id est, ut fr ad cR (hoc est, ut fr ad FR & FR ad cR conjunctim, id est, ut fT ad FT & FG ad ce conjunctim) quoniam ratio FG ad ce utrinque ablata relinquit rationes fg ad FG & fT ad FT, foret fg ad FG ut fT ad FT; atque ideo anguli, quos FG & fg subtenderent ad terram T, æquarentur inter se. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente propositione exposuimus) sunt motus nodorum, quo tempore luna in circulo arcum PM, in ellipsi arcum pm percurrit: & propterea motus nodorum in circulo & ellipsi æquarentur inter se. Hæc ita se haberent, si modo fg esset ad ce ut fY ad cY, id est, si fg æqualis esset $\frac{ce \times fY}{cY}$. Verum ob similia triangula fgp, cep, est fg ad ce ut fp ad cp; ideoque fg æqualis est $\frac{ce \times fp}{cp}$; & propterea angulus, quem fg revera subtendit, est ad angulum priorem, quem FG subtendit, hoc est, motus nodorum in ellipsi ad motum nodorum in circulo, ut hæc fg seu $\frac{ce \times fp}{cp}$ ad priorem fg seu $\frac{ce \times fY}{cY}$, id est, ut $fp \times cY$ ad $fY \times cp$, seu fp ad fY &

 cY

$c\Upsilon$ ad cp, hoc est, si ph ipsi TN parallela occurrat FP in h, ut Fh ad $F\Upsilon$ & $F\Upsilon$ ad FP; hoc est, ut Fh ad FP seu Dp ad DP, ideoque ut area $Dpmd$ ad aream $DPMd$. Et propterea, cum (per corol. 1. prop. XXX.) area posterior & AZq conjunctim proportionalia sint motui horario nodorum in circulo, erunt area prior & AZq conjunctim proportionalia motui horario nodorum in ellipsi. *Q. E. D.*



Corol. Quare cum, in data nodorum positione, summa omnium arearum $pDdm$, quo tempore luna pergit a quadratura ad locum quemvis m, sit area $mpQEd$, quæ ad ellipseos tangentem QE terminatur; & summa omnium arearum illarum, in revolutione integra, sit area ellipseos totius: motus mediocris nodorum in ellipsi erit ad motum mediocrem nodorum in circulo, ut ellipsis ad circulum;

lum; id eſt, ut *Ta* ad *TA*, ſeu 69 ad 70. Et propterea, cum (per corol. 2. prop. xxx.) motus mediocris horarius nodorum in circulo ſit ad 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut *AZ qu.* ad *AT qu.* ſi capiatur angulus 16″. 21‴. 3^{iv}. 30^{v}. ad angulum 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut 69 ad 70, erit motus mediocris horarius nodorum in ellipſi ad 16″. 21‴. 3^{iv}. 30^{v}. ut *AZq* ad *ATq*; hoc eſt, ut quadratum ſinus diſtantiæ nodi a ſole ad quadratum radii.

Cæterum luna, radio ad terram ducto, aream velocius deſcribit in ſyzygiis quam in quadraturis, & eo nomine tempus in ſyzygiis contrahitur, in quadraturis producitur; & una cum tempore motus nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in quadraturis lunæ ad ejus momentum in ſyzygiis ut 10973 ad 11073; & propterea momentum mediocre in octantibus eſt ad exceſſum in ſyzygiis, defectumque in quadraturis, ut numerorum ſemiſumma 11023 ad eorundem ſemidifferentiam 50. Unde cum tempus lunæ in ſingulis orbis particulis æqualibus ſit reciproce ut ipſius velocitas, erit tempus mediocre in octantibus ad exceſſum temporis in quadraturis, ac defectum in ſyzygiis, ab hac cauſa oriundum, ut 11023 ad 50 quam proxime. Pergendo autem a quadraturis ad ſyzygias, invenio quod exceſſus momentorum areæ in locis ſingulis, ſupra momentum minimum in quadraturis, ſit ut quadratum ſinus diſtantiæ lunæ a quadraturis quam proxime; & propterea differentia inter momentum in loco quocunque & momentum mediocre in octantibus, eſt ut differentia inter quadratum ſinus diſtantiæ lunæ a quadraturis & quadratum ſinus graduum 45, ſeu ſemiſſem quadrati radii; & incrementum temporis in locis ſingulis inter octantes & quadraturas, & decrementum ejus inter octantes & ſyzygias, eſt in eadem ratione. Motus autem nodorum, quo tempore luna percurrit ſingulas orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicata ratione temporis. Eſt enim motus iſte, dum luna percurrit *PM* (cæteris paribus) ut *ML*, & *ML* eſt in duplicata ratione temporis. Quare motus nodorum in ſyzygiis, eo tempore confectus quo luna datas orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicata ratione numeri 11073 ad numerum 11023; eſtque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum vero totum ut 100 ad 11073 quam proxime. Decrementum autem in locis inter octantes & ſyzygias, & incrementum in locis inter octantes & quadraturas, eſt

quam

De Mundi Systemate

quam proxime ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in ſyzygiis & differentia inter quadratum ſinus diſtantiæ lunæ a quadratura & ſemiſſem quadrati radii ad ſemiſſem quadrati radii conjunctim. Unde ſi nodi in quadraturis verſentur, & capiantur loca duo æqualiter ab octante hinc inde diſtantia, & alia duo a ſyzygia & quadratura iiſdem intervallis diſtantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter ſyzygiam & octantem, ſubducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ ſunt inter octantem & quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in ſyzygia: uti rationem ineunti facile conſtabit. Proindeque decrementum mediocre, quod de nodorum motu mediocri ſubduci debet, eſt pars quarta decrementi in ſyzygia. Motus totus horarius nodorum in ſyzygiis, ubi luna radio ad terram ducto aream tempori proportionalem deſcribere ſupponebatur, erat $32''. 42'''. 7^{iv}$. Et decrementum motus nodorum, quo tempore luna jam velocior deſcribit idem ſpatium, diximus eſſe ad hunc motum ut 100 ad 11073; ideoque decrementum illud eſt $17'''. 43^{iv}. 11^{v}$, cujus pars quarta $4'''. 25^{iv}. 48^{v}$. motui horario mediocri ſuperius invento $16''. 21'''. 3^{i}. 30^{v}$. ſubducta, relinquit $16''. 16'''. 37^{iv}. 42^{v}$. motum mediocrem horarium correctum.

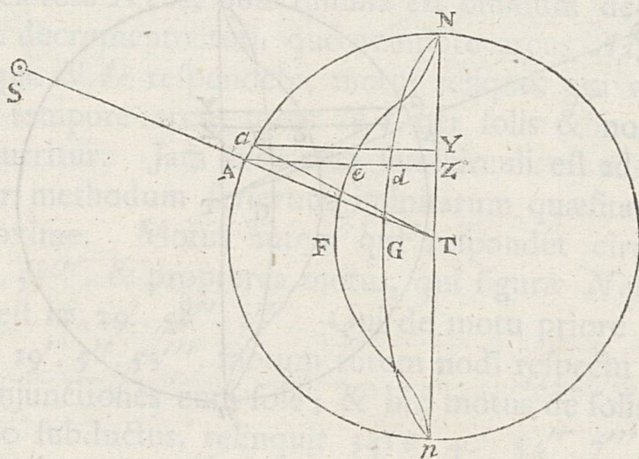
Si nodi verſantur extra quadraturas, & ſpectentur loca bina a ſyzygiis hinc inde æqualiter diſtantia; ſumma motuum nodorum, ubi luna verſatur in his locis, erit ad ſummam motuum, ubi luna in iiſdem locis & nodi in quadraturis verſantur, ut *AZ qu.* ad *AT qu.* Et decrementa motuum, a cauſis jam expoſitis oriunda, erunt ad invicem ut ipſi motus, ideoque motus reliqui erunt ad invicem ut *AZ qu.* ad *AT qu.* & motus mediocres ut motus reliqui. Eſt itaque motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque nodorum ſitu, ad $16''. 16'''. 37^{iv}. 42^{v}$. ut *AZ qu.* ad *AT qu.*; id eſt, ut quadratum ſinus diſtantiæ nodorum a ſyzygiis ad quadratum radii.

PROPO-

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XIII.

Invenire motum medium nodorum lunæ.

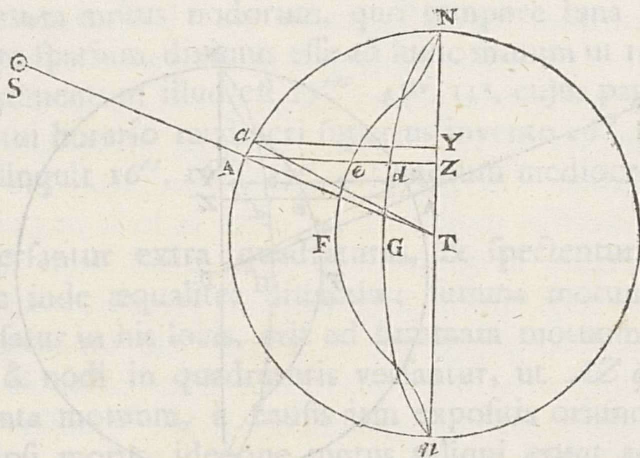
Motus medius annuus est summa motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe nodum versari in *N*, & singulis horis completis retrahi in locum suum priorem, ut non obstante motu suo proprio, datum semper servet situm ad stellas fixas. Interea vero solem *S*, per motum terræ, progredi a nodo, & cursum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem *Aa* arcus datus quam minimus, quem recta *TS* ad solem semper ducta, intersectione sui & circuli *NAn*, dato tempore quam minimo describit: & motus horarius mediocris (per jam ostensa) erit ut *AZq*, id est (ob proportionales *AZ*, *ZY*) ut rectangulum sub *AZ* & *ZY*, hoc est, ut



area *AZYa*. Et summa omnium horariorum motuum mediocrium ab initio, ut summa omnium arearum *aYZA*, id est, ut area *NAZ*. Est autem maxima *AZYa* æqualis rectangulo sub arcu *Aa* & radio circuli; & propterea summa omnium rectangulorum in circulo toto ad summam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum sub circumferentia tota & radio, id est, ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo respondens, erat $16''. 16'''. 37^{iv}. 42^{v}$. Et hic motus, anno toto sidereo dierum 365. hor. 6. min. 9. fit $39^{gr}. 38'. 7''. 50'''$. Ideoque hujus dimidium $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. est motus

motus medius nodorum circulo toti respondens. Et motus nodorum, quo tempore sol pergit ab *N* ad *A*, est ad $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''.$ ut area *NAZ* ad circulum totum.

Hæc ita se habent ex hypothesi, quod nodus horis singulis in locum priorem retrahitur, sic ut sol anno toto completo ad nodum eundem redeat a quo sub initio digressus fuerat. Verum per motum nodi fit ut sol citius ad nodum revertatur, & computanda jam est abbreviatio temporis. Cum sol anno toto conficiat 360 gradus, & nodus motu maximo eodem tempore conficeret $39^{gr}. 38'. 7''. 50'''$, seu 39,6355 gradus; & motus mediocris nodi in loco quovis *N* sit ad ipsius motum mediocrem in quadraturis suis, ut *AZq* ad *ATq*: erit motus solis ad motum nodi in *N*, ut 360 *ATq* ad 39,6355 *AZq*; id est, ut 9,0827667 *ATq* ad *AZq*. Unde si circuli totius circum-



ferentia *NAn* dividatur in particulas æquales *Aa*, tempus quo sol percurrat particulam *Aa*, si circulus quiesceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, si circulus una cum nodis circa centrum *T* revolvatur, reciproce ut 9,0827667 *ATq* ad 9,0827667 *ATq* + *AZq*. Nam tempus est reciproce ut velocitas qua particula percurritur, & hæc velocitas est summa velocitatum solis & nodi. Igitur si tempus, quo sol sine motu nodi percurreret arcum *NA*, exponatur per sectorem *NTA*, & particula temporis quo percurreret arcum quam minimum *Aa*, exponatur per sectoris particulam *ATa*; & (perpendiculo *aY* in *Nn* demisso) si in *AZ* capiatur *dZ*, ejus longitudinis

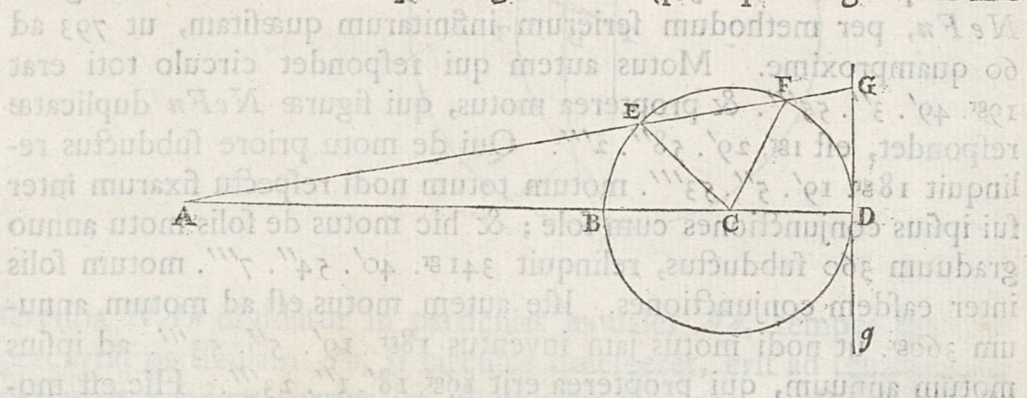
gitudinis ut sit rectangulum dZ in ZY ad sectoris particulam ATa ut AZq ad $9,0827646\ ATq + AZq$, id est, ut sit dZ ad $\frac{1}{2}AZ$ ut ATq ad $9,0827646\ ATq + AZq$; rectangulum dZ in ZY designabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum, tempore toto quo arcus Aa percurritur. Et si punctum d tangit curvam $NdGn$, area curvilinea NdZ erit decrementum totum, quo tempore arcus totus NA percurritur; & propterea excessus sectoris NAT supra aream NdZ erit tempus illud totum. Et quoniam motus nodi tempore minore minor est in ratione temporis, debebit etiam area $AaYZ$ diminui in eadem ratione. Id quod fiet si capiatur in AZ longitudo eZ, quæ sit ad longitudinem AZ ut AZq ad $9,0827646\ ATq + AZq$. Sic enim rectangulum eZ in ZY erit ad aream $AZYa$ ut decrementum temporis, quo arcus Aa percurritur, ad tempus totum quo percurreretur, si nodus quiesceret: & propterea rectangulum illud respondebit decremento motus nodi. Et si punctum e tangat curvam $NeFn$, area tota NeZ, quæ summa est omnium decrementorum, respondebit decremento toti, quo tempore arcus AN percurritur; & area reliqua NAe respondebit motui reliquo, qui verus est nodi motus, quo tempore arcus totus NA per solis & nodi conjunctos motus percurritur. Jam vero area semicirculi est ad aream figuræ $NeFn$, per methodum serierum infinitarum quæsitam, ut 793 ad 60 quamproxime. Motus autem qui respondet circulo toti erat $19^{gr}.\ 49'.\ 3''.\ 55'''$. & propterea motus, qui figuræ $NeFn$ duplicatæ respondet, est $1^{gr}.\ 29'.\ 58''.\ 2'''$. Qui de motu priore subductus relinquit $18^{gr}.\ 19'.\ 5''.\ 53'''$. motum totum nodi respectu fixarum inter sui ipsius conjunctiones cum sole; & hic motus de solis motu annuo graduum 360 subductus, relinquit $341^{gr}.\ 40'.\ 54''.\ 7'''$. motum solis inter easdem conjunctiones. Iste autem motus est ad motum annuum 360^{gr}. ut nodi motus jam inventus $18^{gr}.\ 19'.\ 5''.\ 53'''$. ad ipsius motum annuum, qui propterea erit $19^{gr}.\ 18'.\ 1''.\ 23'''$. Hic est motus medius nodorum in anno sidereo. Idem per tabulas astronomicas est $19^{gr}.\ 21'\ 21''.\ 50'''$. Differentia minor est parte trecentesima motus totius, & ab orbis lunaris eccentricitate & inclinatione ad planum eclipticæ oriri videtur. Per eccentricitatem orbis motus nodorum nimis acceleratur, & per ejus inclinationem vicissim retardatur aliquantulum, & ad justam velocitatem reducitur.

De Mundi Systemate

PROPOSITIO XXXIII. PROBLEMA XIV.

Invenire motum verum nodorum lunæ.

In tempore quod est ut area *NTA—NdZ*, *(in fig. præced.)* motus iste est ut area *NAe*, & inde datur. Verum ob nimiam calculi difficultatem, præstat sequentem problematis constructionem adhibere. Centro *C*, intervallo quovis *CD*, describatur circulus *BEFD*. Producatur *DC* ad *A*, ut sit *AB* ad *AC* ut motus medius ad semissem motus veri mediocris, ubi nodi sunt in quadraturis, id est, ut 19gr. 18′. 1″. 23‴. ad 19gr. 49′. 3″. 55‴, atque ideo *BC* ad *AC* ut motuum differentia 0gr. 31′. 2″. 32‴, ad motum posteriorem 19gr, 49′. 3″. 55‴. hoc est, ut 1 ad $38\frac{3}{10}$; dein per punctum *D* ducatur infinita *Gg*, quæ tangat circulum in *D*; & si capiatur angulus *BCE* vel *BCF* æqualis duplæ distantiæ solis a loco nodi, per motum medium invento; & agatur *AE* vel *AF* secans perpendiculum *DG* in *G*; & capiatur angulus qui sit ad motum totum nodi inter ipsius syzygias (id est, ad 9gr. 11′. 3″.) ut tangens *DG* ad circuli *BED* circumferentiam totam; atque angulus iste (pro quo angulus *DAG*



usurpari potest) ad motum medium nodorum addatur ubi nodi transeunt a quadraturis ad syzygias, & ab eodem motu medio subducatur ubi transeunt a syzygiis ad quadraturas; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus sic inventus congruet quam proxime cum motu vero qui prodit exponendo tempus per aream *NTA—NdZ*, & motum nodi per aream *NAe*; ut rem perpendenti & computationes instituenti constabit. Hæc est æquatio semestris motus nodorum.

nodorum. Est & æquatio menstrua, sed quæ ad inventionem latitudinis lunæ minime necessaria est. Nam cum variatio inclinationis orbis lunaris ad planum eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia sit, alteri semestri, alteri autem menstruæ; hujus menstrua inæqualitas & æquatio menstrua nodorum ita se mutuo contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinanda latitudine lunæ negligi possint.

Corol. Ex hac & præcedente propositione liquet quod nodi in syzygiis suis quiescunt, in quadraturis autem regrediuntur motu horario 16″. 19‴. 26^{iv}. Et quod æquatio motus nodorum in octantibus sit 1^{gr}. 30′. Quæ omnia cum phænomenis cœlestibus probe quadrant.

Scholium.

Alia ratione motum nodorum *J. Machin Astron. Prof. Gresham.* & *Hen. Pemberton* M. D. seorsum invenerunt. Hujus methodi mentio quædam alibi facta est. Et utriusque chartæ, quas vidi, duas propositiones continebant, & inter se in utrisque congruebant. Chartam vero D. *Machin*, cum prior in manus meas venerit, hic adjungam.

DE MOTU NODORUM LUNÆ.

PROPOSITIO I.

" *Motus solis medius a nodo, definitur per medium proportionale geometricum, inter motum ipsius solis medium, & motum illum mediocrem quo sol celerrimè recedit a nodo in quadraturis.*

" Sit *T* locus ubi terra, *Nn* linea nodorum lunæ ad tempus quodvis datum, *KTM* huic ad rectos angulos ducta, *TA* recta circum centrum revolvens ea cum velocitate angulari qua sol & nodus a se invicem recedunt, ita ut angulus inter rectam quiescentem *Nn* & revolventem *TA*, semper fiat æqualis distantiæ locorum solis & nodi. Jam si recta quævis *TK* dividatur in partes *TS* & *SK* quæ sint ut motus solis horarius medius ad motum horarium mediocrem nodi in quadraturis, & ponatur recta *TH* media proportionalis inter partem *TS* & totam *TK*, hæc recta inter reliquas proportionalis erit motui medio solis a nodo.

" Describatur enim circulus *NKnM* centro *T* & radio *TK*, eo-
" demque centro & semiaxibus *TH* & *TN* describatur ellipsis *NH*
" *nL*, & in tempore quo sol a nodo recedit per arcum *Na*, si du-
" catur recta *Tba*, area sectoris *NTa* exponet summam motuum
" nodi & solis in eodem tempore. Sit igitur arcus *aA* quam mini-
" mus quem recta *Tba* præfata lege revolvens in datâ temporis par-
" ticula uniformiter describit, & sector quam minimus *TAa* erit ut
" summa velocitatum qua sol & nodus tum temporis seorsim fe-
" runtur. Solis autem velocitas ferè uniformis est, utpote cujus parva
" inæqualitas vix ullam inducit in medio nodorum motu varieta-
" tem. Altera pars hujus summæ nempe velocitas nodi in medio-
" cri sua quantitate, augetur in recessu a syzygiis in duplicata rati-
" one sinus distantiæ ejus a sole; per Coroll. Prop. 31. Lib. 3[tii] Prin-
" cip. & cum maxima est in quadraturis ad solem in *K*, eandem ra-
" tionem obtinet ad solis velocitatem ac ea quam habet *SK* ad *TS*
" hoc est ut (differentia quadratorum ex *TK* & *TH* vel) rectangu-
" lum *KHM* ad *TH* quadratum. Sed ellipsis *NBH* dividit secto-
" rem *ATa* summæ harum duarum velocitatum exponentem, in
" duas partes *ABba* & *BTb* ipsis velocitatibus proportionales.
" Producatur enim *BT* ad circulum in *β*, & a puncto *B* demitta-

" tur

" tur ad axem majorem perpendicularis *BG*, quæ utrinque producta
" occurrat circulo in punctis *F* & *f*, & quoniam spatium *AB ba* est
" ad sectorem *TBb* ut rectangulum *ABβ* ad *BT* quadratum
" (rectangulum enim illud æquatur differentiæ quadratorum ex *TA*
" & *TB* ob rectam *Aβ* æqualiter & inæqualiter sectam in *T* & *B*.)
" Hæc igitur ratio ubi spatium *AB ba* maximum est in *K*, eadem
" erit ac ratio rectanguli *KHM* ad *HT* quadratum, sed maxima
" nodi mediocris velocitas erat ad solis velocitatem in hac ratione.
" Igitur in quadraturis sector *ATa* dividitur in partes velocitatibus
" proportionales. Et quoniam rectang. *KHM* est ad *HT* quadr. ut
" *FBf* ad *BG* quad. & rectangulum *ABβ* æquatur rectangulo *FBf*.
" Erit igitur areola *ABba* ubi maxima est ad reliquum sectorem
" *TB b*, ut rectang. *ABβ* ad *BG* quadr. Sed ratio harum areo-
" larum semper erat ut *ABβ* rectang. ad *BT* quadratum; & pro-
" pterea areola *AB ba* in loco *A* minor est simili areola in qua-
" draturis, in duplicata ratione *BG* ad *BT* hoc est in duplicata ra-
" tione sinus distantiæ solis a nodo. Et proinde summa omnium are-
" olarum *ABba* nempe spatium *ABN* erit ut motus nodi in tem-
" pore quo sol digreditur a nodo per arcum *NA*. Et spatium re-
" liquum nempe sector ellipticus *NTB* erit ut motus solis medius
" in eodem tempore. Et propterea quoniam annuus motus nodi
" medius, is est qui fit in tempore quo sol periodum suam absol-
" verit, motus nodi medius a sole erit ad motum ipsius solis medi-
" um, ut area circuli ad aream ellipseos, hoc est ut recta *TK* ad
" rectam *TH* mediam scilicet proportionalem inter *TK* & *TS*; vel
" quod eodem redit ut media proportionalis *TH* ad rectam *TS*.

PROPOSITIO II.

" *Dato motu medio nodorum lunæ invenire motum verum.*

" Sit angulus *A* distantia solis a loco nodi medio, sive motus me-
" dius solis a nodo. Tum si capiatur angulus *B* cujus tangens sit
" ad tangentem anguli *A* ut *TH* ad *TK*, hoc est in subduplicata ra-
" tione motus mediocris horarii solis ad motum mediocrem hora-
" rium solis a nodo in quadraturis versante; erit idem angulus *B*
" distantia solis a loco nodi vero. Nam jungatur *FT* & ex demon-

" stratione

" ſtratione propoſitionis ſuperioris erit angulus *FTN* diſtantia ſolis " a loco nodi medio, angulus autem *ATN* diſtantia a loco vero, & " tangentes horum angulorum ſunt inter ſe ut *TK* ad *TH*.

" *Coroll.* Hinc angulus *FTA* eſt æquatio nodorum lunæ, ſinuſque " hujus anguli ubi maximus eſt in octantibus, eſt ad radium ut *KH* " ad *TK*+*TH*. Sinus autem hujus æquationis in loco quovis alio " *A* eſt ad ſinum maximum, ut ſinus ſummæ angulorum *FTN*+*ATN* " ad radium: hoc eſt fere ut ſinus duplæ diſtantiæ ſolis a loco nodi " medio (nempe 2 *FTN*) ad radium.

Scholium.

" Si motus nodorum mediocris horarius in quadraturis ſit 16″. " 16‴. 37^{iv}. 42^{v}. hoc eſt in anno toto ſidereo 39°. 38′. 7″. 50‴. " erit *TH* ad *TK* in ſubduplicata ratione numeri 9,0827646 ad nu- " merum 10,0827646, hoc eſt ut 18,6524761 ad 19,6524761. Et pro- " pterea *TH* ad *HK* ut 18,6524761 ad 1. hoc eſt ut motus ſolis in " anno ſidereo ad motum nodi medium 19°. 18′, 1″. 23‴$\frac{2}{3}$.

" At ſi motus medius nodorum Lunæ in 20 annis Julianis ſit " 386°. 50′. 15″. ſicut ex obſervationibus in theoria lunæ adhi- " bitis deducitur: motus medius nodorum in anno ſidereo erit 19°. " 20′. 31″. 58‴. Et *TH* erit ad *HK* ut 360^{gr}. ad 19°. 20′. 31″. 58‴. " hoc eſt ut 18,61214 ad 1. unde motus mediocris horarius nodorum " in quadraturis evadet 16″. 18‴. 48^{iv}. Et æquatio nodorum maxi- " ma in octantibus 1°. 29′. 57″.

PROPOSITIO XXXIV. PROBLEMA XV.

Invenire variationem horariam inclinationis orbis lunaris ad planum eclipticæ.

Deſignent *A* & *a* ſyzygias; *Q* & *q* quadraturas; *N* & *n* nodos; *P* locum lunæ in orbe ſuo; *p* veſtigium loci illius in plano eclipticæ, & *mTl* motum momentaneum nodorum ut ſupra. Et ſi ad lineam *Tm* demittatur perpendiculum *PG*, jungatur *pG*, & producatur ea donec occurrat *Tl* in *g*, & jungatur etiam *Pg*: erit angulus *PGp* inclinatio orbis lunaris ad planum eclipticæ, ubi luna verſatur in *P*; & angulus *Pgp* inclinatio ejuſdem poſt momentum temporis completum;

pletum; ideoque angulus GPg variatio momentanea inclinationis. Est autem hic angulus GPg ad angulum GTg ut TG ad PG & Pp ad PG conjunctim. Et propterea si pro momento temporis substituatur hora; cum angulus GTg (per prop. xxx.) sit ad angulum $33''$. $10'''$. 33^{iv}. ut $IT \times PG \times AZ$ ad AT *cub.* erit angulus GPg (seu inclinationis horaria variatio) ad angulum $33''$. $10'''$. 33^{iv}. ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* *Q. E. I.*

Hæc ita se habent ex hypothesi quod luna in orbe circulari uniformiter gyratur. Quod si orbis ille ellipticus sit, motus mediocris nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti supra expositum est. Et in eadem ratione minuetur etiam inclinationis variatio.

Corol.

Corol. 1. Si ad Nn erigatur perpendiculum TF, ſitque pM motus horarius lunæ in plano eclipticæ; & perpendicula pK, Mk in QT demiſſa & utrinque producta occurrant TF in H & h: erit IT ad AT ut Kk ad Mp, & TG ad Hp ut TZ ad AT, ideoque $IT \times TG$ æquale $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, hoc eſt, æquale areæ $HpMh$ ductæ in rationem $\frac{TZ}{Mp}$: & propterea inclinationis variatio horaria ad $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut $HpMh$ ducta in $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.*

Corol. 2. Ideoque ſi terra & nodi ſingulis horis completis retraherentur a locis ſuis novis, & in loca priora in inſtanti ſemper reducerentur, ut ſitus eorum, per menſem integrum periodicum, datus maneret; tota inclinationis variatio tempore menſis illius foret ad $33''. 10'''. 33^{iv}$, ut aggregatum omnium arearum $HpMh$, in revolutione puncti p genitarum, & ſub ſignis propriis + & — conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ *cub.* id eſt, ut circulus totus $QAqa$ ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ *cub.* hoc eſt, ut circumferentia $QAqa$ ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\, Mp \times AT$ *quad.*

Corol. 3. Proinde in dato nodorum ſitu, variatio mediocris horaria, ex qua per menſem uniformiter continuata variatio illa menſtrua generari poſſet, eſt ad $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2ATq$, ſive ut $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ad $PG \times 4AT$, id eſt (cum Pp ſit ad PG ut ſinus inclinationis prædictæ ad radium, & $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ſit ad $4AT$ ut ſinus duplicati anguli ATn ad radium quadruplicatum) ut inclinationis ejuſdem ſinus ductus in ſinum duplicatæ diſtantiæ nodorum a ſole, ad quadruplum quadratum radii.

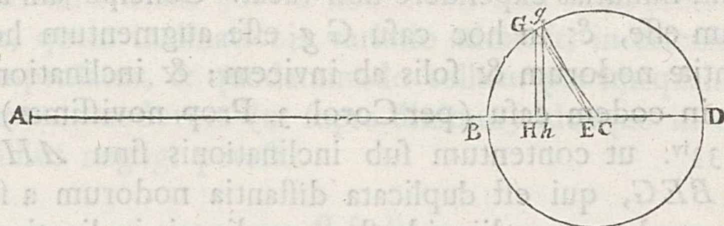
Corol. 4. Quoniam inclinationis horaria variatio, ubi nodi in quadraturis verſantur, eſt (per hanc propoſitionem) ad angulum $33''. 10'''$.

10‴. 33ⁱᵛ ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* id est, ut $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2} AT}$ $\times \frac{Pp}{PG}$ ad $2 AT$; hoc est, ut sinus duplicatæ distantiæ lunæ à quadraturis ductus in $\frac{Pp}{PG}$ ad radium duplicatum: summa omnium variationum horariarum, quo tempore luna in hoc situ nodorum transit a quadratura ad syzygiam (id est, spatio horarum $177\frac{1}{6}$,) erit ad summam totidem angulorum 33″. 10‴. 33ⁱᵛ, seu 5878″, ut summa omnium sinuum duplicatæ distantiæ lunæ à quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad summam totidem diametrorum; hoc est, ut diameter ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad circumferentiam; id est, si inclinatio sit $5^{gr.}$ 1′, ut $7 \times \frac{874}{10000}$ ad 22, seu 278 ad 10000. Proindeque variatio tota, ex summa omnium horariarum variationum tempore prædicto conflata, est 163″, seu 2′. 43″.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA XVI.

Dato tempore invenire inclinationem orbis lunaris ad planum eclipticæ.

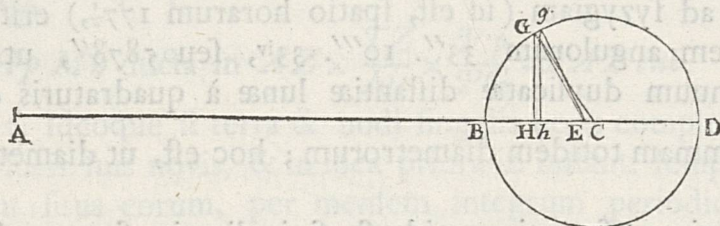
Sit AD sinus inclinationis maximæ, & AB sinus inclinationis minimæ. Bisecetur BD in C, & centro C, intervallo BC describatur circulus BGD. In AC capiatur CE in ea ratione ad EB quam



EB habet ad $2 BA$: et si dato tempore constituatur angulus AEG æqualis duplicatæ distantiæ nodorum à quadraturis, & ad AD demittatur perpendiculum GH: erit AH sinus inclinationis quæsitæ.

De Mundi Systemate

Nam GEq æquale eſt $GHq + HEq = BHD + HEq = HBD + HEq - BHq = HBD + BEq - 2BH \times BE = BEq + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH = 2EC \times AH$. Ideoque cum $2EC$ detur, eſt GEq ut AH. Deſignet jam AEg duplicatam diſtantiam nodorum à quadraturis poſt datum aliquod momentum temporis completum, & arcus Gg ob datum



angulum GEg erit ut diſtantia GE. Eſt autem Hh ad Gg ut GH ad GC, & propterea Hh eſt ut contentum $GH \times Gg$, ſeu $GH \times GE$; id eſt, ut $\frac{GH}{GE} \times GEq$ ſeu $\frac{GH}{GE} \times AH$, id eſt, ut AH & ſinus anguli AEG conjunctim. Igitur ſi AH in caſu aliquo ſit ſinus inclinationis, augebitur ea iiſdem incrementis cum ſinu inclinationis, per Corol. 3. Propoſitionis ſuperioris, & propterea ſinui illi æqualis ſemper manebit. Sed AH, ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel D, huic ſinui æqualis eſt, & propterea eidem ſemper æqualis manet. *Q.E.D.*

In hac demonſtratione ſuppoſui angulum BEG, qui eſt duplicata diſtantia nodorum à quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum BEG rectum eſſe, & in hoc caſu Gg eſſe augmentum horarium duplæ diſtantiæ nodorum & ſolis ab invicem; & inclinationis variatio horaria in eodem caſu (per Corol. 3. Prop. noviſſimæ) erit ad $33''. 10'''. 33^{iv}.$ ut contentum ſub inclinationis ſinu AH & ſinu anguli recti BEG, qui eſt duplicata diſtantia nodorum a ſole, ad quadruplum quadratum radii; id eſt, ut mediocris inclinationis ſinus AH ad radium quadruplicatum; hoc eſt (cum inclinatio illa mediocris ſit quaſi $5^{gr.} 8'\frac{1}{2}$) ut ejus ſinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, ſive ut 224 ad 10000. Eſt autem variatio tota, ſinuum differentiæ

ferentiæ *BD* reſpondens, ad variationem illam horariam ut diameter *BD* ad arcum *Gg*; id eſt, ut diameter *BD* ad ſemicircumferentiam *BGD* & tempus horarum $2079\frac{7}{10}$, quo nodus pergit à quadraturis ad ſyzygias, ad horam unam conjunctim; hoc eſt, ut 7 ad 11 & $2079\frac{7}{10}$ ad 1. Quare ſi rationes omnes conjungantur, fiet variatio tota *BD* ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv.}$ ut $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ ad 110000, id eſt, ut 29645 ad 1000, & inde variatio illa *BD* prodibit $16',\ 23''\frac{1}{2}$.

Hæc eſt inclinationis variatio maxima quatenus locus lunæ in orbe ſuo non conſideratur. Nam inclinatio, ſi nodi in ſyzygiis verſantur, nil mutatur ex vario ſitu lunæ. At ſi nodi in quadraturis conſiſtunt, inclinatio minor eſt ubi luna verſatur in ſyzygiis, quam ubi ea verſatur in quadraturis, exceſſu $2'.\ 43''$; uti in propoſitionis ſuperioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus exceſſus dimidio $1'.\ 21''\frac{1}{2}$ variatio tota mediocris *BD* in quadraturis lunaribus diminuta fit $15'.\ 2''$, in ipſius autem ſyzygiis aucta fit $17'.\ 45''$. Si luna igitur in ſyzygiis conſtituatur, variatio tota in tranſitu nodorum a quadraturis ad ſyzygias erit $17'.\ 45''$: ideoque ſi inclinatio, ubi nodi in ſyzygiis verſantur, ſit $5^{gr.}\ 17'.\ 20''$; eadem, ubi nodi ſunt in quadraturis, & luna in ſyzygiis, erit $4^{gr.}\ 59'.\ 35''$. Atque hæc ita ſe habere confirmatur ex obſervationibus.

Si jam deſideretur orbis inclinatio illa, ubi luna in ſyzygiis & nodi ubivis verſantur; fiat *AB* ad *AD* ut ſinus graduum $4.\ 59'.\ 35''$ ad ſinum graduum $5.\ 17'.\ 20''$, & capiatur angulus *AEG* æqualis duplicatæ diſtantiæ nodorum à quadraturis; & erit *AH* ſinus inclinationis quæſitæ. Huic orbis inclinationi æqualis eſt ejuſdem inclinatio, ubi luna diſtat $90^{gr.}$ à nodis. In aliis lunæ locis inæqualitas menſtrua, quam inclinationis variatio admittit, in calculo latitudinis lunæ compenſatur, & quodammodo tollitur per inæqualitatem menſtruam motus nodorum (ut ſupra diximus) ideoque in calculo latitudinis illius negligi poteſt.

Scholium.

Hiſce motuum lunarium computationibus oſtendere volui, quod motus lunares per theoriam gravitatis a cauſis ſuis computari poſſint. Per eandem theoriam inveni præterea quod æquatio annua

medii motus lunæ oriatur a varia dilatatione orbis lunæ per vim solis, juxta Corol. 6. Prop. LXVI. Lib. I. Hæc vis in perigæo solis major est, & orbem lunæ dilatat; in apogæo ejus minor est, & orbem illum contrahi permittit. In orbe dilatato luna tardius revolvitur, in contracto citius; & æquatio annua, per quam hæc inæqualitas compensatur, in apogæo & perigæo solis nulla est, in mediocri solis a terra distantia ad 11′. 50″ circiter ascendit, in aliis locis æquationi centri solis proportionalis est; & additur medio motui lunæ ubi terra pergit ab aphelio suo ad perihelium, & in opposita orbis parte subducitur. Assumendo radium orbis magni 1000 & eccentricitatem terræ $16\frac{7}{8}$, hæc æquatio, ubi maxima est, per theoriam gravitatis prodiit 11′. 49″. Sed eccentricitas terræ paulo major esse videtur, & aucta eccentricitate hæc æquatio augeri debet in eadem ratione. Sit eccentricitas $16\frac{11}{12}$, & æquatio maxima erit 11′. 51″.

Inveni etiam quod in perihelio terræ, propter majorem vim solis, apogæum & nodi lunæ velocius moventur quam in aphelio ejus, idque in triplicata ratione distantiæ terræ a sole inverse. Et inde oriuntur æquationes annuæ horum motuum æquationi centri solis proportionales. Motus autem solis est in duplicata ratione distantiæ terræ a sole inverse, & maxima centri æquatio, quam hæc inæqualitas generat, est $1^{gr.}$ 56′. 20″ prædictæ solis eccentricitati $16\frac{11}{12}$ congruens. Quod si motus solis esset in triplicata ratione distantiæ inverse, hæc inæqualitas generaret æquationem maximam $2^{gr.}$ 54′ 30″. Et propterea æquationes maximæ, quas inæqualitates motuum apogæi & nodorum lunæ generant, sunt ad $2^{gr.}$ 54′. 30″ ut motus medius diurnus apogæi, & motus medius diurnus nodorum lunæ sunt ad motum medium diurnum solis. Unde prodit æquatio maxima medii motus apogæi 19′. 43″, & æquatio maxima medii motus nodorum 9′. 24″. Additur vero æquatio prior & subducitur posterior, ubi terra pergit a perihelio suo ad aphelium: & contrarium fit in opposita orbis parte.

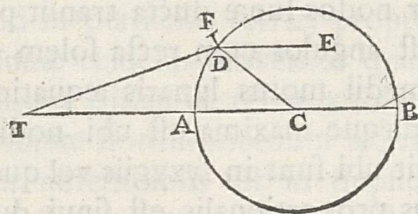
Per theoriam gravitatis constitit etiam quod actio solis in lunam paulo major sit, ubi transversa diameter orbis lunaris transit per solem, quam ubi eadem ad rectos est angulos cum linea terram & solem jungente: & propterea orbis lunaris paulo major est in priore casu quam in posteriore. Et hinc oritur alia æquatio motus medii lunaris,

lunaris, pendens a situ apogæi lunæ ad solem, quæ quidem maxima est cum apogæum lunæ versatur in octante cum sole; & nulla cum illud ad quadraturas vel syzygias pervenit: & motui medio additur in transitu apogæi lunæ a solis quadratura ad syzygiam, & subducitur in transitu apogæi a syzygia ad quadraturam. Hæc æquatio, quam semestrem vocabo, in octantibus apogæi, quando maxima est, ascendit ad 3′. 45″ circiter, quantum ex phænomenis colligere potui. Hæc est ejus quantitas in mediocri solis distantia a terra. Augetur vero ac diminuitur in triplicata ratione distantiæ solis inverse, ideoque in maxima solis distantia est 3′. 34″, & in minima 3′. 56″ quamproxime: ubi vero apogæum lunæ situm est extra octantes, evadit minor; estque ad æquationem maximam, ut sinus duplæ distantiæ apogæi lunæ a proxima syzygia vel quadratura ad radium.

Per eandem gravitatis theoriam actio solis in lunam paulo major est ubi linea recta per nodos lunæ ducta transit per solem, quam ubi linea illa ad rectos est angulos cum recta solem ac terram jungente. Et inde oritur alia medii motus lunaris æquatio, quam semestrem secundam vocabo, quæque maxima est ubi nodi in solis octantibus versantur, & evanescit ubi sunt in syzygiis vel quadraturis, & in aliis nodorum positionibus proportionalis est sinui duplæ distantiæ nodi alterutrius a proxima syzygia aut quadratura: additur vero medio motui lunæ, si sol distat a nodo sibi proximo in antecedentia, subducitur si in consequentia, & in octantibus, ubi maxima est, ascendit ad 47″ in mediocri solis distantia a terra, uti ex theoria gravitatis colligo. In aliis solis distantiis hæc æquatio maxima in octantibus nodorum est reciproce ut cubus distantiæ solis a terra, ideoque in perigæo solis ad 49″ in apogæo ejus ad 45″ circiter ascendit.

Per eandem gravitatis theoriam apogæum lunæ progreditur quam maxime ubi vel cum sole conjungitur vel eidem opponitur, & regreditur ubi cum sole quadraturam facit. Et eccentricitas fit maxima in priore casu & minima in posteriore, per Corol. 7, 8 & 9. Prop. LXVI. Lib. I. Et hæ inæqualitates per eadem Corollaria permagnæ sunt, & æquationem principalem apogæi generant, quam semestrem vocabo. Et æquatio maxima semestris est 12gr. 18′ circiter, quantum ex observationibus colligere potui. *Horroxius* noster lunam in ellipsi

ellipsi circum terram, in ejus umbilico inferiore constitutam, revolvi primus statuit. *Halleius* centrum ellipseos in epicyclo locavit, cujus centrum uniformiter revolvitur circum terram. Et ex motu in epicyclo oriuntur inæqualitates jam dictæ in progressu & regressu apogæi & quantitate eccentricitatis. Dividi intelligatur distantia mediocris lunæ a terra in partes 100000, & referat *T* terram & *TC* eccentricitatem mediocrem lunæ partium 5505. Producatur *TC* ad *B*, ut sit *CB* sinus æquationis maximæ semestris $12^{gr.}$ 18′ ad radium *TC*, & circulus *BDA* centro *C*, intervallo *CB* descriptus erit epicyclus ille in quo centrum orbis lunaris locatur & secundum ordinem literarum *BDA* revolvitur. Capiatur angulus *BCD* æqualis duplo argumento annuo, seu duplæ distantiæ veri loci solis ab apogæo lunæ semel æquato, & erit *CTD* æquatio semestris apogæi lu-



næ & *TD* eccentricitas orbis ejus in apogæum secundo æquatum tendens. Habitis autem lunæ motu medio & apogæo & eccentricitate, ut & orbis axe majore partium 200000; ex his eruetur verus lunæ locus in orbe & distantia ejus a terra, idque per methodos notissimas.

In perihelio terræ, propter majorem vim solis, centrum orbis lunæ velocius movetur circum centrum *C* quam in aphelio, idque in triplicata ratione distantiæ terræ a sole inverse. Ob æquationem centri solis in argumento annuo comprehensam, centrum orbis lunæ velocius movetur in epicyclo *BDA* in duplicata ratione distantiæ terræ a sole inverse. Ut idem adhuc velocius moveatur in ratione simplici distantiæ inverse; ab orbis centro *D* agatur recta *DE* versus apogæum lunæ, seu rectæ *TC* parallela, & capiatur angulus *EDF* æqualis excessui argumenti annui prædicti supra distantiam apogæi lunæ a perigæo solis in consequentia; vel quod perinde est, capiatur

angulus

angulus *CDF* æqualis complemento anomaliæ veræ ſolis ad gradus 360. Et ſit *DF* ad *DC* ut dupla eccentricitas orbis magni ad diſtantiam mediocrem ſolis a terra, & motus medius diurnus ſolis ab apogæo lunæ ad motum medium diurnum ſolis ab apogæo proprio conjunctim, id eſt, ut $33\frac{7}{8}$ ad 1000 & 52′. 27″. 16‴ ad 59′. 8″. 10‴ conjunctim, ſive ut 3 ad 100. Et concipe centrum orbis lunæ locari in puncto *F*, & in epicyclo, cujus centrum eſt *D*, & radius *DF*, interea revolvi dum punctum *D* progreditur in circumferentia circuli *DABD*. Hac enim ratione velocitas, qua centrum orbis lunæ in linea quadam curva circum centrum *C* deſcripta movebitur, erit reciproce ut cubus diſtantiæ ſolis a terra quamproxime, ut oportet.

Computatio motus hujus difficilis eſt, ſed facilior reddetur per approximationem ſequentem. Si diſtantia mediocris lunæ a terra ſit partium 100000, & eccentricitas *TC* ſit partium 5505 ut ſupra: recta *CB* vel *CD* invenietur partium $1172\frac{3}{4}$, & recta *DF* partium $35\frac{1}{5}$. Et hæc recta ad diſtantiam *TC* ſubtendit angulum ad terram quem tranſlatio centri orbis a loco *D* ad locum *F* generat in motu centri hujus: & eadem recta duplicata in ſitu parallelo ad diſtantiam ſuperioris umbilici orbis lunæ a terra, ſubtendit eundem angulum, quem utique tranſlatio illa generat in motu umbilici, & ad diſtantiam lunæ a terra ſubtendit angulum quem eadem tranſlatio generat in motu lunæ, quique propterea æquatio centri ſecunda dici poteſt. Et hæc æquatio, in mediocri lunæ diſtantia a terra, eſt ut ſinus anguli, quem recta illa *DF* cum recta a puncto *F* ad lunam ducta continet quamproxime, & ubi maxima eſt evadit 2′.25″. Angulus autem quem recta *DF* & recta a puncto *F* ad lunam ducta comprehendunt, invenitur vel ſubducendo angulum *EDF* ab anomalia media lunæ, vel addendo diſtantiam lunæ a ſole ad diſtantiam apogæi lunæ ab apogæo ſolis. Et ut radius eſt ad ſinum anguli ſic inventi, ita 2′. 25″. ſunt ad æquationem centri ſecundam, addendam, ſi ſumma illa ſit minor ſemicirculo, ſubducendam ſi major. Sic habebitur ejus longitudo in ipſis luminarium ſyzygiis.

Cum atmoſphæra terræ ad uſque altitudinem milliarium 35 vel 40 refringat lucem ſolis, & refringendo ſpargat eandem in umbram terræ, & ſpargendo lucem in confinio umbræ dilatet umbram: ad diametrum umbræ, quæ per parallaxim prodit, addo minutum unum primum in eclipſibus lunæ, vel minutum unum cum triente.

Theo-

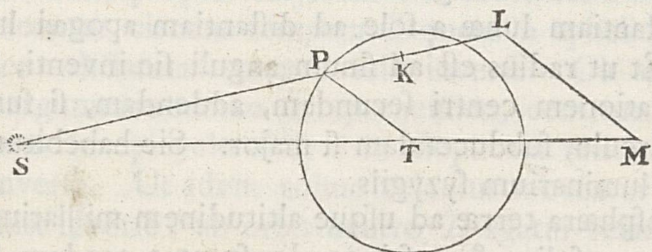
De Mundi Systemate

Theoria vero lunæ primo in ſyzygiis, deinde in quadraturis, & ultimo in octantibus per phænomena examinari & ſtabiliri debet. Et opus hocce aggreſſurus motus medios ſolis & lunæ ad tempus meridianum in obſervatorio regio *Grenovicenſi*, die ultimo menſis *Decembris* anni 1700. ſt. vet. non incommode ſequentes adhibebit: nempe motum medium ſolis ♑ $20^{gr.}\ 43'.\ 40''$, & apogæi ejus ♋ $7^{gr.}\ 44'.\ 30''$, & motum medium lunæ ♒ $15^{gr.}\ 21'.\ 00''$, & apogæi ejus ♓ $8^{gr.}\ 20'.\ 00''$, & nodi aſcendentis ♌ $27^{gr.}\ 24'.\ 20''$; & differentiam meridianorum obſervatorii hujus & obſervatorii regii *Pariſienſis* $0^{hor.}\ 9^{min.}\ 20^{sec.}$ motus autem medii lunæ & apogæi ejus nondum ſatis accurate habentur.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XVII.

Invenire vim ſolis ad mare movendum.

Solis vis *ML* ſeu *PT*, in quadraturis lunaribus, ad perturbandos motus lunares erat (per Prop. xxv. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1 ad 638092,6. Et vis *TM*—*LM* ſeu 2 *PK* in ſyzygiis lunaribus eſt duplo major. Hæ autem vires, ſi deſcendatur ad ſuperficiem terræ, diminuuntur in ratione diſtantiarum a centro terræ, id eſt, in ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; ideoque vis prior in ſuperficie terræ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 38604600. Hac vi mare deprimitur in locis, quæ 90 gradibus diſtant a ſole. Vi altera, quæ duplo major eſt, mare elevatur & ſub ſole & in regione ſoli oppoſita. Summa



virium eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, ſive ea deprimat aquam in regionibus quæ

90 gradibus distant a sole, sive elevet eandem in regionibus sub sole & soli oppositis, hæc summa erit tota solis vis ad mare agitandum; & eundem habebit effectum, ac si tota in regionibus sub sole & soli oppositis mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus distant a sole nil ageret.

Hæc est vis solis ad mare ciendum in loco quovis dato, ubi sol tam in vertice loci versatur quam in mediocri sua distantia a terra. In aliis solis positionibus vis ad mare attollendum est ut sinus versus duplæ altitudinis solis supra horizontem loci directe & cubus distantiæ solis a terra inverse.

Corol. Cum vis centrifuga partium terræ a diurno terræ motu oriunda, quæ est ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo aquæ sub æquatore superet ejus altitudinem sub polis mensura pedum *Parisiensium* 85472, ut supra in prop. xix; vis solaris de qua egimus, cum sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque ideo ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200 seu 1 ad 44527, efficiet ut altitudo aquæ in regionibus sub sole & soli oppositis superet altitudinem ejus in locis, quæ 90 gradibus distant a sole, mensura tantum pedis unius *Parisiensis* & digitorum undecim cum tricesima parte digiti. Est enim hæc mensura ad mensuram pedum 85472 ut 1 ad 44527.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XVIII.

Invenire vim lunæ ad mare movendum.

Vis lunæ ad mare movendum colligenda est ex ejus proportione ad vim solis, & hæc proportio colligenda est ex proportione motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante ostium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Bristolium*, tempore verno & autumnali totus aquæ ascensus in conjunctione & oppositione luminarium, observante *Samuele Sturmio*, est pedum plus minus 45, in quadraturis autem est pedum tantum 25. Altitudo prior ex summa virium, posterior ex earundem differentia oritur. Solis igitur & lunæ in æquatore versantium & mediocriter a terra distantium sunto vires S & L, & erit L+S ad L−S ut 45 ad 25, seu 9 ad 5.

In portu *Plymuthi* æſtus maris ex obſervatione *Samuelis Colepreſſi* ad pedes plus minus ſexdecim altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno & autumnali altitudo æſtus in ſyzygiis ſuperare poteſt altitudinem ejus in quadraturis pedibus plus ſeptem vel octo. Si maxima harum altitudinum differentia ſit pedum novem, erit L+S ad L—S ut $20\frac{1}{2}$ ad $11\frac{1}{2}$ ſeu 41 ad 23. Quæ proportio ſatis congruit cum priore. Ob magnitudinem æſtus in portu *Briſtoliæ*, obſervationibus *Sturmii* magis fidendum eſſe videtur, ideoque donec aliquid certius conſtiterit, proportionem 9 ad 5 uſurpabimus.

Cæterum ob aquarum reciprocos motus, æſtus maximi non incidunt in ipſas luminarium ſyzygias, ſed ſunt tertii a ſyzygiis ut dictum fuit, ſeu proxime ſequuntur tertium lunæ poſt ſyzygias appulſum ad meridianum loci, vel potius (ut a *Sturmio* notatur) ſunt tertii poſt diem novilunii vel plenilunii, ſeu poſt horam a novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, ideoque incidunt in horam a novilunio vel plenilunio plus minus quadrageſimam tertiam. Incidunt vero in hoc portu in horam ſeptimam circiter ab appulſu lunæ ad meridianum loci; ideoque proxime ſequuntur appulſum lunæ ad meridianum, ubi luna diſtat a ſole vel ab oppoſitione ſolis gradibus plus minus octodecim vel novemdecim in conſequentia. Æſtas & hyems maxime vigent, non in ipſis ſolſtitiis, ſed ubi ſol diſtat a ſolſtitiis decima circiter parte totius circuitus, ſeu gradibus plus minus 36 vel 37. Et ſimiliter maximus æſtus maris oritur ab appulſu lunæ ad meridianum loci, ubi luna diſtat a ſole decima circiter parte motus totius ab æſtu ad æſtum. Sit diſtantia illa graduum plus minus $18\frac{1}{2}$. Et vis ſolis in hac diſtantia lunæ a ſyzygiis & quadraturis, minor erit ad augendum & ad minuendum motum maris a vi lunæ oriundum, quam in ipſis ſyzygiis & quadraturis, in ratione radii ad ſinum complementi diſtantiæ hujus duplicatæ ſeu anguli graduum 37, hoc eſt, in ratione 10000000 ad 7986355. Ideoque in analogia ſuperiore pro S ſcribi debet 0,7986355 S.

Sed & vis lunæ in quadraturis, ob declinationem lunæ ab æquatore, diminui debet. Nam luna in quadraturis, vel potius in gradu $18\frac{1}{2}$ poſt quadraturas, in declinatione graduum plus minus 22. 13′ verſatur. Et luminaris ab æquatore declinantis vis ad mare movendum

vendum diminuitur in duplicata ratione sinus complementi declinationis quamproxime. Et propterea vis lunæ in his quadraturis est tantum 0,8570327 L. Est igitur L+0,7986355S ad 0,8570327 L—0,7986355S ut 9 ad 5. DE MUNDI SYSTEMATE

Præterea diametri orbis, in quo luna sine eccentricitate moveri deberet, sunt ad invicem ut 69 ad 70; ideoque distantia lunæ a terra in syzygiis est ad distantiam ejus in quadraturis ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et distantiæ ejus in gradu $18\frac{1}{2}$ a syzygiis, ubi æstus maximus generatur, & in gradu $18\frac{1}{2}$ a quadraturis, ubi æstus minimus generatur, sunt ad mediocrem ejus distantiam ut 69,098747 & 69,897345 ad $69\frac{1}{2}$. Vires autem lunæ ad mare movendum sunt in triplicata ratione distantiarum inverse, ideoque vires in maxima & minima harum distantiarum sunt ad vim in mediocri distantia ut 0,9830427 & 1,017522 ad 1. Unde fit 1,017522L +0,7986355 S ad 0,9830427 × 0,8570327 L—0,7986355 S ut 9 ad 5. Et S ad L ut 1 ad 4,4815. Itaque cum vis solis sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400.

Corol. 1. Cum aqua vi solis agitata ascendat ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum cum tricesima parte digiti, eadem vi lunæ ascendet ad altitudinem octo pedum & digitorum $7\frac{5}{22}$, & vi utraque ad altitudinem pedum decem cum semisse, & ubi luna est in perigæo ad altitudinem pedum duodecim cum semisse & ultra, præsertim ubi æstus ventis spirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abunde sufficit, & quantitati motuum probe respondet. Nam in maribus quæ ab oriente in occidentem late patent, uti in mari *Pacifico*, & maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra tropicos, aqua attolli solet ad altitudinem pedum sex, novem, duodecim vel quindecim. In mari autem *Pacifico*, quod profundius est & latius patet, æstus dicuntur esse majores quam in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut plenus sit æstus, latitudo maris ab oriente in occidentem non minor esse debet quam graduum nonaginta. In mari *Æthiopico* ascensus aquæ intra tropicos minor est quam in zonis temperatis, propter angustiam maris inter *Africam* & australem partem *Americæ*. In medio mari aqua nequit ascendere, nisi ad littus utrumque & orientale & occidentale simul descendat:

De Mundi Systemate

cum tamen vicibus alternis ad littora illa in maribus noſtris anguſtis deſcendere debeat. Ea de cauſa fluxus & refluxus in inſulis, quæ a littoribus longiſſime abſunt, perexiguus eſſet ſolet. In portubus quibuſdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadoſa, ad ſinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus debent eſſe ſolito majores, uti ad *Plymuthum* & pontem *Chepſtowæ* in *Anglia*; ad montes *S. Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Auranches*) in *Normannia*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *India* orientali. His in locis mare, magna cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat nunc arida relinquit ad multa millaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi poteſt, quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40, vel 50 & amplius. Et par eſt ratio fretorum oblongorum & vadoſorum, uti *Magellanici* & ejus quo *Anglia* circundatur. Æſtus in hujuſmodi portubus & fretis per impetum curſus & recurſus ſupra modum augetur. Ad littora vero quæ deſcenſu præcipiti ad mare profundum & apertum ſpectant, ubi aqua ſine impetu effluendi & remeandi attolli & ſubſidere poteſt, magnitudo æſtus reſpondet viribus ſolis & lunæ.

Corol. 2. Cum vis lunæ ad mare movendum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400, perſpicuum eſt quod vis illa ſit longe minor quam quæ vel in experimentis pendulorum, vel in ſtaticis aut hydroſtaticis quibuſcunque ſentiri poſſit. In æſtu ſolo marino hæc vis ſenſibilem edit effectum.

Corol. 3. Quoniam vis lunæ ad mare movendum eſt ad ſolis vim conſimilem ut 4,4815 ad 1, & vires illæ (per corol. 14. prop. LXVI. lib. I.) ſunt ut denſitates corporum lunæ & ſolis & cubi diametrorum apparentium conjunctim; denſitas lunæ erit ad denſitatem ſolis ut 4,4815 ad 1 directe, & cubus diametri lunæ ad cubum diametri ſolis inverſe: id eſt (cum diametri mediocres apparentes lunæ & ſolis ſint 31′. 16″½ & 32′. 12″) ut 4891 ad 1000. Denſitas autem ſolis erat ad denſitatem terræ ut 1000 ad 4000; & propterea denſitas lunæ eſt ad denſitatem terræ ut 4891 ad 4000 ſeu 11 ad 9. Eſt igitur corpus lunæ denſius & magis terreſtre quam terra noſtra.

Corol.

Corol. 4. Et cum vera diameter lunæ ex obſervationibus aſtronomicis ſit ad veram diametrum terræ ut 100 ad 365; erit maſſa lunæ ad maſſam terræ ut 1 ad 39,788.

Corol. 5. Et gravitas acceleratrix in ſuperficie lunæ erit quaſi triplo minor quam gravitas acceleratrix in ſuperficie terræ.

Corol. 6. Et diſtantia centri lunæ a centro terræ erit ad diſtantiam centri lunæ a communi gravitatis centro terræ & lunæ, ut 40,788 ad 39,788.

Corol. 7. Et mediocris diſtantia centri lunæ a centro terræ in octantibus lunæ erit ſemidiametrorum maximarum terræ $60\frac{2}{5}$ quamproxime. Nam terræ ſemidiameter maxima fuit pedum *Pariſienſium* 19658600, & mediocris diſtantia centrorum terræ & lunæ, ex hujuſmodi diametris $60\frac{2}{5}$ conſtans, æqualis eſt pedibus 1187379440. Et hæc diſtantia (per corollarium ſuperius) eſt ad diſtantiam centri lunæ a communi gravitatis centro terræ & lunæ, ut 40,788 ad 39,788: ideoque diſtantia poſterior eſt pedum 1158268534. Et cum luna revolvatur, reſpectu fixarum, diebus 27, horis 7, & minutis primis $43\frac{4}{9}$; ſinus verſus anguli, quem luna tempore minuti unius primi deſcribit, eſt 12752341, exiſtente radio 1000,000000,000000. Et ut radius eſt ad hunc ſinum verſum, ita ſunt pedes 1158268534 ad pedes 14,7706353. Luna igitur vi illa, qua retinetur in orbe, cadendo in terram, tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14,7706353. Et augendo hanc vim in ratione $178\frac{29}{40}$ ad $177\frac{29}{40}$, habebitur vis tota gravitatis in orbe lunæ per Corol. Prop. III. Et hac vi luna cadendo tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14,8538067. Et ad ſexageſimam partem diſtantiæ lunæ a centro terræ, id eſt ad diſtantiam pedum 197896573 a centro terræ, corpus grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribet etiam pedes 14,8538067. Ideoque ad diſtantiam pedum 19615800, quæ ſunt terræ ſemidiameter mediocris, grave cadendo deſcribet pedes 15,11175, ſeu pedes 15, dig. 1, & lin. $4\frac{1}{11}$. Hic erit deſcenſus corporum in latitudine graduum 45. Et per tabulam præcedentem in prop. xx. deſcriptam, deſcenſus erit paulo major in latitudine *Lutetiæ Pariſiorum* exiſtente exceſſu quaſi $\frac{2}{3}$ partium lineæ. Gravia igitur per hoc computum in latitudine *Lutetiæ* cadendo in vacuo deſcribent tempore unius ſecundi pedes *Pariſienſes* 15, dig. 1, & lin. $4\frac{25}{33}$ circiter. Et ſi gravi-

tas

LIBER TERTIUS. tas minuatur auferendo vim centrifugam, quæ oritur a motu diurno terræ in illa latitudine; gravia ibi cadendo deſcribent tempore minuti unius ſecundi pedes 15, dig. 1, & lin. $1\frac{1}{9}$. Et hac velocitate gravia cadere in latitudine *Lutetiæ* ſupra oſtenſum eſt ad prop. IV, & XIX.

Corol. 8. Diſtantia mediocris centrorum terræ & lunæ in ſyzygiis lunæ eſt ſexaginta ſemidiametrorum maximarum terræ, dempta triceſima parte ſemidiametri circiter. Et in quadraturis lunæ diſtantia mediocris eorundem centrorum eſt $60\frac{5}{6}$ ſemidiametrorum terræ. Nam hæ duæ diſtantiæ ſunt ad diſtantiam mediocrem lunæ in octantibus ut 69 & 70 ad $69\frac{1}{2}$ per prop. XXVIII.

Corol. 9. Diſtantia mediocris centrorum terræ & lunæ in ſyzygiis lunæ eſt ſexaginta ſemidiametrorum mediocrium terræ cum decima parte ſemidiametri. Et in quadraturis lunæ diſtantia mediocris eorundem centrorum eſt ſexaginta & unius ſemidiametrorum mediocrium terræ, dempta triceſima parte ſemidiametri.

Corol. 10. In ſyzygiis lunæ parallaxis ejus horizontalis mediocris in latitudinibus graduum 0, 30, 38, 45, 52, 60, 90, eſt 57′. 20″, 57′. 16″, 57′. 14″, 57′. 12″, 57′. 10″, 57′. 8″, 57′. 4″ reſpective.

In his computationibus attractionem magneticam terræ non conſideravi, cujus utique quantitas perparva eſt & ignoratur. Siquando vero hæc attractio inveſtigari poterit, & menſuræ graduum in meridiano, ac longitudines pendulorum iſochronorum in diverſis parallelis, legeſque motuum maris, & parallaxis lunæ cum diametris apparentibus ſolis & lunæ ex phænomenis accuratius determinatæ fuerint: licebit calculum hunc omnem accuratius repetere.

PROPOSITIO XXXVIII. PROBLEMA XIX.

Invenire figuram corporis lunæ.

Si corpus lunare fluidum eſſet ad inſtar maris noſtri, vis terræ ad fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum eſſet ad vim lunæ, qua mare noſtrum in partibus & ſub luna & lunæ oppoſitis attollitur, ut gravitas acceleratrix lunæ in terram ad gravitatem acceleratricem terræ in lunam, & diameter lunæ ad diametrum terræ conjunctim;

conjunctim; id est, ut 39,788 ad 1 & 100 ad 365 conjunctim, seu 1081 ad 100. Unde cum mare nostrum vi lunæ attollatur ad pedes $8\frac{1}{3}$, fluidum lunare vi terræ attolli deberet ad pedes 93. Eaque de causa figura lunæ sphærois esset, cujus maxima diameter producta transiret per centrum terræ, & superaret diametros perpendiculares excessu pedum 186. Talem igitur figuram luna affectat, eamque sub initio induere debuit. *Q. E. I.*

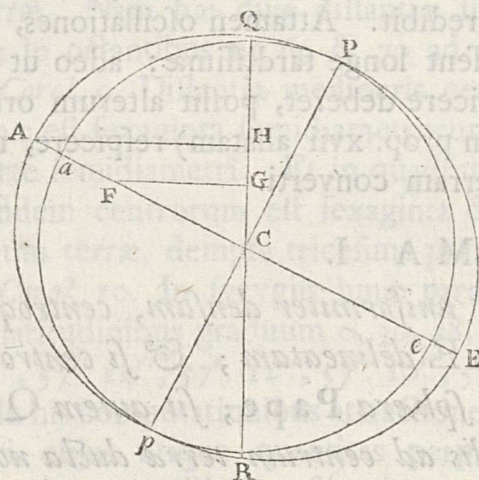
Corol. Inde vero fit ut eadem semper lunæ facies in terram obvertatur. In alio enim situ corpus lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes, ob parvitatem virium agitantium, essent longe tardissimæ: adeo ut facies illa, quæ terram semper respicere deberet, possit alterum orbis lunaris umbilicum (ob rationem in prop. xvii allatam) respicere, neque statim abinde retrahi & in terram converti.

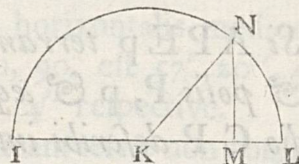
LEMMA I.

Si APEp *terram designet uniformiter densam, centroque* C *&* *polis* P, p *&* *æquatore* AE *delineatam; &* *si centro* C *radio* CP *describi intelligatur sphæra* Pape; *sit autem* QR *planum, cui recta a centro solis ad centrum terræ ducta normaliter insistit; &* *terræ totius exterioris* PapAPepE, *quæ sphæra modo descripta altior est, particulæ singulæ conentur recedere hinc inde a plano* QR, *sitque conatus particulæ cujusque ut ejusdem distantia a plano: Dico primo, quod tota particularum omnium in æquatoris circulo* AE, *extra globum uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, vis &* *efficacia ad terram circum centrum ejus rotandam, sit ad totam particularum totidem in æquatoris puncto* A, *quod a plano* QR *maxime distat, consistentium vim &* *efficaciam, ad terram consimili motu circulari circum centrum ejus movendam, ut unum ad duo. Et motus iste circularis circum axem, in communi sectione æquatoris &* *plani* QR *jacentem, peragetur.*

Nam

Nam centro K diametro IL deſcribatur ſemicirculus $INLK$. Dividi intelligatur ſemicircumferentia INL in partes innumeras æquales, & a partibus ſingulis N ad diametrum IL demittantur ſinus NM. Et ſumma quadratorum ex ſinibus omnibus NM æqualis erit ſummæ quadratorum ex ſinibus KM, & ſumma utraque æqualis erit ſummæ quadratorum ex totidem ſemidiametris KN; ideoque ſumma quadratorum ex omnibus NM erit duplo minor quam ſumma quadratorum ex totidem ſemidiametris KN.





Jam dividatur perimeter circuli AE in particulas totidem æquales, & ab earum unaquaque F ad planum QR demittatur perpendiculum FG, ut & a puncto A perpendiculum AH. Et vis, qua particula F recedit a plano QR, erit ut perpendiculum illud FG per hypotheſin, & hæc vis ducta in diſtantiam CG erit efficacia particulæ F ad terram circum centrum ejus convertendam. Ideoque efficacia particulæ in loco F, erit ad efficaciam particulæ in loco A, ut $FG \times GC$ ad $AH \times HC$, hoc eſt, ut FCq ad ACq; & propterea efficacia tota particularum omnium in locis ſuis F erit ad efficaciam particularum totidem in loco A, ut ſumma omnium FCq ad ſummam totidem ACq, hoc eſt (per jam demonſtrata) ut unum ad duo. *Q. E. D.*

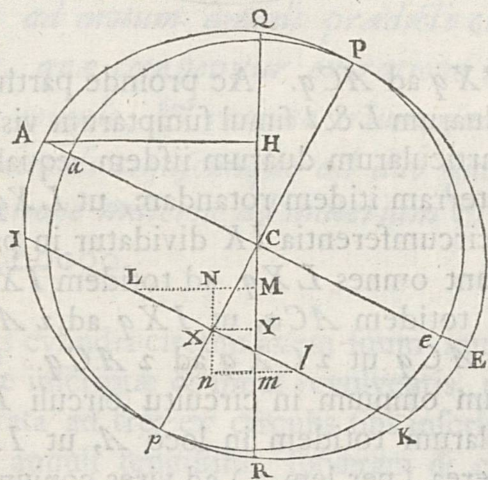
Et quoniam particulæ agunt recedendo perpendiculariter a plano QR, idque æqualiter ab utraque parte hujus plani: eædem convertent

tent circumferentiam circuli æquatoris, eique inhærentem terram, circum axem tam in plano illo *QR* quam in plano æquatoris jacentem.

LEMMA II.

Iisdem positis: dico secundo quod vis & efficacia tota particularum omnium extra globum undique sitarum, ad terram circum axem eundem rotandam, sit ad vim totam particularum totidem, in æquatoris circulo AE *uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, ad terram consimili motu circulari movendam, ut duo ad quinque.*

Sit enim *IK* circulus quilibet minor æquatori *AE* parallelus, sintque *L, l* particulæ duæ quævis æquales in hoc circulo extra globum *Pape* sitæ. Et si in planum *QR*, quod radio in solem ducto perpendiculare est, demittantur perpendicula *LM, lm:* vires totæ, quibus particulæ illæ fugiunt planum *QR*, proportionales erunt perpendiculis illis *LM, lm*. Sit autem recta *Ll* plano *Pape* parallela &



bisecetur eadem in *X*, & per punctum *X* agatur *Nn*, quæ parallela sit plano *QR* & perpendiculis *LM, lm* occurrat in *N* ac *n*, & in planum *QR* demittatur perpendiculum *XY*. Et particularum *L* & *l* vires contrariæ, ad terram in contrarias partes rotandam, sunt ut $LM \times MC$ & $lm \times mC$, hoc est, ut $LN \times MC + NM \times MC$ & ln

$\times mC - nm \times mC$, seu $LN \times MC + NM \times MC$ & $LN \times mC - NM \times mC$: & harum differentia $LN \times Mm - NM \times \overline{MC + mC}$ eſt vis particularum ambarum ſimul ſumptarum ad terram rotandam. Hujus differentiæ pars affirmativa $LN \times Mm$ ſeu $2\, LN \times NX$ eſt ad particularum duarum ejuſdem magnitudinis in A conſiſtentium vim $2\, AH \times HC$, ut LXq ad ACq. Et pars negativa $NM \times \overline{MC + mC}$ ſeu $2\, XY \times CY$ ad particularum earundem in A conſiſtentium vim $2\, AH \times HC$, ut CXq ad ACq. Ac proinde partium differentia, id eſt, particularum duarum L & l ſimul ſumptarum vis ad terram rotandam eſt ad vim particularum duarum iiſdem æqualium & in loco A conſiſtentium ad terram itidem rotandam, ut $LXq - CXq$ ad ACq. Sed ſi circuli IK circumferentia IK dividatur in particulas innumeras æquales L, erunt omnes LXq ad totidem IXq ut 1 ad 2 (per lem. 1.) atque ad totidem ACq, ut IXq ad $2\, ACq$; & totidem CXq ad totidem ACq ut $2\, CXq$ ad $2\, ACq$. Quare vires conjunctæ particularum omnium in circuitu circuli IK ſunt ad vires conjunctas particularum totidem in loco A, ut $IXq - 2\, CXq$ ad $2\, ACq$: & propterea (per lem. 1.) ad vires conjunctas particularum totidem in circuitu circuli AE, ut $IXq - 2\, CXq$ ad ACq.

Jam vero ſi ſphæræ diameter Pp dividatur in partes innumeras æquales, quibus inſiſtant circuli totidem IK; materia in perimetro circuli cujuſque IK erit ut IXq: ideoque vis materiæ illius ad terram

ram rotandam, erit ut IXq in $IXq - 2\,CXq$. Et vis materiæ ejusdem, si in circuli AE perimetro consisteret, esset ut IXq in ACq. Et propterea vis particularum omnium materiæ totius, extra globum in perimetris circulorum omnium consistentis, est ad vim particularum totidem in perimetro circuli maximi AE consistentis, ut omnia IXq in $IXq - 2\,CXq$ ad totidem IXq in ACq, hoc est, ut omnia $ACq - CXq$ in $ACq - 3\,CXq$ ad totidem $ACq - CXq$ in ACq, id est, ut omnia $ACqq - 4\,ACq \times CXq + 3\,CXqq$ ad totidem $ACqq - ACq \times CXq$, hoc est, ut tota quantitas fluens, cujus fluxio est $ACqq - 4\,ACq \times CXq + 3\,CXqq$, ad totam quantitatem fluentem, cujus fluxio est $ACqq - ACq \times CXq$; ac proinde per methodum fluxionum, ut $ACqq \times CX - \frac{4}{3}\,ACq \times CX\ cub + \frac{3}{5}\,CXqc$ ad $ACqq \times CX - \frac{1}{3}\,ACq \times CX\ cub$, id est, si pro CX scribatur tota Cp vel AC, ut $\frac{4}{15}\,ACqc$ ad $\frac{2}{3}\,ACqc$. hoc est, ut duo ad quinque. *Q. E. D.*

LEMMA III.

Iisdem positis: dico tertio quod motus terræ totius circum axem jam ante descriptum, ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem in ratione, quæ componitur ex ratione materiæ in terra ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuscunque ad duo quadrata ex diametro; id est, in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 *ad numerum* 1000000.

Est enim motus cylindri circum axem suum immotum revolventis ad motum sphæræ inscriptæ & simul revolventis, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis sibi inscriptis: & motus cylindri ad motum annuli tenuissimi, sphæram & cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum materiæ in cylindro ad triplum materiæ in annulo; & annuli motus iste circum axem cylindri uniformiter continuatus, ad ejusdem motum uniformem circum diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

De Mundi Systemate

HYPOTHESIS II.

Si annulus prædictus terra omni reliqua sublata, solus in orbe terræ, motu annuo circa solem ferretur, & interea circa axem suum, ad planum eclipticæ in angulo graduum $23\frac{1}{2}$ *inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motùs punctorum æquinoctialium, sive annulus iste fluidus esset, sive is ex materia rigida & firma constaret.*

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XX.

Invenire præcessionem æquinoctiorum.

Motus mediocris horarius nodorum lunæ in orbe circulari, ubi nodi sunt in quadraturis, erat $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$, & hujus dimidium $8''. 17'''. 38^{iv}. 18^{v}$. (ob rationes supra explicatas) est motus medius horarius nodorum in tali orbe; fitque anno toto sidereo $20^{gr}. 11'. 46''$. Quoniam igitur nodi lunæ in tali orbe conficerent annuatim $20^{gr.} 11'. 46''$ in antecedentia; & si plures essent lunæ, motus nodorum cujusque (per corol. 16. prop. LXVI. lib. I.) forent ut tempora periodica; si luna spatio diei siderei juxta superficiem terræ revolveretur, motus annuus nodorum foret ad $20^{gr.} 11'. 46''$ ut dies sidereus horarum 23. 56′ ad tempus periodicum lunæ dierum 27. 7 hor. 43′; id est, ut 1436 ad 39343. Et par est ratio nodorum annuli lunarum terram ambientis; sive lunæ illæ se mutuo non contingant, sive liquescant & in annulum continuum formentur, sive denique annulus ille rigescat & inflexibilis reddatur.

Fingamus igitur quod annulus iste, quoad quantitatem materiæ, æqualis sit terræ omni $PapAPepE$ quæ globo $Pape$ superior est; (*Vid. fig. pag.* 474.) & quoniam globus iste est ad terram illam superiorem ut $aCqu.$ ad $ACqu.-aCqu.$ id est (cum terræ semidiameter minor PC vel aC sit ad semidiametrum majorem AC ut 229 ad 230) ut 52441 ad 459; si annulus iste terram secundum æquatorem cingeret & uterque simul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli esset ad motum globi interioris (per hujus lem. III) ut 459 ad 52441 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc est, ut 4590 ad 485223; ideoque motus annuli esset ad summam motuum annuli ac globi, ut 4590 ad 489813. Unde si annulus globo adhæreat, & motum suum,

quo

quo ipsius nodi seu puncta æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: motus qui restabit in annulo erit ad ipsius motum priorem, ut 4590 ad 489813; & propterea motus punctorum æquinoctialium diminuetur in eadem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum æquinoctialium corporis ex annulo & globo compositi ad motum $20^{gr.}\ 11'.\ 46''$, ut 1436 ad 39343 & 4590 ad 489813 conjunctim, id est, ut 100 ad 292369. Vires autem quibus nodi lunarum (ut supra explicui) atque ideo quibus puncta æquinoctialia annuli regrediuntur (id est vires 3 *IT in fig. pag.* 437 & 438) sunt in singulis particulis ut distantiæ particularum a plano *QR*, & his viribus particulæ illæ planum fugiunt; & propterea (per lem. II.) si materia annuli per totam globi superficiem in morem figuræ *Pap APepE* ad superiorem illam terræ partem constituendam spargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad terram circa quamvis æquatoris diametrum rotandam, atque ideo ad movenda puncta æquinoctialia, evaderet minor quam prius in ratione 2 ad 5. Ideoque annuus æquinoctiorum regressus jam esset ad $20^{gr}.\ 11'.\ 46''$, ut 10 ad 73092: ac proinde fieret $9''.\ 56'''.\ 50^{iv}$.

Cæterum hic motus ob inclinationem plani æquatoris ad planum eclipticæ minuendus est, idque in ratione sinus 91706 (qui sinus est complementi graduum $23\frac{1}{2}$) ad radium 100000. Qua ratione motus iste jam fiet $9''.\ 7'''.\ 20^{iv}$. Hæc est annua præcessio æquinoctiorum a vi solis oriunda.

Vis autem lunæ ad mare movendum erat ad vim solis, ut 4,4815 ad 1 circiter. Et vis lunæ ad æquinoctia movenda est ad vim solis in eadem proportione. Indeque prodit annua æquinoctiorum præcessio a vi lunæ oriunda $40''.\ 52'''.\ 52^{iv}$, ac tota præcessio annua a vi utraque oriunda $50''.\ 00'''.\ 12^{iv}$. Et hic motus cum phænomenis congruit. Nam præcessio æquinoctiorum ex observationibus astronimicis est annuatim minutorum secundorum plus minus quinquaginta.

Si altitudo terræ ad æquatorem superet altitudinem ejus ad polos, milliaribus pluribus quam $17\frac{1}{6}$, materia ejus rarior erit ad circumferentiam quam ad centrum: & præcessio æquinoctiorum ob altitudinem illam augeri, ob raritatem diminui debet.

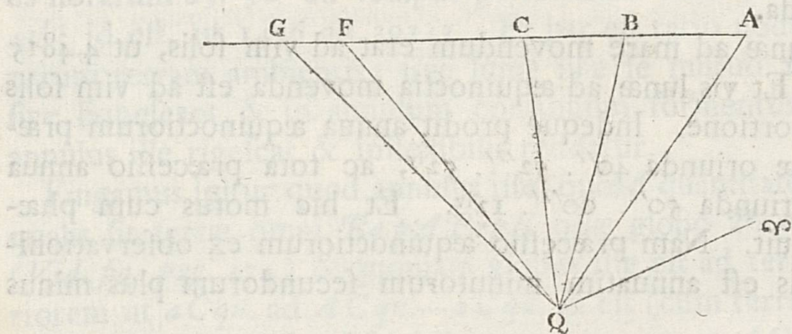
Descripsimus jam systema solis, terræ, lunæ, & planetarum: superest ut de cometis nonnulla adjiciantur.

LEMMA

LEMMA IV.

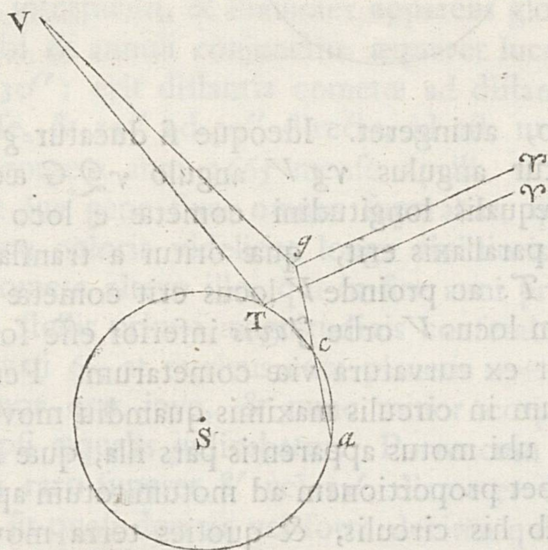
Cometas esse luna superiores & in regione planetarum versari.

Ut defectus parallaxeos diurnæ extulit cometas supra regiones sublunares, sic ex parallaxi annua convincitur eorum descensus in regiones planetarum. Nam cometæ, qui progrediuntur secundum ordinem signorum, sunt omnes sub exitu apparitionis aut solito tardiores aut retrogradi, si terra est inter ipsos & solem; at justo celeriores si terra vergit ad oppositionem. Et contra, qui pergunt contra ordinem signorum sunt justo celeriores in fine apparitionis, si terra versatur inter ipsos & solem; & justo tardiores vel retrogradi, si terra sita est ad contrarias partes. Contingit hoc maxime ex motu terræ in vario ipsius situ, perinde ut fit in planetis, qui pro motu terræ vel conspirante vel contrario nunc retrogradi sunt, nunc tardius progredi videntur, nunc vero celerius. Si terra pergit ad eandem partem cum cometa, & motu angulari circa solem tanto celerius fertur, ut recta per terram & cometam perpetuo ducta convergat ad partes ultra cometam, cometa e terra spectatus ob motum suum tardiorem apparet esse retrogradus; sin terra tardius fertur,



motus cometæ (detracto motu terræ) fit saltem tardior. At si terra pergit in contrarias partes, cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retrogrado distantia cometæ in hunc modum colligitur. Sunto ♈ *QA*, ♈ *QB*, ♈ *QC* observatæ tres longitudines cometæ sub initio motus, sitque ♈ *QF* longi-

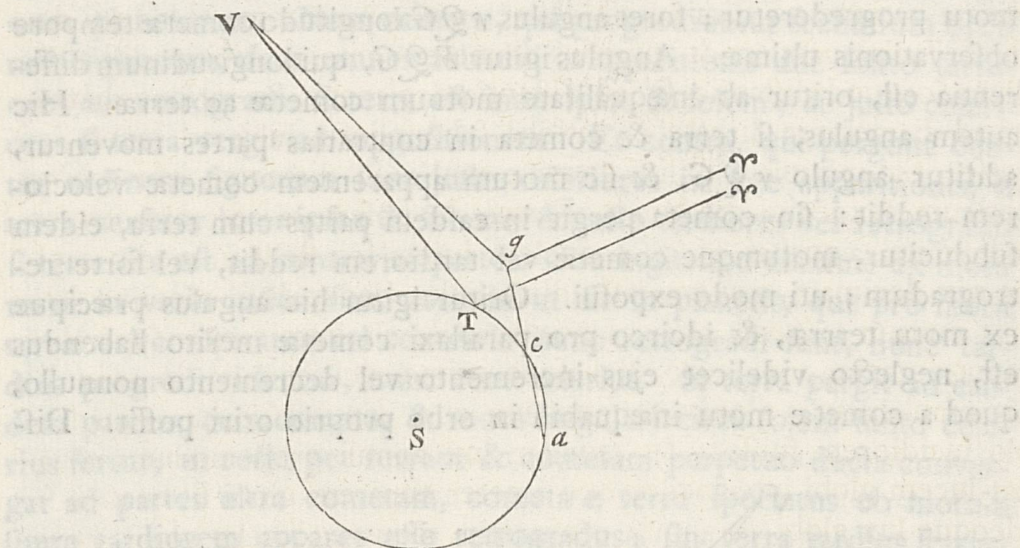
longitudo ultimo obſervata, ubi cometa videri deſinit. Agatur recta *ABC*, cujus partes *AB*, *BC* rectis *QA* & *QB*, *QB* & *QC* interjectæ, ſint ad invicem ut tempora inter obſervationes tres primas. Producatur *AC* ad *G*, ut ſit *AG* ad *AB* ut tempus inter obſervationem primam & ultimam ad tempus inter obſervationem primam & ſecundam, & jungatur *QG*. Et ſi cometa moveretur uniformiter in linea recta, atque terra vel quieſceret, vel etiam in linea recta uniformi cum motu progrederetur; foret angulus ♈*QG* longitudo cometæ tempore obſervationis ultimæ. Angulus igitur *FQG*, qui longitudinum differentia eſt, oritur ab inæqualitate motuum cometæ ac terræ. Hic autem angulus, ſi terra & cometa in contrarias partes moventur, additur angulo ♈*QG*, & ſic motum apparentem cometæ velociorem reddit: ſin cometa pergit in eaſdem partes cum terra, eidem ſubducitur, motumque cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum; uti modo expoſui. Oritur igitur hic angulus præcipue ex motu terrræ, & idcirco pro parallaxi cometæ merito habendus eſt, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod a cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri poſſit. Diſ-



tantia vero cometæ ex hac parallaxi ſic colligitur. Deſignet *S* ſolem, *acT* orbem magnum, *a* locum terræ in obſervatione prima, *c* locum

LIBER TERTIUS.

cum terræ in obſervatione tertia, *T* locum terræ in obſervatione ultima, & *T*♈ lineam rectam verſus principium arietis ductam. Sumatur angulus ♈*TV* æqualis angulo ♈*QF*, hoc eſt, æqualis longitudini cometæ ubi terra verſatur in *T*. Jungatur *ac*, & producatur ea ad *g*, ut ſit *ag* ad *ac* ut *AG* ad *AC*, & erit *g* locus quem terra tempore obſervationis ultimæ, motu in recta *ac* unifor-



miter continuato, attingeret. Ideoque ſi ducatur *g*♈ ipſi *T*♈ parallela, & capiatur angulus ♈*gV* angulo ♈*QG* æqualis, erit hic angulus ♈*gV* æqualis longitudini cometæ e loco *g* ſpectati; & angulus *TVg* parallaxis erit, quæ oritur a tranſlatione terræ de loco *g* in locum *T*: ac proinde *V* locus erit cometæ in plano eclipticæ. Hic autem locus *V* orbe *Jovis* inferior eſſe ſolet.

Idem colligitur ex curvatura viæ cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine curſus, ubi motus apparentis pars illa, quæ a parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere ſolent ab his circulis, & quoties terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maxime ex parallaxi, propterea quod reſpondet motui terræ; & inſignis ejus quantitas, meo computo, collocavit diſparentes cometas ſatis longe infra

infra jovem. Unde consequens est quod in perigæis & periheliis, ubi propius adsunt, descendunt sæpius infra orbes martis & inferiorum planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœlestis a sole illustrati & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur splendor in quadruplicata ratione distantiæ: in duplicata ratione videlicet ob auctam corporis distantiam a sole, & in alia duplicata ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde si detur & lucis quantitas & apparens diameter cometæ, dabitur distantia, dicendo quod distantia sit ad distantiam planetæ, in ratione diametri ad diametrum directe & ratione subduplicata lucis ad lucem inverse. Sic minima capillitii cometæ anni 1682 diameter, per tubum opticum sexdecim pedum a *Flamstedio* observata & micrometro mensurata, æquabat 2′. 0″; nucleus autem seu stella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, ideoque lata erat tantum 11″ vel 12″. Luce vero & claritate capitis superabat caput cometæ anni 1680, stellasque primæ vel secundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus saturnum cum annulo suo quasi quadruplo lucidiorem fuisse: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi sit quasi 21″, ideoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter esset 30″: erit distantia cometæ ad distantiam saturni ut 1 ad $\sqrt{4}$ inverse, & 12″ ad 30″ directe, id est, ut 24 ad 30 seu 4 ad 5. Rursus cometa anni 1665 mense aprili, ut auctor est *Hevelius*, claritate sua pene fixas omnes superabat, quinetiam ipsum saturnum, ratione coloris videlicet longe vividioris. Quippe lucidior erat hic cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, & cum stellis primæ magnitudinis conferabatur. Latitudo capillitii erat quasi 6′, at nucleus cum planetis ope tubi optici collatus plane minor erat jove, & nunc minor corpore intermedio saturni, nunc ipsi æqualis judicabatur. Porro cum diameter capillitii cometarum raro superet 8′ vel 12′, diameter vero nuclei, seu stellæ centralis sit quasi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet stellas hasce ut plurimum ejusdem esse apparentis magnitudinis cum planetis. Unde cum lux earum cum luce saturni non raro conferri possit, eamque aliquando superet; mani-

De Mundi Systemate

festum est, quod cometæ omnes in periheliis vel infra saturnum collocandi sint, vel non longe supra. Errant igitur toto cœlo, qui cometas in regionem fixarum prope ablegant: qua certe ratione non magis illustrari deberent a sole nostro, quam planetæ, qui hic sunt, illustrantur a stellis fixis.

Hæc disputavimus non considerando obscurationem cometarum per fumum illum maxime copiosum & crassum, quo caput circundatur, quasi per nubem obtuse semper lucens. Nam quanto obscurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propius ad solem accedat necesse est, ut copia lucis a se reflexæ planetas æmuletur. Inde verisimile fit cometas longe infra sphæram saturni descendere, uti ex parallaxi probavimus. Idem vero quam maxime confirmatur ex caudis. Hæ vel ex reflexione fumi sparsi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore casu minuenda est distantia cometarum, ne fumus a capite semper ortus per spatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expansione propagetur. In posteriore referenda est lux omnis tam caudæ quam capillitii ad nucleum capitis. Igitur si concipiamus lucem hanc omnem congregari & intra discum nuclei coarctari, nucleus ille jam certe, quoties caudam maximam & fulgentissimam emittit, jovem ipsum splendore suo multum superabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multo magis illustrabitur a sole, ideoque erit soli multo propior. Quinetiam capita sub sole delitescentia, & caudas cum maximas tum fulgentissimas instar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem veneris collocari debent. Nam lux illa omnis si in stellam congregari supponatur, ipsam venerem ne dicam veneres plures conjunctas quandoque superaret.

Idem denique colligitur ex luce capitum crescente in recessu cometarum a terra solem versus, ac decrescente in eorum recessu a sole versus terram. Sic enim cometa posterior anni 1665 (observante *Hevelio*) ex quo conspici cœpit, remittebat semper de motu suo apparente, ideoque prætererat perigæum; splendor vero capitis nihilominus indies crescebat, usque dum cometa radiis solaribus obtectus desiit apparere. Cometa anni 1683 (observante eodem *Hevelio*) in fine mensis julii, ubi primum conspectus est, tardissime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter singulis diebus in orbe suo

ſuo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuo augebatur uſque ad *Sept.* 4. quando evaſit graduum quaſi quinque. Igitur toto hoc tempore cometa ad terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro menſurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6. eſſe tantum 6′. 5″ incluſa coma, at *Sept.* 2. eſſe 9′. 7″. Caput igitur initio longe minus apparuit quam in fine motus, at initio tamen in vicinia ſolis longe lucidius extitit quam circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob receſſum ipſius a ſole, quoad lumen decrevit, non obſtante acceſſu ad terram. Cometa anni 1618 circa medium menſis *Decembris*, & iſte anni 1680 circa finem ejuſdem menſis, celerrime movebantur, ideoque tunc erant in perigæis. Verum ſplendor maximus capitum contigit ante duas fere ſeptimanas, ubi modo exierant de radiis ſolaribus; & ſplendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate ſolis. Caput cometæ prioris, juxta obſervationes *Cyſati*, *Decemb.* 1. majus videbatur ſtellis primæ magnitudinis, & *Decemb.* 16. (jam in perigæo exiſtens) magnitudine parum, ſplendore ſeu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit obſervandi. Die 12 menſis *Decemb.* conſpectum & a *Flamſtedio* obſervatum eſt caput cometæ poſterioris in diſtantia novem graduum a ſole; id quod ſtellæ tertiæ magnitudinis vix conceſſum fuiſſet. *Decemb.* 15 & 17 apparuit idem ut ſtella tertiæ magnitudinis, diminutum utique ſplendore nubium juxta ſolem occidentem. *Decemb.* 26. velociſſime motus, inque perigæo propemodum exiſtens, cedebat ori pegaſi, ſtellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3. apparebat ut ſtella quartæ, *Jan.* 9. ut ſtella quintæ, *Jan.* 13. ob ſplendorem lunæ creſcentis diſparuit. *Jan.* 25. vix æquabat ſtellas magnitudinis ſeptimæ. Si ſumantur æqualia a perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus poſita, ob æquales a terra diſtantias, æqualiter lucere debuiſſent, in plaga ſolis maxime ſplenduere, ex altera perigæi parte evanuere. Igitur ex magna lucis in utroque ſitu differentia, concluditur magna ſolis & cometæ vicinitas in ſitu priore. Nam lux cometarum regularis eſſe ſolet, & maxima apparere ubi capita velociſſime moventur, atque ideo ſunt in perigæis; niſi quatenus ea major eſt in vicinia ſolis.

Corol. 1. Splendent igitur cometæ luce solis a se reflexa.

Corol. 2. Ex dictis etiam intelligitur cur cometæ tantopere frequentant regionem solis. Si cernerentur in regionibus longe ultra saturnum, deberent sæpius apparere in partibus soli oppositis. Forent enim terræ viciniores, qui in his partibus versarentur; & sol interpositus obscuraret cæteros. Verum percurrendo historias cometarum, reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti sunt in hemisphærio solem versus, quam in hemisphærio opposito, præter alios proculdubio non paucos, quos lux solaris obtexit. Nimirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adeo illustrantur a sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhibeant, quam sint ipso jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa solem descripti pars longe major sita est a latere terræ, quod solem respicit; inque parte illa majore cometæ, soli ut plurimum viciniores, magis illuminari solent.

Corol. 3. Hinc etiam manifestum est, quod cœli resistentia destituuntur. Nam cometæ vias obliquas & nonnunquam cursui planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrime, & motus suos, etiam contra cursum planetarum diutissime conservant. Fallor ni genus planetarum sint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod scriptores aliqui meteora esse volunt, argumentum a capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita cometarum atmosphæris ingentibus cinguntur; & atmosphæræ inferne densiores esse debent. Unde nubes sunt, non ipsa cometarum corpora, in quibus mutationes illæ visuntur. Sic terra si e planetis spectaretur, luce nubium suarum proculdubio splenderet, & corpus firmum sub nubibus prope delitesceret. Sic cingula jovis in nubibus planetæ illius formata sunt, quæ situm mutant inter se, & firmum jovis corpus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora cometarum sub atmosphæris & profundioribus & crassioribus abscondi debent.

PRO-

PROPOSITIO XL. THEOREMA XX.

Cometas in sectionibus conicis umbilicos in centro solis habentibus moveri, & radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describere.

Patet per corol. 1. prop. XIII. libri primi, collatum cum prop. VIII, XII, & XIII. libri tertii.

Corol. 1. Hinc si cometæ in orbem redeunt; orbes erunt ellipses, & tempora periodica erunt ad tempora periodica planetarum in axium principalium ratione sesquiplicata. Ideoque cometæ maxima ex parte supra planetas versantes, & eo nomine orbes axibus majoribus describentes, tardius revolventur. Ut si axis orbis cometæ sit quadruplo major axe orbis saturni, tempus revolutionis cometæ erit ad tempus revolutionis saturni, id est, ad annos 30, ut $4\sqrt{4}$ (seu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. Orbes autem erunt parabolis adeo finitimi, ut eorum vice parabolæ sine erroribus sensibilibus adhiberi possint.

Corol. 3. Et propterea (per corol. 7. prop. XVI. lib. 1.) velocitas cometæ omnis, erit semper ad velocitatem planetæ cujusvis circa solem in circulo revolventis, in subduplicata ratione duplæ distantiæ planetæ a centro solis, ad distantiam cometæ a centro solis quamproxime. Ponamus radium orbis magni, seu ellipseos in qua terra revolvitur semidiametrum maximam esse partium 100000000: & terra motu suo diurno mediocri describet partes 1720212, & motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideoque cometa in eadem telluris a sole distantia mediocri, ea cum velocitate quæ sit ad velocitatem telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, describet motu suo diurno partes 2432747, & motu horario partes $101364\frac{1}{2}$. In majoribus autem vel minoribus distantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in subduplicata ratione distantiarum reciproce, ideoque datur.

Corol. 4. Unde si latus rectum parabolæ quadruplo majus sit radio orbis magni, & quadratum radii illius ponatur esse partium 100000000: area quam cometa radio ad solem ducto singulis diebus describit,

De Mundi Systemate

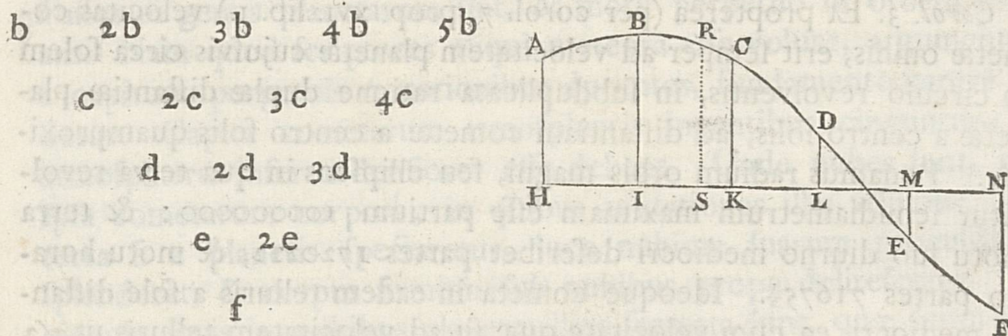
erit partium $1216373\frac{1}{2}$, & ſingulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$. Sin latus rectum majus ſit vel minus in ratione quavis, erit area diurna & horaria major vel minor in eadem ratione ſubduplicata.

LEMMA V.

Invenire lineam curvam generis parabolici, quæ per data quotcunque puncta tranſibit.

Sunto puncta illa A, B, C, D, E, F, &c. & ab iiſdem ad rectam quamvis poſitione datam HN demitte perpendicula quotcunque AH, BI, CK, DL, EM, FN.

Caſ. 1. Si punctorum H, I, K, L, M, N æqualia ſunt intervalla HI, IK, KL, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK, &c. differentias primas $b, 2b, 3b, 4b, 5b$, &c. ſecundas $c, 2c, 3c, 4c$, &c. tertias $d, 2d, 3d$, &c. id eſt, ita ut ſit $AH-BI=b$, $BI-CK=2b$, $CK-DL=3b$, $DL+EM=4b$, $-EM+FN=5b$, &c. dein $b-$



$2b=c$, &c. & ſic pergatur ad differentiam ultimam, quæ hic eſt f. Deinde erecta quacunque perpendiculari RS, quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quæſitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla HI, IK, KL, LM, &c. unitates eſſe, & dic $AH=a$, $-HS=p$, $\frac{1}{2}p$ in $-IS=q$, $\frac{1}{3}q$ in $+SK=r$, $\frac{1}{4}r$ in $+SL=s$, $\frac{1}{5}s$ in $+SM=t$; pergendo videlicet ad uſque penultimum perpendiculum ME, & præponendo ſigna negativa terminis HS, IS, &c. qui

jacent

jacent ad partes puncti *S* versus *A*, & signa affirmativa terminis *SK*, *SL*, &c. qui jacent ad alteras partes puncti *S*. Et signis probe observatis, erit $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Cas. 2. Quod si punctorum *H*, *I*, *K*, *L*, &c. inæqualia sint intervalla *HI*, *IK*, &c. collige perpendiculorum *AH*, *BI*, *CK*, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum divisas *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, 5*b*; secundas per intervalla bina divisa *c*, 2*c*, 3*c*, 4*c*, &c. tertias per intervalla terna divisas *d*, 2*d*, 3*d*, &c. quartas per intervalla quaterna divisas *e*, 2*e*, &c. & sic deinceps; id est, ita ut sit $b = \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$, &c. dein $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$, $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$, &c. postea $d = \frac{c - 2c}{HL}$, $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$, &c. Inventis differentiis, dic $AH = a$, $-HS = p$, *p* in $-IS = q$, *q* in $+SK = r$, *r* in $+SL = s$, *s* in $+SM = t$; pergendo scilicet ad usque perpendiculum penultimum *ME*, & erit ordinatim applicata $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Corol. Hinc areæ curvarum omnium inveniri possunt quamproxime. Nam si curvæ cujusvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot, & parabola per eadem duci intelligatur: erit area parabolæ hujus eadem quamproxime cum area curvæ illius quadrandæ. Potest autem parabola per methodos notissimas semper quadrari Geometrice.

LEMMA VI.

Ex observatis aliquot locis cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

Designent *HI*, *IK*, *KL*, *LM* tempora inter observationes (*in fig. præced.*) *HA*, *IB*, *KC*, *LD*, *ME* observatas quinque longitudines cometæ, *HS* tempus datum inter observationem primam & longitudinem quæsitam. Et si per puncta *A*, *B*, *C*, *D*, *E* duci intelligatur curva regularis *ABCDE*; & per lemma superius inveniatur ejus ordinatim applicata *RS*, erit *RS* longitudo quæsita.

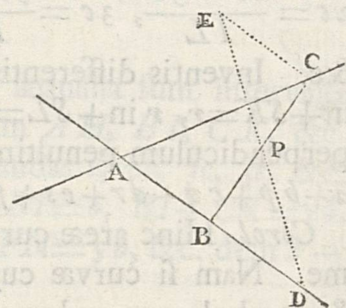
Eadem methodo ex observatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

De Mundi Systemate

Si longitudinum observatarum parvæ sint differentiæ, puta graduum tantum 4 vel 5; suffecerint observationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores sint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt observationes quinque adhiberi.

LEMMA VII.

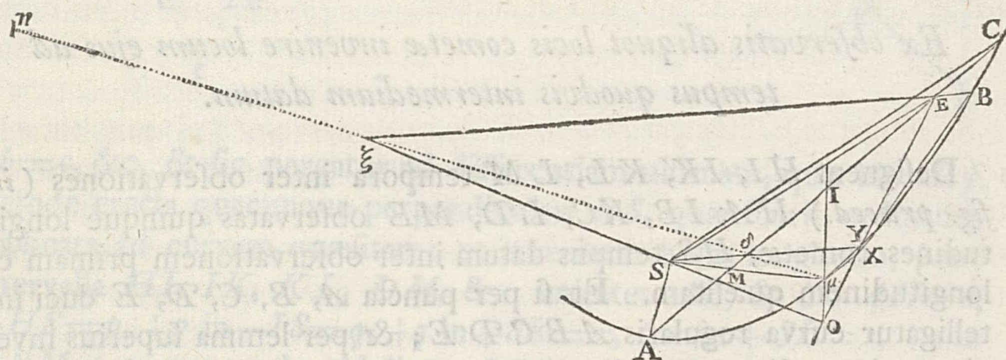
Per datum punctum P *ducere rectam lineam* BC, *cujus partes* PB, PC, *rectis duabus positione datis* AB, AC *abscissæ, datam habeant rationem ad invicem.*



A puncto illo *P* ad rectarum alterutram *AB* ducatur recta quævis *PD*, & producatur eadem versus rectam alteram *AC* usque ad *E*, ut sit *PE* ad *PD* in data illa ratione. Ipsi *AD* parallela sit *EC*; & si agatur *CPB*, erit *PC* ad *PB* ut *PE* ad *PD*. *Q.E.F.*

LEMMA VIII.

Sit ABC *parabola umbilicum habens* S. *Chorda* AC *bi-*



secta in I *abscindatur segmentum* ABCI, *cujus diameter sit*

I μ

I μ & vertex μ. In I μ producta capiatur μ O æqualis dimidio ipsius I μ. Jungatur OS, & producatur ea ad ξ, ut sit S ξ æqualis 2 SO. Et si cometa B moveatur in arcu CBA, & agatur ξ B secans AC in E: dico quod punctum E abscindet de chorda AC segmentum AE tempori proportionale quamproxime.

Jungatur enim *EO* secans arcum parabolicum *ABC* in *Y*, & agatur *μ X*, quæ tangat eundem arcum in vertice *μ*, & actæ *EO* occurrat in *X*; & erit area curvilinea *AEXμA* ad aream curvilineam *ACYμA* ut *AE* ad *AC*. Ideoque cum triangulum *ASE* sit ad triangulum *ASC* in eadem ratione, erit area tota *ASEXμA* ad aream totam *ASCYμA* ut *AE* ad *AC*. Cum autem *ξO* sit ad *SO* ut 3 ad 1, & *EO* ad *XO* in eadem ratione, erit *SX* ipsi *EB* parallela: & propterea si jungatur *BX*, erit triangulum *SEB* triangulo *XEB* æquale. Unde si ad aream *ASEXμA* addatur triangulum *EXB*, & de summa auferatur triangulum *SEB*, manebit area *ASBXμA* areæ *ASEXμA* æqualis, atque ideo ad aream *ASCYμA* ut *AE* ad *AC*. Sed areæ *ASBXμA* æqualis est area *ASBYμA* quamproxime, & hæc area *ASBYμA* est ad aream *ASCYμA*, ut tempus descripti arcus *AB* ad tempus descripti arcus totius *AC*. Ideoque *AE* est ad *AC* in ratione temporum quamproxime. *Q. E. D.*

Corol. Ubi punctum *B* incidit in parabolæ verticem *μ*, est *AE* ad *AC* in ratione temporum accurate.

Scholium.

Si jungatur *μξ* secans *AC* in *δ*, & in ea capiatur *ξn*, quæ sit ad *μB* ut 27 *MI* ad 16 *Mμ*: acta *Bn* secabit chordam *AC* in ratione temporum magis accurate quam prius. Jaceat autem punctum *n* ultra punctum *ξ*, si punctum *B* magis distat a vertice principali parabolæ quam punctum *μ*; & citra, si minus distat ab eodem vertice.

De Mundi Systemate

LEMMA IX.

Rectæ I μ & μ M & *longitudo* $\frac{AIC}{4S\mu}$ *æquantur inter se.*

Nam $4S\mu$ est latus rectum parabolæ pertinens ad verticem μ.

LEMMA X.

Si producatur Sμ *ad* N & P, *ut* μN *sit pars tertia ipsius* μI, & SP *sit ad* SN *ut* SN *ad* Sμ. *Cometa, quo tempore describit arcum* AμC, *si progrederetur ea semper cum velocitate quam habet in altitudine ipsi* SP *æquali, describeret longitudinem æqualem chordæ* AC.

Nam si cometa velocitate, quam habet in μ, eodem tempore progrederetur uniformiter in recta, quæ parabolam tangit in μ; area, quam radio ad punctum S ducto describeret, æqualis esset areæ parabolicæ $ASC\mu$. Ideoque contentum sub longitudine in tangente descripta & longitudine $S\mu$ esset ad contentum sub longitudinibus AC & SM, ut area $ASC\mu$ ad triangulum ASC, id est, ut SN ad SM. Quare AC est ad longitudinem in tangente descriptam, ut $S\mu$ ad SN. Cum autem velocitas cometæ in altitudine SP sit (per corol. 6. prop. XVI. lib. I.) ad ejus velocitatem in altitudine $S\mu$, in subduplicata ratione SP ad $S\mu$ inverse, id est, in ratione $S\mu$ ad SN; longitudo hac velocitate eodem tempore descripta, erit ad longitudinem

gitudinem in tangente descriptam, ut $S\mu$ ad SN. Igitur AC & longitudo hac nova velocitate descripta, cum sint ad longitudinem in tangente descriptam in eadem ratione, æquantur inter se. *Q. E. D.*

Corol. Cometa igitur ea cum velocitate, quam habet in altitudine $S\mu + \frac{2}{3} I\mu$, eodem tempore describeret chordam AC quamproxime.

LEMMA XI.

Si cometa motu omni privatus de altitudine SN *seu* $S\mu + \frac{1}{3} I\mu$ *demitteretur, ut caderet in solem, & ea semper vi uniformiter continuata urgeretur in solem, qua urgetur sub initio; idem semisse temporis, quo in orbe suo describat arcum* AC, *descensu suo describeret spatium longitudini* $I\mu$ *æquale.*

Nam cometa, quo tempore describat arcum parabolicum AC, eodem tempore ea cum velocitate, quam habet in altitudine SP (per lemma novissimum) describet chordam AC, ideoque (per corol. 7. prop. XVI. lib. I.) eodem tempore in circulo, cujus semidiameter esset SP, vi gravitatis suæ revolvendo, describeret arcum, cujus longitudo esset ad arcus parabolici chordam AC, in subduplicata ratione unitatis ad binarium. Et propterea eo cum pondere, quod habet in solem in altitudine SP, cadendo de altitudine illa in solem, describeret semisse temporis illius (per corol. 9. prop. IV. lib. I.) spatium æquale quadrato semissis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis SP, id est, spatium $\frac{AIq}{4SP}$. Unde cum pondus cometæ in solem in altitudine SN sit ad ipsius pondus in solem in altitudine SP, ut SP ad $S\mu$: cometa pondere quod habet in altitudine SN eodem tempore, in solem cadendo, describet spatium $\frac{AIq}{4S\mu}$, id est, spatium longitudini $I\mu$ vel $M\mu$ æquale. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXI.

Cometæ in parabola moti trajectoriam ex datis tribus obſervationibus determinare.

Problema hocce longe difficillimum multimode aggreſſus, compoſui problemata quædam in libro primo, quæ ad ejus ſolutionem ſpectant. Poſtea ſolutionem ſequentem paulo ſimpliciorem excogitavi.

Seligantur tres obſervationes æqualibus temporum intervallis ab invicem quamproxime diſtantes. Sit autem temporis intervallum illud, ubi cometa tardius movetur, paulo majus altero, ita videlicet ut temporum differentia ſit ad ſummam temporum, ut ſumma temporum ad dies plus minus ſexcentos; vel ut punctum *E* (in fig. lem. viii.) incidat in punctum *M* quamproxime, & inde aberret verſus *I* potius quam verſus *A*. Si tales obſervationes non præſto ſint, inveniendus eſt novus cometæ locus per lemma ſextum.

Deſignent

Designent *S* solem, *T*, *t*, τ tria loca terræ in orbe magno, *TA*, *tB*, τC observatas tres longitudines cometæ, *V* tempus inter observationem primam & secundam, *W* tempus inter secundam ac tertiam, X longitudinem, quam cometa toto illo tempore ea cum velocitate, quam habet in mediocri telluris a sole distantia, describere posset, quæque (per corol. 3. prop. XL. lib. III.) invenienda est, & *tV* perpendiculum in chordam $T\tau$. In observata longitudine media *tB* sumatur utcunque punctum *B* pro loco cometæ in plano eclipticæ, & inde versus solem *S* ducatur linea *BE*, quæ sit ad sagittam *tV*, ut contentum sub *SB* & *St quad.* ad cubum hypotenusæ trianguli rectanguli, cujus latera sunt *SB* & tangens latitudinis cometæ in observatione secunda ad radium *tB*. Et per punctum *E* agatur (per hujus lem. VII.) recta *AEC*, cujus partes *AE*, *EC*, ad rectas *TA* & τC terminatæ, sint ad invicem ut tempora *V* & *W*: & erunt *A* & *C* loca cometæ in plano eclipticæ in observatione prima ac tertia quamproxime, si modo *B* sit locus ejus recte assumptus in observatione secunda.

Ad *AC* bisectam in *I* erige perpendiculum *Ii*. Per punctum *B* age occultam *Bi* ipsi *AC* parallelam. Junge occultam *Si* secantem *AC* in λ, & comple parallelogrammum $iI\lambda\mu$. Cape $I\sigma$ æqualem $3I\lambda$, & per solem *S* age occultam $\sigma\xi$ æqualem $3S\sigma + 3i\lambda$. Et deletis jam literis *A*, *E*, *C*, *I*, a puncto *B* versus punctum ξ duc occultam novam *BE*, quæ sit ad priorem *BE* in duplicata ratione distantiæ *BS* ad quantitatem $S\mu + \frac{1}{3}i\lambda$. Et per punctum *E* iterum duc rectam *AEC* eadem lege ac prius, id est, ita ut ejus partes *AE* & *EC* sint ad invicem, ut tempora inter observationes *V* & *W*. Et erunt *A* & *C* loca cometæ magis accurate.

Ad *AC* bisectam in *I* erigantur perpendicula *AM*, *CN*, *IO*, quorum *AM* & *CN* sint tangentes latitudinum in observatione prima ac tertia ad radios *TA* & τC. Jungatur *MN* secans *IO* in *O*. Constituatur rectangulum $iI\lambda\mu$ ut prius. In *IA* producta capiatur *ID* æqualis $S\mu + \frac{2}{3}i\lambda$. Deinde in *MN* versus *N* capiatur *MP*, quæ sit ad longitudinem supra inventam X, in subduplicata ratione mediocris distantiæ telluris a sole (seu semidiametri orbis magni) ad distantiam *OD*. Si punctum *P* incidat in punctum *N*; erunt *A*, *B*, *C* tria loca cometæ, per quæ orbis ejus in

plano

plano eclipticæ deſcribi debet. Sin punctum *P* non incidat in punctum *N*; in recta *AC* capiatur *CG* ipſi *NP* æqualis, ita ut puncta *G* & *P* ad eaſdem partes rectæ *NC* jaceant.

Eadem methodo, qua puncta *E*, *A*, *C*, *G*, ex aſſumpto puncto *B* inventa ſunt, inveniantur ex aſſumptis utcunque punctis aliis *b* & *β* puncta nova *e*, *a*, *c*, *g*, & *ε*, *α*, *κ*, *γ*. Deinde ſi per *G*, *g*, *γ* ducatur circumferentia circuli *G g γ*, ſecans rectam *τ C* in *Z*: erit *Z* locus cometæ in plano eclipticæ. Et ſi in *AC*, *ac*, *α κ* capiantur *AF*, *af*, *α φ* ipſis *CG*, *cg*, *κγ* reſpective æquales, & per puncta *F*, *f*, *φ* ducatur circumferentia circuli *F f φ*, ſecans rectam *AT* in *X*; erit punctum *X* alius cometæ locus in plano eclipticæ. Ad puncta *X* & *Z* erigantur tangentes latitudinum cometæ ad radios *TX* & *τZ*; & habebuntur loca duo cometæ in orbe proprio. Denique (per prop. xix. lib. i.) umbilico *S*, per loca illa duo deſcribatur parabola, & hæc erit trajectoria cometæ. *Q. E. I.*

Conſtructionis hujus demonſtratio ex lemmatibus conſequitur: quippe cum recta *AC* ſecetur in *E* in ratione temporum, per lemma vii, ut oportet per lem. viii: & *BE* per lem. xi. ſit pars rectæ *BS* vel *B ξ* in plano eclipticæ arcui *ABC* & chordæ *AEC* interjecta; & *MP* (per corol. lem. x.) longitudo ſit chordæ arcus, quem cometa

cometa in orbe proprio inter obſervationem primam ac tertiam deſcribere debet, ideoque ipſi *MN* æqualis fuerit, ſi modo *B* ſit verus cometæ locus in plano eclipticæ.

Cæterum puncta *B*, *b*, *β* non quælibet, ſed vero proxima eligere convenit. Si angulus *AQt*, in quo veſtigium orbis in plano eclipticæ deſcriptum ſecat rectam *tB*, præterpropter innoteſcat; in angulo illo ducenda erit recta occulta *AC*, quæ ſit ad $\frac{4}{3}$ *T*τ in ſubduplicata ratione *SQ* ad *St*. Et agendo rectam *SEB*, cujus pars *EB* æquetur longitudini *Vt*, determinabitur punctum *B* quod prima vice uſurpare licet. Tum recta *AC* deleta & ſecundum præcedentem conſtructionem iterum ducta, & inventa inſuper longitudine *MP*; in *tB* capiatur punctum *b*, ea lege, ut ſi *TA*, τ*C* ſe mutuo ſecuerint in *Y*, ſit diſtantia *Yb* ad diſtantiam *YB*, in ratione compoſita ex ratione *MP* ad *MN* & ratione ſubduplicata *SB* ad *Sb*. Et eadem methodo inveniendum erit punctum tertium *β* ſi modo operationem tertio repetere lubet. Sed hac methodo operationes duæ ut plurimum ſuffecerint. Nam ſi diſtantia *Bb* perexigua obvenerit; poſtquam inventa ſunt puncta *F*, *f* & *G*, *g*, actæ rectæ *Ff* & *Gg* ſecabunt *TA* & τ*C* in punctis quæſitis *X* & *Z*.

Exemplum.

Proponatur cometa anni 1680. Hujus motum a *Flamſtedio* obſervatum & ex obſervationibus computatum, atque ab *Halleio* ex iiſdem obſervationibus correctum, tabula ſequens exhibet.

De Mundi Systemate.

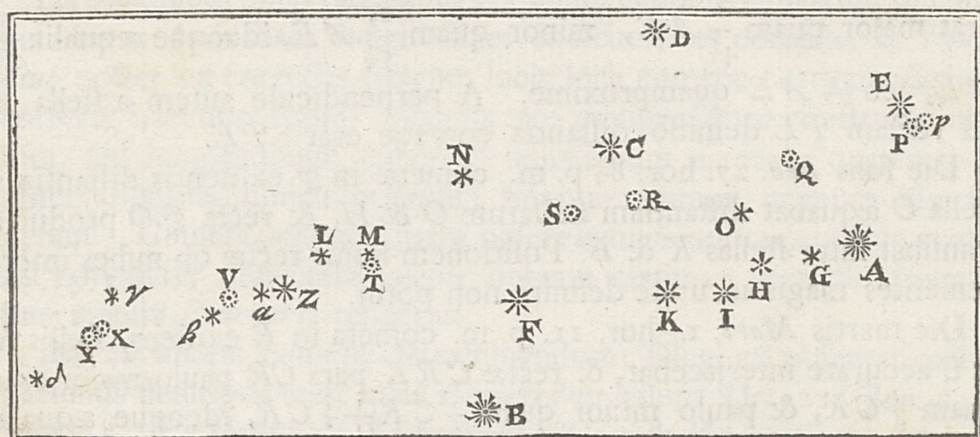
	Tem. appar	Tem. verum.	Long. Solis.	Cometæ Longitudo.	Cometæ Lat. bor.
	h. ′	h. ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
1680. *Dec.* 12	4 . 46	4 . 46 . 0	♑ 1 . 51 . 23	♑ 6 . 32 . 30	8 . 28 . 0
21	6 . 32½	6 . 36 . 59	11 . 6 . 44	♒ 5 . 8 . 12	21 . 42 . 13
24	6 . 12	6 . 17 . 52	14 . 9 . 26	18 . 49 . 23	25 . 23 . 5
26	5 . 14	5 . 20 . 44	16 . 9 . 22	28 . 24 . 13	27 . 0 . 52
29	7 . 55	8 . 3 . 2	19 . 19 . 43	♓ 13 . 10 . 41	28 . 9 . 58
30	8 . 2	8 . 10 . 26	20 . 21 . 9	17 . 38 . 20	28 . 11 . 53
1681. *Jan.* 5	5 . 51	6 . 1 . 38	26 . 22 . 18	♈ 8 . 48 . 53	26 . 15 . 7
9	6 . 49	7 . 0 . 53	♒ 0 . 29 . 2	18 . 44 . 4	24 . 11 . 56
10	5 . 54	6 . 6 . 10	1 . 27 . 43	20 . 40 . 50	23 . 43 . 52
13	6 . 56	7 . 8 . 55	4 . 33 . 20	25 . 59 . 48	22 . 17 . 28
25	7 . 44	7 . 58 . 42	16 . 45 . 36	♉ 9 . 35 . 0	17 . 56 . 30
30	8 . 7	8 . 21 . 53	21 . 49 . 58	13 . 19 . 51	16 . 42 . 18
Feb. 2	6 . 20	6 . 34 . 51	24 . 46 . 59	15 . 13 . 53	16 . 4 . 1
5	6 . 50	7 . 4 . 41	27 . 49 . 51	16 . 59 . 6	15 . 27 . 3

His adde obſervationes quaſdam e noſtris.

	Tem. appar.	Cometæ Longitudo.	Cometæ Lat. bor.
1681. *Feb.* 25	8h . 30′	♉ 26° . 18′ . 35″	12° . 46′ . 46″
27	8 . 15	27 . 4 . 30	12 . 36 . 12
Mar. 1	11 . 0	27 . 52 . 42	12 . 23 . 40
2	8 . 0	28 . 12 . 48	12 . 19 . 38
5	11 . 30	29 . 18 . 0	12 . 3 . 16
7	9 . 30	♊ 0 . 4 . 0	11 . 57 . 0
9	8 . 30	0 . 43 . 4	11 . 45 . 52

Hæ obſervationes teleſcopio ſeptupedali, & micrometro filiſque in foco teleſcopii locatis peractæ ſunt: quibus inſtrumentis & poſitiones fixarum inter ſe & poſitiones cometæ ad fixas determinavimus. Deſignet *A* ſtellam quartæ magnitudinis in ſiniſtro calcaneo Perſei (*Bayero* o) *B* ſtellam ſequentem tertiæ magnitudinis in ſiniſtro pede (*Bayero* ζ) & *C* ſtellam ſextæ magnitudinis (*Bayero n*) in talo ejuſdem pedis, ac *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *Z*, α, β, γ, δ ſtellas alias minores in eodem pede. Sintque *p*, *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, *V*, *X*, loca

loca cometæ in observationibus supra descriptis: & existente distantia *AB* partium $80\frac{7}{12}$, erat *AC* partium $52\frac{1}{4}$, *BC* $58\frac{5}{6}$, *AD* $57\frac{5}{12}$, *BD* $82\frac{6}{11}$, *CD* $23\frac{2}{3}$, *AE* $29\frac{4}{7}$, *CE* $57\frac{1}{2}$, *DE* $49\frac{11}{12}$, *AI* $27\frac{7}{12}$, *BI* $52\frac{1}{6}$, *CI* $36\frac{7}{12}$, *DI* $53\frac{5}{11}$, *AK* $38\frac{2}{3}$, *BK* 43, *CK* $31\frac{5}{9}$, *FK*



29, *FB* 23, *FC* $36\frac{1}{4}$, *AH* $18\frac{6}{7}$, *DH* $50\frac{7}{8}$, *BN* $46\frac{5}{12}$, *CN* $31\frac{1}{3}$, *BL* $45\frac{5}{12}$, *NL* $31\frac{5}{7}$. *HO* erat ad *HI* ut 7 ad 6 & producta transibat inter stellas *D* & *E*, sic ut distantia stellæ *D* ab hac recta esset $\frac{1}{6}$ *CD*. *LM* erat ad *LN* ut 2 ad 9, & producta transibat per stellam *H*. His determinabantur positiones fixarum inter se.

Tandem *Poundius* noster iterum observavit positiones harum fixarum inter se, & earum longitudines & latitudines in tabulam sequentem retulit.

Fixarum	Longitudines.	Lat. boreæ.
	° ′ ″	° ′ ″
A	♉ 26 . 41 . 50	12 . 8 . 36
B	28 . 40 . 23	11 . 17 . 54
C	27 . 58 . 30	12 . 40 . 25
E	26 . 27 . 17	12 . 52 . 7
F	28 . 28 . 37	11 . 52 . 22
G	26 . 56 . 8	12 . 4 . 58
H	27 . 11 . 45	12 . 2 . 1
I	27 . 25 . 2	11 . 53 . 11
K	27 . 42 . 7	11 . 53 . 26

Fixarum	Longitudines.	Lat. boreæ.
	° ′ ″	° ′ ″
L	♉ 29 . 33 . 34	12 . 7 . 48
M	29 . 18 . 54	12 . 7 . 20
N	28 . 48 . 29	12 . 31 . 9
Z	29 . 44 . 48	11 . 57 . 13
α	29 . 52 . 3	11 . 55 . 48
β	♊ 0 . 8 . 23	11 . 48 . 56
γ	0 . 40 . 10	11 . 55 . 18
δ	1 . 3 . 20	11 . 30 . 42

Positiones vero cometæ ad has fixas observabam ut sequitur.

Die veneris *Feb.* 25. st. vet. hor. $8\frac{1}{2}$ p.m. cometæ in *p* existentis distantia a stella *E* erat minor quam $\frac{3}{13}$ *AE*, major quam $\frac{1}{5}$ *AE*, ideoque

oque æqualis $\frac{3}{14}$ AE proxime; & angulus ApE nonnihil obtuſus erat, ſed fere rectus. Nempe ſi demitteretur ad pE perpendiculum ab A, diſtantia cometæ a perpendiculo illo erat $\frac{1}{5}$ pE.

Eadem nocte hora $9\frac{1}{2}$, cometæ in P exiſtentis diſtantia a ſtella E erat major quam $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ AE, minor quam $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ AE, ideoque æqualis $\frac{1}{4\frac{7}{8}}$ AE, ſeu $\frac{8}{39}$ AE quamproxime. A perpendiculo autem a ſtella A ad rectam PE demiſſo diſtantia cometæ erat $\frac{4}{5}$ PE.

Die ſolis *Feb.* 27. hor. $8\frac{1}{4}$ p. m. cometæ in Q exiſtentis diſtantia a ſtella O æquabat diſtantiam ſtellarum O & H, & recta QO producta tranſibat inter ſtellas K & B. Poſitionem hujus rectæ ob nubes intervenientes magis accurate definire non potui.

Die martis *Mart.* 1. hor. 11. p. m. cometa in R exiſtens, ſtellis K & C accurate interjacebat, & rectæ CRK pars CR paulo major erat quam $\frac{1}{3}$ CK, & paulo minor quam $\frac{1}{3}$ $CK + \frac{1}{8}$ CR, ideoque æqualis $\frac{1}{3}$ $CK + \frac{1}{16}$ CR ſeu $\frac{16}{45}$ CK.

Die mercurii *Mart.* 2. hor. 8. p. m. cometæ exiſtentis in S diſtantia a ſtella C erat $\frac{4}{9}$ FC quamproxime. Diſtantia ſtellæ F a recta CS producta erat $\frac{1}{24}$ FC; & diſtantia ſtellæ B ab eadem recta, erat quintuplo major quam diſtantia ſtellæ F. Item recta NS producta tranſibat inter ſtellas H & I, quintuplo vel ſextuplo propior exiſtens ſtellæ H quam ſtellæ I.

Die ſaturni *Mart.* 5. hor. $11\frac{1}{2}$ p. m. cometa exiſtente in T, recta MT æqualis erat $\frac{1}{2}$ ML, & recta LT producta tranſibat inter B & F, quadruplo vel quintuplo propior F quam B, auferens a BF quintam vel ſextam ejus partem verſus F. Et MT producta tranſibat extra ſpatium BF ad partes ſtellæ B, quadruplo propior exiſtens ſtellæ B quam ſtellæ F. Erat M ſtella perexigua quæ per teleſcopium videri vix potuit, & L ſtella major quaſi magnitudinis octavæ.

Die lunæ *Mart.* 7 hor. $9\frac{1}{2}$ p. m. cometa exiſtente in V, recta $V\alpha$ producta tranſibat inter B & F, auferens a BF verſus F $\frac{1}{10}$ BF, & erat ad rectam $V\beta$ ut 5 ad 4. Et diſtantia cometæ a recta $\alpha\beta$ erat $\frac{1}{2}$ $V\beta$.

Die mercurii *Mart.* 9. hora $8\frac{1}{2}$. p. m. cometa exiſtente in X, recta γX æqualis erat $\frac{1}{4}$ $\gamma\delta$, & perpendiculum demiſſum a ſtella δ ad rectam γX erat $\frac{2}{5}$ $\gamma\delta$.

Eadem nocte hora 12, cometa exiſtente in Y, recta γY æqualis erat

erat $\frac{1}{3}\gamma\delta$, aut paulo minor, puta $\frac{5}{16}\gamma\delta$, & perpendiculum demissum a stella δ ad rectam $\gamma\Upsilon$ æqualis erat $\frac{1}{6}\gamma\delta$ vel $\frac{1}{7}\gamma\delta$ circiter. Sed cometa ob viciniam horizontis cerni vix potuit, nec locus ejus tam distincte ac in præcedentibus definiri.

Ex hujusmodi observationibus per constructiones figurarum & computationes derivabam longitudines & latitudines cometæ, & *Poundius* noster ex correctis fixarum locis loca cometæ correxit, & loca correcta habentur supra. Micrometro parum affabre constructo usus sum, sed longitudinum tamen & latitudinum errores (quatenus ex observationibus nostris oriantur) minutum unum primum vix superant. Cometa autem (juxta observationes nostras) in fine motus sui notabiliter deflectere cœpit boream versus, a parallelo quem in fine mensis *Februarii* tenuerat.

Jam ad orbem cometæ determinandum; selegi ex observationibus hactenus descriptis tres, quas *Flamstedius* habuit *Dec.* 21, *Jan.* 5, & *Jan.* 25. Ex his inveni St partium 9842,1 & Vt partium 455, quales 10000 sunt semidiameter orbis magni. Tum ad operationem primam assumendo tB partium 5657, inveni SB 9747, BE prima vice 412, $S\mu$ 9503, $i\lambda$ 413: BE secunda vice 421, OD 10186, X 8528,4 MP 8450, MN 8475, NP 25. Unde ad operationem secundam collegi distantiam tb 5640. Et per hanc operationem inveni tandem distantias TX 4775 & τZ 11322. Ex quibus orbem definiendo, inveni nodos ejus descendentem in ♋ & ascendentem in ♑ 1^{gr}. 53′; inclinationem plani ejus ad planum eclipticæ 61^{gr}. 20′$\frac{1}{3}$; verticem ejus (seu perihelium cometæ) distare a nodo 8^{gr}. 38′, & esse in ♐ 27^{gr}. 43′ cum latitudine australi 7^{gr}. 34′; & ejus latus rectum esse 236,8, areamque radio ad solem ducto singulis diebus descriptam 93585, quadrato semidiametri orbis magni posito 100000000; cometam vero in hoc orbe secundum seriem signorum processisse, & *Decemb.* 8^{d}. 0^{h}. 4′. p. m. in vertice orbis seu perihelio fuisse. Hæc omnia per scalam partium æqualium & chordas angulorum ex tabula sinuum naturalium collectas determinavi graphice; construendo schema satis amplum, in quo videlicet semidiameter orbis magni (partium 10000) æqualis esset digitis 16$\frac{1}{3}$ pedis *Anglicani*.

Tandem ut constaret an cometa in orbe sic invento vere moveretur, collegi per operationes partim arithmeticas partim graphicas loca cometæ in hoc orbe ad observationum quarundam tempora: uti in tabula sequente videre licet.

	Distant. Cometæ a Sole	Long. Collect.	Lat. Collect.	Long. Obs.	Lat. Obs.	Differ. Long.	Differ. Lat.
		gr. ′	gr. ′	gr. ′	gr. ′	′	′
Dec. 12	2792	♑ 6.32	8.18½	♑ 6.31⅓	8.26	+1	−7½
29	8403	♓ 13.13⅔	28. 0	♓ 13.11¾	28.10$\frac{1}{12}$	+2	−10$\frac{1}{12}$
Feb. 5	16669	♉ 17. 0	15.29⅔	♉ 16.59⅞	15.27⅖	+0	+2¼
Mar. 5	21737	29.19¾	12. 4	29.20$\frac{6}{7}$	12. 3½	−1	+½

Postea vero *Halleius* noster orbitam per calculum arithmeticum accuratius determinavit, quam per descriptiones linearum fieri licuit; & retinuit quidem locum nodorum in ♋ & ♑ 1gr. 53′, & inclinationem plani orbitæ ad eclipticam 61gr. 20′⅓, ut & tempus perihelii cometæ *Decemb.* 8d. 0h. 4′: distantiam vero perihelii a nodo ascendente in orbita cometæ mensuratam invenit esse 9gr. 20′, & latus rectum parabolæ esse 2430 partium, existente mediocri solis a terra distantia partium 100000. Et ex his datis, calculo itidem arithmetico accurate instituto, loca cometæ ad observationum tempora computavit, ut sequitur.

Tempus verum.	Distantia Cometæ a ☉	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in Long.	Errores in Lat.
d. h. ′		gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Dec. 12. 4.46	28028	♑ 6.29.25	8.26. 0 Bor.	−3. 5	−2. 0
21. 6.37	61076	♒ 5. 6.30	21.43.20	−1.42	+1. 7
24. 6.18	70008	18.48.20	25.22.40	−1. 3	−0.25
26. 5.21	75576	28.22.45	27. 1.36	−1.28	+0.44
29. 8. 3	84021	♓ 13.12.40	28.10.10	+1.59	+0.12
30. 8.10	86661	17.40. 5	28.11.20	+1.45	−0.33
Jan. 5. 6. 1½	101440	♈ 8.49.49	26.15.15	+0.56	+0. 8
9. 7. 0	110959	18.44.36	24.12.54	+0.32	+0.58
10. 6. 6	113162	20.41. 0	23.44.10	+0.10	+0.18
13. 7. 9	120000	26. 0.21	22.17.30	+0.33	+0. 2
25. 7.59	145370	♉ 9.33.40	17.57.55	−1 20	+1.25
30. 8.22	155303	13.17 41	16.42. 7	−2.10	−0 11
Feb. 2. 6.35	160951	15.11.11	16. 4.15	−2.42	+0.14
5. 7. 4½	166686	16.58.25	15.29.13	−0.41	+2.10
25. 8.41	202570	26.15.46	12.48. 0	−2.49	+1.14
Mar. 5.11.39	216205	29.18.35	12. 5.40	+0.35	+2.24

Apparuit etiam hic cometa mense *Novembri* præcedente & *Coburgi* in *Saxonia* a Dno. *Gottfried Kirch* observatus est diebus mensis hujus quarto, sexto & undecimo, stylo veteri; & ex positionibus

ejus

ejus ad proximas ſtellas fixas ope teleſcopii nunc bipedalis nunc decempedalis ſatis accurate obſervatis, ac differentia longitudinum *Coburgi* & *Londini* graduum undecim & locis fixarum a *Poundio* noſtro obſervatis, *Halleius* noſter loca cometæ determinavit ut ſequitur.

Novem. $3^d. 17^h. 2'$, tempore apparente *Londini*, cometa erat in ♌ $29^{gr}. 51'$ cum lat. bor. $1^{gr}. 17'. 45''$.

Novem. $5^d. 15^h. 58'$ cometa erat in ♍ $3^{gr}. 23'$ cum lat. bor. $1^{gr}. 6'$.

Novem. $10^d. 16^h. 31'$ cometa æqualiter diſtabat a ſtellis leonis σ ac τ *Bayero*; nondum vero attigit rectam eaſdem jungentem, ſed parum abfuit ab ea. In ſtellarum catalogo *Flamſtediano* σ tunc habuit ♍ $14^{gr}. 15'$ cum lat. bor. $1^{gr}. 41'$ fere, τ vero ♍ $17^{gr}. 3\frac{1}{2}$, cum lat. auſtr. $0^{gr}. 34'$. Et medium punctum inter has ſtellas fuit ♍ $15^{gr}. 39'\frac{1}{4}$, cum lat. bor. $0^{gr}. 33\frac{1}{2}$. Sit diſtantia cometæ a recta illa $10'$ vel $12'$ circiter, & differentia longitudinum cometæ & puncti illius medii erit $7'$, & differentia latitudinum $7'\frac{1}{2}$, circiter. Et inde cometa erat in ♍ $15^{gr}. 32'$ cum lat. bor. $26'$ circiter.

Obſervatio prima ex ſitu cometæ ad parvas quaſdam fixas abunde ſatis accurata fuit. Secunda etiam ſatis accurata fuit. In tertia, quæ minus accurata fuit, error minutorum ſex vel ſeptem ſubeſſe potuit, & vix major. Longitudo vero cometæ in obſervatione prima, quæ cæteris accuratior fuit, in orbe prædicto parabolico computata erat ♌ $29^{gr}. 30'. 22''$. latitudo borealis $1^{gr}. 25'. 7''$. & diſtantia ejus a ſole 115546.

Porro *Halleius* obſervando quod cometa inſignis intervallo annorum 575 quater apparuiſſet, ſcilicet menſe *Septembri* poſt cædem *Julii Cæſaris*, anno *Chriſti* 531 *Lampadio* & *Oreſte Coſs.* anno *Chriſti* 1106 menſe *Februario*, & ſub finem anni 1680, idque cum cauda longa & inſigni (præterquam quod ſub mortem *Cæſaris*, cauda ob incommodam telluris poſitionem minus apparuiſſet:) quæſivit orbem ellipticum cujus axis major eſſet partium 1382957, exiſtente mediocri diſtantia telluris a ſole partium 10000: in quo orbe utique cometa annis 575 revolvi poſſit. Et ponendo nodum aſcendentem in ♋ $2^{gr}. 2'$; inclinationem plani orbis ad planum eclipticæ $61^{gr}. 6'. 48''$; perihelium cometæ in hoc plano ♐ $22^{gr}. 44'. 25''$; tempus æquatum perihelii *Decem.* $7^d. 23^h. 9'$; diſtantiam perihelii a

nodo

nodo ascendente in plano eclipticæ 9gr. 17′. 35″; & axem conjugatum 18481,2: computavit motum cometæ in hoc orbe elliptico. Loca autem ejus tam ex observationibus deducta quam in hoc orbe computata exhibentur in tabula sequente.

Tempus verum	Long. obs.	Lat. Bor. obs.	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in Long.	Errores in Lat.
d. h. ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Nov. 3.16.47	♌ 29.51. 0	1.17.45	♌ 29.51.22	1.17.32 B	+0.22	−0.13
5.15.37	♍ 3.23. 0	1. 6. 0	♍ 3.24.32	1. 6. 9	+1.32	+0. 9
10.16.18	15.32. 0	0.27. 0	15.33. 2	0.25. 7	+1. 2	−1.53
16.17. 0			♎ 8.16.45	0.53. 7 A		
18.21.34			18.52.15	1.26.54		
20.17. 0			28.10.36	1.53.35		
23.17. 5			♏ 13.22.42	2.29. 0		
Dec. 12. 4.46	♑ 6.32.30	8.28. 0	♑ 6.31.20	8.29. 6 B	−1.10	+1. 6
21. 6.37	♒ 5. 8.12	21.42.13	♒ 5. 6.14	21.44.42	−1.58	+2.29
24. 6.18	18.49.23	25.23. 5	18.47.30	25.23.35	−1.53	+0.30
26. 5.21	28.24.13	27. 0.52	28.21.42	27. 2. 1	−2.31	+1. 9
29. 8. 3	♓ 13.10.41	28. 9.58	♓ 13.11.14	28.10.38	+0.33	+0.40
30. 8.10	17.38.20	28.11.53	17.38.27	28.11.37	+0. 7	−0.16
Jan. 5. 6. 1½	♈ 8.48.53	26.15. 7	♈ 8.48.51	26.14.57	−0. 2	−0.10
9. 7. 1	18.44. 4	24.11.56	18.43.51	24.12.17	−0.13	+0.21
10. 6. 6	20.40.50	23.43.32	20.40.23	23.43.25	−0.27	−0. 7
13. 7. 9	25.59.48	22.17.28	26. 0. 8	22.16.32	+0.20	−0.56
25. 7.59	♉ 9.35. 0	17.56.30	♉ 9.34.11	17.56. 6	−0.49	−0.24
30. 8.22	13.19.51	16.42.18	13.18.28	16.40. 5	−1.23	−2.13
Feb. 2. 6.35	15.13.53	16. 4. 1	15.11.59	16. 2. 7	−1.54	−1.54
5. 7. 4½	16.59. 6	15.27. 3	16.59.17	15.27. 0	+0.11	−0. 3
25. 8.41	26.18.35	12.46.46	26.16.59	12.45.22	−1.36	−1.24
Mar. 1.11.10	27.52.42	12.23.40	27.51.47	12.22.28	−0.55	−1.12
5.11.39	29.18. 0	12. 3.16	29.20.11	12. 2.50	+2.11	−0.26
9. 8.38	0.43. 4	11.45.52	♊ 0.42.43	11.45.35	−0.21	−0.17

Observationes cometæ hujus a principio ad finem non minus congruunt cum motu cometæ in orbe jam descripto, quam motus planetarum congruere solent cum eorum theoriis, & congruendo probant unum & eundem fuisse cometam, qui toto hoc tempore apparuit, ejusque orbem hic recte definitum fuisse.

In tabula præcedente omisimus observationes diebus *Novembris* 16, 18, 20 & 23 ut minus accuratas. Nam cometa his etiam temporibus observatus fuit. *Ponthæus* utique & socii, *Novem.* 17. st. vet. hora sexta matutina *Romæ*, id est, hora 5. 10′ *Londini*, filis ad fixas applicatis, cometam observarunt in ♎ 8gr. 30′ cum latitudine australi 0gr. 40′. Extant eorum observationes in tractatu, quem *Ponthæus*

thæus de hoc cometa in lucem edidit. *Cellius*, qui aderat & observationes suas in epistola ad *D. Cassinum* misit, cometam eadem hora vidit in ♎ 8gr. 30′ cum latitudine australi 0gr. 30′. Eadem hora *Galletius Avenioni* (id est, hora matutina 5. 42 *Londini*) cometam vidit in ♎ 8gr sine latitudine, Cometa autem per theoriam jam fuit in ♎ 8gr. 16′. 45″ cum latitudine australi 0gr. 53′. 7″.

Nov. 18. hora matutina 6. 30′ *Romæ* (id est, hora 5, 40′ *Londini*) *Ponthæus* cometam vidit in ♎ 13gr. 30′ cum latitudine australi 1gr. 20′. *Cellius* in ♎ 13gr. 30′ cum latitudine australi 1gr. 00′. *Galletius* autem hora matutina 5. 30′ *Avenioni* cometam vidit in ♎ 13gr. 00′, cum latitudine australi 1gr. 00′. Et *R. P. Ango* in academia *Flexiensi* apud *Gallos*, hora quinta matutina (id est, hora 5. 9′ *Londini*) cometam vidit in medio inter stellas duas parvas, quarum una media est trium in recta linea in virginis australi manu, *Bayero* ψ, & altera est extrema alæ *Bayero* θ. Unde cometa tunc fuit in ♎ 12gr. 46′ cum latitudine australi 50′. Eodem die *Bostoniæ* in *Nova-Anglia* in latitudine 42½ graduum, hora quinta matutina, (id est *Londini* hora matutina 9. 44′) cometa visus est prope ♎ 14gr, cum latitudine australi 1gr. 30′, uti a cl. *Halleio* accepi.

Nov. 19. hora mat. 4½ *Cantabrigiæ*, cometa (observante juvene quodam) distabat a spica ♍ quasi 2gr boreazephyrum versus. Erat autem spica in ♎ 19gr. 23′. 47″ cum lat. austr. 2gr. 1′. 59″. Eodem die hor. 5. mat. *Bostoniæ* in *Nova-Anglia*, cometa distabat a spica ♍ gradu uno, differentia latitudinum existente 40′. Eodem die in insula *Jamaica*, cometa distabat a spica intervallo quasi gradus unius. Eodem die D. *Arthurus Storer* ad fluvium *Patuxent*, prope *Hunting-Creek* in *Maryland*, in confinio *Virginiæ* in lat. 38½ gr, hora quinta matutina (id est, hora 10a *Londini*) cometam vidit supra spicam ♍, & cum spica propemodum conjunctum, existente distantia inter eosdem quasi ¾ gr. Et ex his observationibus inter se collatis colligo quod hora 9. 44′ *Londini* cometa erat in ♎ 18gr. 50′ cum latitudine australi 1gr. 25′ circiter. Cometa autem per theoriam jam erat in ♎ 18gr. 52′. 15″ cum latitudine australi 1gr. 26′. 54″.

Nov. 20. D. *Montenarus* astronomiæ professor *Paduensis*, hora sexta matutina *Venetiis* (id est, hora 5. 10′ *Londini*) cometam vidit in ♎ 23gr. cum latitudine australi 1gr. 30′. Eodem die *Bostoniæ*, distabat cometa

cometa a spica ♍, 4gr. longitudinis in orientem, ideoque erat in ♎ 23gr. 24′ circiter.

Nov. 21. *Ponthæus* & socii hor. mat. 7¼ cometam observarunt in ♎ 27gr. 50′ cum latitudine australi 1gr. 16′, *Cellius* in ♎ 28gr. *Ango* hora quinta matutina in ♎ 27gr. 45′, *Montenarus* in ♎ 27gr. 51′. Eodem die in insula *Jamaica* cometa visus est prope principium scorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum spica virginis, id est, 2gr. 2′. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballasoræ* in *India Orientali*, (id est ad horam noctis præcedentis 11. 20′ *Londini*) capta est distantia cometæ a spica ♍ 7gr. 35′ in orientem. In linea recta erat inter spicam & lancem, ideoque versabatur in ♎ 26gr. 58′ cum lat. australi 1gr. 11′ circiter; & post horas 5 & 40′ (ad horam scilicet quintam matutinam *Londini*) erat in ♎ 28gr. 12′ cum lat. austr. 1gr. 16′. Per theoriam vero cometa jam erat in ♎ 28gr. 10′. 36″, cum latitudine australi 1gr. 53′. 35″.

Nov. 22. Cometa visus est a *Montenaro* in ♏ 2gr. 33′. *Bostoniæ* autem in *Nova-Anglia* apparuit in ♏ 3gr circiter, eadem fere cum latitudine ac prius, id est, 1gr. 30′. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballasoræ* cometa observabatur in ♏ 1gr. 50′; ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* cometa erat in ♏ 3gr. 5′ circiter. Eodem die *Londini* hora mat. 6½ *Hookius* noster cometam vidit in ♏ 3gr. 30′ circiter, idque in linea recta quæ transit per spicam virginis & cor leonis, non exacte quidem, sed a linea illa paululum deflectentem ad boream. *Montenarus* itidem notavit quod linea a cometa per spicam ducta, hoc die & sequentibus transibat per australe latus cordis leonis, interposito perparvo intervallo inter cor leonis & hanc lineam. Linea recta per cor leonis & spicam virginis transiens, eclipticam secuit in ♍ 3gr. 46′; in angulo 2gr. 51′. Et si cometa locatus fuisset in hac linea in ♏ 3gr ejus latitudo fuisset 2gr. 26′. Sed cum cometa consentientibus *Hookio* & *Montenaro*, nonnihil distaret ab hac linea boream versus, latitudo ejus fuit paulo minor. Die 20. ex observatione *Montenari*, latitudo ejus propemodum æquabat latitudinem spicæ ♍, eratque 1gr. 30′ circiter, & consentientibus *Hookio*, *Montenaro* & *Angone* perpetuo augebatur, ideoque jam sensibiliter major erat quam 1gr. 30′. Inter limites autem jam constitutos 2gr. 26′ & 1gr. 30′, magnitudine mediocri latitudo erit 1gr. 58′ circiter. Cauda cometæ, consentientibus *Hookio* & *Montenaro*, dirigebatur ad spicam ♍, declinans ali-

quantulum

quantulum a stella ista, juxta *Hookium* in austrum, juxta *Montenarum* in boream; ideoque declinatio illa vix fuit sensibilis, & cauda æquatori fere parallela existens, aliquantulum deflectebatur ab oppositione solis boream versus.

Nov. 23. st. vet. hora quinta matutina *Noriburgi* (id est hora $4\frac{2}{3}$ *Londini*) D. *Zimmerman* cometam vidit in ♏ 8gr. 8′, cum latitudine australi 2gr. 31′, captis scilicet ejus distantiis a stellis fixis.

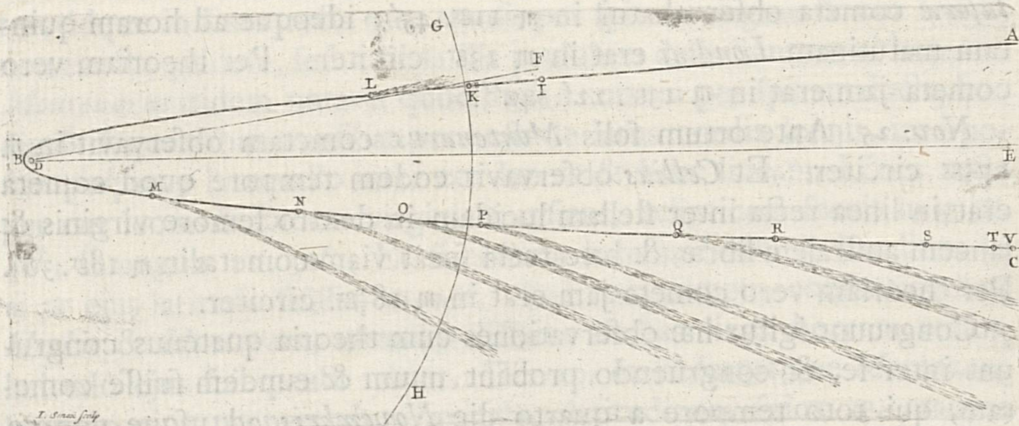
Nov. 24. Ante ortum solis cometa visus est a *Montenaro* in ♏ 12gr. 52′, ad boreale latus rectæ quæ per cor leonis & spicam virginis ducebatur, ideoque latitudinem habuit paulo minorem quam 2gr. 38′. Hæc latitudo, uti diximus, ex observationibus *Montenari*, *Angonis* & *Hookii*, perpetuo augebatur; ideoque jam paulo major erat quam 1gr. 58′; & magnitudine mediocri, sine notabili errore, statui potest 2gr. 18′. Latitudinem *Ponthæus* & *Galletius* jam decrevisse volunt, & *Cellius* & observator in *Nova Anglia* eandem fere magnitudinem retinuisse, scilicet gradus unius vel unius cum semisse. Crassiores sunt observationes *Ponthæi* & *Cellii*, eæ præsertim quæ per azimuthos & altitudines capiebantur, ut & eæ *Galletii*: meliores sunt eæ quæ per positiones cometæ ad fixas a *Montenaro*, *Hookio*, *Angone* & observatore in *Nova-Anglia*, & nonnunquam a *Ponthæo* & *Cellio* sunt factæ. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballasoræ* cometa observabatur in ♏ 11gr. 45′; ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* erat in ♏ 13gr circiter. Per theoriam vero cometa jam erat in ♏ 13gr. 22′. 42″.

Nov. 25. Ante ortum solis *Montenarus* cometam observavit in ♏ $17\frac{3}{4}$gr circiter. Et *Cellius* observavit eodem tempore quod cometa erat in linea recta inter stellam lucidam in dextro femore virginis & lancem australem libræ, & hæc recta secat viam cometæ in ♏ 18gr. 36′. Per theoriam vero cometa jam erat in ♏ $18\frac{1}{3}$gr. circiter.

Congruunt igitur hæ observationes cum theoria quatenus congruunt inter se, & congruendo probant unum & eundem fuisse cometam, qui toto tempore a quarto die *Novembris* ad usque nonum *Martii* apparuit. Trajectoria cometæ hujus bis secuit planum eclipticæ, & propterea non fuit rectilinea. Eclipticam secuit non in oppositis cœli partibus, sed in fine virginis & principio capricorni, intervallo graduum 98 circiter; ideoque cursus cometæ plurimum de-

batur a circulo maximo. Nam & menſe *Novembri* curſus ejus tribus ſaltem gradibus ab ecliptica in auſtrum declinabat, & poſtea menſe *Decembri* gradibus 29 vergebat ab ecliptica in ſeptentrionem partibus duabus orbitæ, in quibus cometa tendebat in ſolem & redibat a ſole, angulo apparente graduum plus triginta ab invicem declinantibus, ut obſervavit *Montenarus*. Pergebat hic cometa per ſigna novem, a leonis ſcilicet ultimo gradu ad principium geminorum, præter ſignum leonis, per quod pergebat antequam videri cœpit; & nulla alia extat theoria, qua cometa tantam cœli partem motu regulari percurrat. Motus ejus fuit maxime inæquabilis. Nam circa diem vigeſimum *Novembris* deſcripſit gradus circiter quinque ſingulis diebus; dein motu retardato inter *Novemb.* 26 & *Decemb.* 12, ſpatio ſcilicet dierum quindecim cum ſemiſſe, deſcripſit gradus tantum 40; poſtea vero motu iterum accelerato, deſcripſit gradus fere quinque ſingulis diebus, antequam motus iterum retardari cœpit. Et theoria, quæ motui tam inæquabili per maximam cœli partem probe reſpondet, quæque eaſdem obſervat leges cum theoria planetarum, & cum accuratis obſervationibus aſtronomicis accurate congruit, non poteſt non eſſe vera.

Cæterum trajectoriam quam cometa deſcripſit, & caudam veram



quam ſingulis in locis projecit, viſum eſt annexo ſchemate in plano trajectoriæ delineatas exhibere: ubi ABC denotat trajectoriam cometæ, D ſolem, DE trajectoriæ axem, DF lineam nodorum, GH

GH interſectionem ſphæræ orbis magni cum plano trajectoriæ, *I* locum cometæ *Nov.* 4. *Ann.* 1680, *K* locum ejuſdem *Nov.* 11, *L* locum *Nov.* 19, *M* locum *Dec.* 12, *N* locum *Dec.* 21, *O* locum *Dec.* 29, *P* locum *Jan.* 5 *ſequent.* *Q* locum *Jan.* 25, *R* locum *Feb.* 5, *S* locum *Feb.* 25, *T* locum *Mar.* 5, & *V* locum *Mar.* 9. Obſervationes vero ſequentes in cauda definienda adhibui.

Nov. 4 & 6. Cauda nondum apparuit. *Nov.* 11. Cauda jam cœpta non niſi ſemiſſem gradus unius longa tubo decempedali viſa fuit. *Nov.* 17. Cauda gradus amplius quindecim longa *Ponthæo* apparuit. *Nov.* 18. Cauda 30gr longa, ſolique directe oppoſita in *Nova-Anglia* cernebatur, & protendebatur uſque ad ſtellam ♂, quæ tunc erat in ♍ 9gr. 54′. *Nov.* 19. In *Mary-land* cauda viſa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec.* 10. Cauda (obſervante *Flamſtedio*) tranſibat per medium diſtantiæ inter caudam ſerpentis Ophiuchi & ſtellam δ in aquilæ auſtrali ala, & deſinebat prope ſtellas *A*, ω, *b* in tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in ♑ 19½gr, cum latitudine boreali 34¼gr circiter. *Dec.* 11. Cauda ſurgebat ad uſque caput ſagittæ (*Bayero* α, β,) deſinens in ♑ 26gr. 43′, cum latitudine boreali 38gr. 34′. *Dec.* 12. Cauda tranſibat per medium ſagittæ, nec longe ultra protendebatur, deſinens in ♒ 4gr, cum latitudine boreali 42½gr circiter. Intelligenda ſunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obſcuriore, in cœlo forſan magis ſereno, cauda *Dec.* 12, hora 5. 40′ *Romæ* (obſervante *Ponthæo*) ſupra cygni uropygium ad gradus 10 ſeſe extulit; atque ab hac ſtella ejus latus ad occaſum & boream min. 45 deſtitit. Lata autem erat cauda his diebus gradus 3, juxta terminum ſuperiorem, ideoque medium ejus diſtabat a ſtella illa 2gr. 15′ auſtrum verſus, & terminus ſuperior erat in ♓ 22gr, cum latitudine boreali 61gr. Et hinc longa erat cauda 70gr circiter. *Dec.* 21. Eadem ſurgebat fere ad cathedram *Caſſiopeiæ*, æqualiter diſtans a β & *Schedir*, & diſtantiam ab utraque diſtantiæ earum ab invicem æqualem habens, ideoque deſinens in ♈ 24gr, cum latitudine 47½gr. *Dec.* 29. Cauda tangebat *Scheat* ſitam ad ſiniſtram, & intervallum ſtellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accurate complebat, & longa erat 54gr; ideoque deſinebat in ♉ 19gr, cum latitudine 35gr. *Jan.* 5. Cauda tetigit ſtellam π in pectore *Andromedæ* ad latus ejus dextrum, & ſtellam μ in ejus cingulo ad latus ſiniſtrum; & (juxta obſervationes

DE MUNDI SYSTEMATE

noſtras) longa erat $4c^{gr}$; curva autem erat & convexo latere ſpectabat ad auſtrum. Cum circulo per ſolem & caput cometæ tranſeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 graduum & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum octo. *Jan.* 13. Cauda luce ſatis ſenſibili terminabatur inter *Alamech* & *Algol*, & luce tenuiſſima deſinebat e regione ſtellæ κ in latere *Perſei*. Diſtantia termini caudæ a circulo ſolem & cometam jungente erat $3^{gr}. 50'$, & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum $8\frac{1}{2}^{gr}$. *Jan.* 25 & 26. Cauda luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel 7; & nocte una & altera ſequente ubi cœlum valde ſerenum erat, luce tenuiſſima & ægerrime ſenſibili attingebat longitudinem graduum duodecim & paulo ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad lucidam in humero orientali aurigæ accurate, ideoque declinabat ab oppoſitione ſolis boream verſus in angulo graduum decem. Denique *Feb.* 10. caudam oculis armatis aſpexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Ponthæus* autem *Feb.* 7. ſe caudam ad longitudinem graduum 12 vidiſſe ſcribit. *Feb.* 25 & deinceps cometa ſine cauda apparuit.

Orbem jam deſcriptum ſpectanti & reliqua cometæ hujus phænomena in animo revolventi, haud difficulter conſtabit, quod corpora cometarum ſunt ſolida, compacta, fixa ac durabilia ad inſtar corporum planetarum. Nam ſi nihil aliud eſſent quam vapores vel exhalationes terræ, ſolis & planetarum, cometa hicce in tranſitu ſuo per viciniam ſolis ſtatim diſſipari debuiſſet. Eſt enim calor ſolis ut radiorum denſitas, hoc eſt, reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum a ſole. Ideoque cum diſtantia cometæ a centro ſolis *Decemb.* 8. ubi in perihelio verſabatur, eſſet ad diſtantiam terræ a centro ſolis ut 6 ad 1000 circiter, calor ſolis apud cometam eo tempore erat ad calorem ſolis æſtivi apud nos ut 1000000 ad 36, ſeu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis eſt quaſi triplo major quam calor quem terra arida concipit ad æſtivum ſolem, ut expertus ſum: & calor ferri candentis (ſi recte conjector) quaſi triplo vel quadruplo major quam calor aquæ ebullientis; ideoque calor, quem terra arida apud cometam in perihelio verſantem ex radiis ſolaribus concipere poſſet, quaſi 2000 vicibus major quam calor ferri candentis. Tanto autem calore

vapores

vapores & exhalationes, omnisque materia volatilis statim consumi ac dissipari debuissent.

Cometa igitur in perihelio suo calorem immensum ad solem concepit, & calorem illum diutissime conservare potest. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem suum omnem spatio horæ unius in aëre consistens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conservaret in ratione diametri, propterea quod superficies (ad cujus mensuram per contactum aëris ambientis refrigeratur) in illa ratione minor est pro quantitate materiæ suæ calidæ inclusæ. Ideoque globus ferri candentis huic terræ æqualis, id est, pedes plus minus 40000000 latus, diebus totidem, & idcirco annis 50000, vix refrigesceret. Suspicor tamen quod duratio caloris, ob causas latentes, augeatur in minore ratione quam ea diametri: & optarim rationem veram per experimenta investigari.

Porro notandum est quod cometa mense *Decembri*, ubi ad solem modo incaluerat, caudam emittebat longe majorem & splendidiorem quam antea mense *Novembri*, ubi perihelium nondum attigerat. Et universaliter caudæ omnes maximæ & fulgentissimæ e cometis oriuntur statim post transitum eorum per regionem solis. Conducit igitur calefactio cometæ ad magnitudinem caudæ. Et inde colligere videor quod cauda nihil aliud sit quam vapor longe tenuissimus, quem caput seu nucleus cometæ per calorem suum emittit.

Cæterum de cometarum caudis triplex est opinio; eas vel jubar esse solis per translucida cometarum capita propagatum, vel oriri ex refractione lucis in progressu ipsius a capite cometæ in terram, vel denique nubem esse seu vaporem a capite cometæ jugiter surgentem & abeuntem in partes a sole aversas. Opinio prima eorum est qui nondum imbuti sunt scientia rerum opticarum. Nam jubar solis in cubiculo tenebroso non cernitur, nisi quatenus lux reflectitur e pulverum & fumorum particulis per aërem semper volitantibus: ideoque in aëre fumis crassioribus infecto splendidius est, & sensum fortius ferit; in aëre clariore tenuius est & ægrius sentitur: in cœlis autem sine materia reflectente nullum esse potest. Lux non cernitur quatenus in jubare est, sed quatenus inde reflectitur ad oculos nostros. Nam visio non fit nisi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione caudæ, ne

cœlum

cœlum totum luce ſolis illuſtratum uniformiter ſplendeat. Opinio ſecunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum ſolent eſſe comites inſeparabiles. Lux fixarum & planetarum diſtincte ad nos tranſmiſſa demonſtrat medium cœleſte nulla vi refractiva pollere. Nam quod dicitur fixas ab *Ægyptiis* cometas nonnunquam viſas fuiſſe, id, quoniam rariſſime contingit, aſcribendum eſt nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & ſcintillatio ad refractiones tum oculorum tum aëris tremuli referendæ ſunt: quippe quæ admotis oculo teleſcopiis evaneſcunt. Aëris & aſcendentium vaporum tremore fit, ut radii facile de anguſto pupillæ ſpatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi apertura neutiquam. Inde eſt quod ſcintillatio in priori caſu generetur, in poſteriore autem ceſſet: & ceſſatio in poſteriore caſu demonſtrat regularem tranſmiſſionem lucis per cœlos ſine omni refractione ſenſibili. Nequis contendat quod caudæ non ſoleant videri in cometis, cum eorum lux non eſt ſatis fortis, quia tunc radii ſecundarii non habent ſatis virium ad oculos movendos, & propterea caudas fixarum non cerni: ſciendum eſt quod lux fixarum plus centum vicibus augeri poteſt mediantibus teleſcopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copioſior eſt, caudæ vero nullæ: cometæ autem ſæpe caudatiſſimi ſunt, ubi capitum lux tenuis eſt & valde obtuſa. Sic enim cometa anni 1680, menſe *Decembri*, quo tempore caput luce ſua vix æquabat ſtellas ſecundæ magnitudinis, caudam emittebat ſplendore notabili uſque ad gradus 40, 50, 60 vel 70 longitudinis & ultra: poſtea *Jan.* 27 & 28 caput apparebat ut ſtella ſeptimæ tantum magnitudinis, cauda vero luce quidem pertenui ſed ſatis ſenſibili longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obſcuriſſima, quæ cerni vix poſſet, porrigebatur ad gradum uſque duodecimum vel paulo ultra: ut ſupra dictum eſt. Sed & *Feb.* 9 & 10 ubi caput nudis oculis videri deſierat, caudam gradus duos longam per teleſcopium contemplatus ſum. Porro ſi cauda oriretur ex refractione materiæ cœleſtis, & pro figura cœlorum deflecteretur de ſolis oppoſitione, deberet deflexio illa in iiſdem cœli regionibus in eandem ſemper partem fieri. Atqui cometa anni 1680 *Decemb.* 28. hora $8\frac{1}{2}$ p.m. *Londini*, verſabatur in ♓ $8^{gr}. 41'$, cum latitudine boreali $28^{gr}. 6'$, ſole exiſtente in ♑ $18^{gr}. 26'$. Et cometa

meta anni 1577, *Dec.* 29 versabatur in ♓ 8gr. 41′ cum latitudine boreali 28gr. 40′, sole etiam existente in ♑ 18gr. 26′ circiter. Utroque in casu terra versabatur in eodem loco, & cometa apparebat in eadem cœli parte: in priori tamen casu cauda cometæ (ex meis & aliorum observationibus) declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppositione solis aquilonem versus; in posteriore vero (ex observationibus *Tychonis*) declinatio erat graduum 21 in austrum. Igitur repudiata cœlorum refractione, superest ut phænomena caudarum ex materia aliqua lucem reflectente deriventur.

Caudas autem a capitibus oriri & in regiones a sole aversas ascendere confirmatur ex legibus quas observant. Ut quod in planis orbium cometarum per solem transeuntibus jacentes, deviant ab oppositione solis in eas semper partes, quas capita in orbibus illis progredientia relinquunt. Quod spectatori in his planis constituto apparent in partibus a sole directe aversis; digrediente autem spectatore de his planis, deviatio paulatim sentitur, & indies apparet major. Quod deviatio cæteris paribus minor est ubi cauda obliquior est ad orbem cometæ, ut & ubi caput cometæ ad solem propius accedit; præsertim si spectetur deviationis angulus juxta caput cometæ. Præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major est ubi major est deviatio, & magis sensibilis ubi cauda cæteris paribus longior est: nam in brevioribus curvatura ægre animadvertitur. Quod deviationis angulus minor est juxta caput cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque ideo quod cauda convexo sui latere partes respicit a quibus fit deviatio, quæque in recta sunt linea a sole per caput cometæ in infinitum ducta. Et quod caudæ quæ prolixiores sunt & latiores, & luce vegetiore micant, sint ad latera convexa paulo splendidiores & limite minus indistincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur phænomena caudæ a motu capitis, non autem a regione cœli in qua caput conspicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, sed a capite suppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in aëre nostro fumus corporis cujusvis igniti petit superiora, idque vel perpendiculariter si corpus quiescat, vel oblique si corpus moveatur in latus: ita in cœlis, ubi corpora gravitant in solem, fumi & vapores ascendere debent a sole (uti jam dictum est)

&

De Mundi Systemate

& ſuperiora vel recta petere, ſi corpus fumans quieſcit; vel oblique, ſi corpus progrediendo loca ſemper deſerit a quibus ſuperiores vaporis partes aſcenderant. Et obliquitas iſta minor erit ubi aſcenſus vaporis velocior eſt: nimirum in vicinia ſolis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diverſitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in columnæ latere præcedente paulo recentior eſt, ideo etiam is ibidem aliquanto denſior erit, lucemque propterea copioſius reflectet, & limite minus indiſtincto terminabitur. De caudarum agitationibus ſubitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque deſcribunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel a mutationibus aëris noſtri, & motibus nubium caudas aliqua ex parte obſcurantium oriantur; vel forte a partibus viæ lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi poſſint, ac tanquam earum partes ſpectari.

Vapores autem, qui ſpatiis tam immenſis implendis ſufficiant, ex cometarum atmoſphæris oriri poſſe, intelligetur ex raritate aëris noſtri. Nam aër juxta ſuperficiem terræ ſpatium occupat quaſi 850 partibus majus quam aqua ejuſdem ponderis, ideoque aëris columna cylindrica pedes 850 alta ejuſdem eſt ponderis cum aquæ columna pedali latitudinis ejuſdem. Columna autem aëris ad ſummitatem atmoſphæræ aſſurgens æquat pondere ſuo columnam aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea ſi columnæ totius aëreæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua ſuperior æquabit pondere ſuo columnam aquæ altam pedes 32. Inde vero (per regulam multis experimentis confirmatam, quod compreſſio aëris ſit ut pondus atmoſphæræ incumbentis, quodque gravitas ſit reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum a centro terræ) computationem per corol. prop. XXII. lib. II. ineundo, inveni quod aër, ſi aſcendatur a ſuperficiæ terræ ad altitudinem ſemidiametri unius terreſtris, rarior ſit quam apud nos in ratione longe majori, quam ſpatii omnis infra orbem ſaturni ad globum diametro digiti unius deſcriptum. Ideoque globus aëris noſtri digitum unum latus, ea cum raritate quam haberet in altitudine ſemidiametri unius terreſtris, impleret omnes planetarum regiones uſque ad ſphæram ſaturni & longe ultra. Proinde cum aër adhuc altior in immenſum rareſcat; & coma ſeu atmoſphæra cometæ, aſcendendo ab illius centro, quaſi decuplo altior ſit

quam

quam superficies nuclei, deinde cauda adhuc altius ascendat, debebit cauda esse quam rarissima. Et quamvis ob longe crassiorem cometarum atmosphæram, magnamque corporum gravitationem solem versus, & gravitationem particularum aëris & vaporum in se mutuo, fieri possit ut aër in spatiis cœlestibus inque cometarum caudis non adeo rarescat; perexiguam tamen quantitatem aëris & vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abunde sufficere, ex hac computatione perspicuum est. Nam & caudarum insignis raritas colligitur ex astris per eas translucentibus. Atmosphæra terrestris luce solis splendens, crassitudine sua paucorum milliarium, & astra omnia & ipsam lunam obscurat & extinguit penitus: per immensam vero caudarum crassitudinem, luce pariter solari illustratam, astra minima sine claritatis detrimento translucere noscuntur. Neque major esse solet caudarum plurimarum splendor, quam aëris nostri in tenebroso cubiculo latitudine digiti unius duorumve lucem solis in jubare reflectentis.

Quo temporis spatio vapor a capite ad terminum caudæ ascendit, cognosci fere potest ducendo rectam a termino caudæ ad solem, & notando locum ubi recta illa trajectoriam secat. Nam vapor in termino caudæ, si recta ascendat a sole, ascendere cœpit a capite, quo tempore caput erat in loco intersectionis. At vapor non recta ascendit a sole, sed motum cometæ, quem ante ascensum suum habebat, retinendo, & cum motu ascensus sui eundem componendo, ascendit oblique. Unde verior erit problematis solutio, ut recta illa, quæ orbem secat, parallela sit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum cometæ) ut eadem a linea caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor, qui erat in termino caudæ *Jan.* 25, ascendere cœperat a capite ante *Dec.* 11, ideoque ascensu suo toto dies plus 45 consumpserat. At cauda illa omnis quæ *Dec.* 10 apparuit, ascenderat spatio dierum illorum duorum, qui a tempore perihelii cometæ elapsi fuerant. Vapor igitur sub initio in vicinia solis celerrime ascendebat, & postea cum motu per gravitatem suam semper retardato ascendere pergebat; & ascendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem, quamdiu apparuit, ex vapore fere omni constabat, qui a tempore perihelii ascenderat; & vapor, qui primus ascendit, & terminum caudæ composuit, non prius evanuit quam ob nimiam suam tam a sole illustrante quam ab oculis nostris distantiam videri

 desiit.

De Mundi Systemate

desiit. Unde etiam caudæ cometarum aliorum, quæ breves sunt, non ascendunt motu celeri & perpetuo a capitibus & mox evanescunt, sed sunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, a capitibus lentissimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuere sub initio, per cœlos una cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rursus colligitur spatia cœlestia vi resistendi destitui; utpote in quibus non solum solida planetarum & cometarum corpora, sed etiam rarissimi caudarum vapores motus suos velocissimos liberrime peragunt ac diutissime conservant.

Ascensum caudarum ex atmosphæris capitum & progressum in partes a sole aversas *Keplerus* ascribit actioni radiorum lucis materiam caudæ secum rapientium. Et auram longe tenuissimam in spatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non est a ratione prorsus alienum, non obstante quod substantiæ crassæ impeditissimis in regionibus nostris a radiis solis sensibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari posse existimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem suam a sole ascendere. Cum autem gravitas corporum terrestrium sit ut materia in corporibus, ideoque servata quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, suspicor ascensum illum ex rarefactione materiæ caudarum potius oriri. Ascendit fumus in camino impulsu aëris cui innatat. Aër ille per calorem rarefactus ascendit, ob diminutam suam gravitatem specificam, & fumum implicatum rapit secum. Quidni cauda cometæ ad eundem modum ascenderit a sole? Nam radii solares non agitant media, quæ permeant, nisi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes ea actione calefactæ calefacient auram ætheream cui implicantur. Illa calore sibi communicato rarefiet, & ob diminutam ea raritate gravitatem suam specificam, qua prius tendebat in solem, ascendet & secum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad ascensum vaporum conducit etiam, quod hi gyrantur circa solem & ea actione conantur a sole recedere, at solis atmosphæra & materia cœlorum vel plane quiescit, vel motu solo quem a solis rotatione acceperit, tardius gyratur. Hæ sunt causæ ascensus caudarum in vicinia solis, ubi orbes curviores sunt, & cometæ intra densiorem & ea ratione graviorem solis atmosphæram consistunt, & caudas quam longissimas mox emittunt. Nam caudæ, quæ tunc nascuntur, conservando motum suum & interea versus solem gravitando, movebuntur

vebuntur circa solem in ellipsibus pro more capitum, & per motum illum capita semper comitabuntur & iis liberrime adhærebunt. Gravitas enim vaporum in solem non magis efficiet ut caudæ postea decidant a capitibus solem versus, quam gravitas capitum efficere possit, ut hæc decidant a caudis. Communi gravitate vel simul in solem cadent, vel simul in ascensu suo retardabuntur; ideoque gravitas illa non impedit, quo minus caudæ & capita positionem quamcunque ad invicem a causis jam descriptis, aut aliis quibuscunque facillime accipiant & postea liberrime servent.

Caudæ igitur, quæ in cometarum periheliis nascuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel inde post longam annorum seriem cum iisdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefactæ paulatim evanescent. Nam postea in descensu capitum ad solem caudæ novæ breviusculæ lento motu a capitibus propagari debebunt, & subinde in periheliis cometarum illorum, qui ad usque atmosphæram solis descendunt, in immensum augeri. Vapor enim in spatiis illis liberrimis perpetuo rarescit ac dilatatur. Qua ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem superiorem latior sit quam juxta caput cometæ. Ea autem rarefactione vaporem perpetuo dilatatum diffundi tandem & spargi per cœlos universos, deinde paulatim in planetas per gravitatem suam attrahi, & cum eorum atmosphæris misceri rationi consentaneum videtur. Nam quemadmodum maria ad constitutionem terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem solis vapores copiose satis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condensati (ut aliqui cum ratione philosophantur) decurrant in fontes & flumina: sic ad conservationem marium & humorum in planetis requiri videntur cometæ, ex quorum exhalationibus & vaporibus condensatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem consumitur & in terram aridam convertitur, continuo suppleri & refici possit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omnino crescunt, dein magna ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuo decidit. Hinc moles terræ aridæ indies augetur, & liquores, nisi aliunde augmentum sumerent, perpetuo decrescere deberent, ac tandem deficere. Porro suspicor spiritum illum, qui aëris nostri pars minima est sed subtilissima &

De Mundi Systemate

optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex cometis præcipue venire.

Atmosphæræ cometarum in descensu eorum in solem excurrendo in caudas, diminuuntur, & (ea certe in parte quæ solem respicit) angustiores redduntur: & vicissim in recessu eorum a sole, ubi jam minus excurrunt in caudas, ampliantur; si modo phænomena eorum *Hevelius* recte notavit. Minimæ autem apparent, ubi capita jam modo ad solem calefacta in caudas maximas & fulgentissimas abiere, & nuclei fumo forsan crassiore & nigriore in atmosphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus crassior & nigrior esse solet. Sic caput cometæ, de quo egimus, in æqualibus a sole ac terra distantiis obscurius apparuit post perihelium suum quam antea. Mense enim *Decembri* cum stellis tertiæ magnitudinis conferri solebat, at mense *Novembri* cum stellis primæ & secundæ. Et qui utrumque viderant, majorem describunt cometam priorem. Nam juveni cuidam *Cantabrigiensi*, *Novem.* 19, cometa hicce luce sua quantumvis plumbea & obtusa, æquabat spicam virginis, & clarius micabat quam postea. Et *Montenaro Nov.* 20. st. vet. cometa apparebat major stellis primæ magnitudinis, existente cauda duorum graduum longitudinis. Et *D. Storer* literis, quæ in manus nostras incidere, scripsit caput ejus mense *Decembri*, ubi caudam maximam & fulgentissimam emittebat, parvum esse & magnitudine visibili longe cedere cometæ, qui mense *Novembri* ante solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem esse conjectabatur, quod materia capitis sub initio copiosior esset, & paulatim consumeretur.

Eodem spectare videtur, quod capita cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentissimas emiserunt, apparuerint subobscura & exigua. Nam anno 1668 *Mart.* 5. st. nov. hora septima vespertina *R. P. Valentinus Estancius*, *Brasiliæ* agens, cometam vidit horizonti proximum ad occasum solis brumalem, capite minimo & vix conspicuo, cauda vero supra modum fulgente, ut stantes in littore speciem ejus e mari reflexam facile cernerent. Speciem utique habebat trabis splendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in austrum vergens, & horizonti fere parallela. Tantus autem splendor tres solum dies durabat, subinde notabiliter decrescens; & interea decrescente splendore aucta est magnitudine cauda. Unde etiam in

Lusi-

Lusitania quartam fere cœli partem (id est, gradus 45) occupasse dicitur ab occidente in orientem splendore cum insigni protensa; nec tamen tota apparuit, capite semper in his regionibus infra horizontem delitescente. Ex incremento caudæ & decremento splendoris manifestum est, quod caput a sole recessit, eique proximum fuit sub initio, pro more cometæ anni 1680. Et in chronico *Saxonico* similis legitur cometa anni 1106, *cujus stella erat parva & obscura* (ut ille anni 1680) *sed splendor qui ex ea exivit valde clarus & quasi ingens trabs ad orientem & aquilonem tendebat*, ut habet etiam *Hevelius* ex *Simeone Dunelmensi* Monacho. Apparuit initio mensis *Februarii*, ac deinceps circa vesperam, ad occasum solis brumalem. Inde vero & ex situ caudæ colligitur caput fuisse soli vicinum. *A sole*, inquit *Matthæus Parisiensis*, *distabat quasi cubito uno, ab hora tertia* [rectius sexta] *usque ad horam nonam radium ex se longum emittens.* Talis etiam erat ardentissimus ille cometa ab *Aristotele* descriptus lib. 1. Meteor. 6. *cujus caput primo die non conspectum est, eo quod ante solem vel saltem sub radiis solaribus occidisset, sequente vero die quantum potuit visum est. Nam quam minima fieri potest distantia solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* [caudæ scilicet] *nondum apparebat capitis sparsus ignis, sed procedente tempore* (ait Aristoteles) *cum* [cauda] *jam minus flagraret, reddita est* [capiti] *cometæ sua facies. Et splendorem suum ad tertiam usque cœli partem* [id est, ad 60^{gr}] *extendit. Apparuit autem tempore hyberno* [an. 4. olymp. 101.] *& ascendens usque ad cingulum orionis ibi evanuit.* Cometa ille anni 1618, qui e radiis solaribus caudatissimus emersit, stellas primæ magnitudinis æquare vel paulo superare videbatur, sed majores apparuere cometæ non pauci, qui caudas breviores habuere. Horum aliqui jovem, alii venerem vel etiam lunam æquasse traduntur.

Diximus cometas esse genus planetarum in orbibus valde eccentricis circa solem revolventium. Et quemadmodum e planetis non caudatis minores esse solent, qui in orbibus minoribus & soli propioribus gyrantur, sic etiam cometas, qui in periheliis suis ad solem propius accedunt, ut plurimum minores esse, ne solem attractione sua nimis agitent, rationi consentaneum videtur. Orbium vero transversas diametros & revolutionum tempora periodica, ex collatione cometarum in iisdem orbibus post longa temporum intervalla redeuntium,

untium, determinanda relinquo. Interea huic negotio propositio sequens lumen accendere potest.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXII.

Inventam cometæ trajectoriam corrigere.

Operatio 1. Assumatur positio plani trajectoriæ, per propositionem superiorem inventa; & seligantur tria loca cometæ observationibus accuratissimis definita, & ab invicem quam maxime distantia; sitque A tempus inter primam & secundam, ac B tempus inter secundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo in perigæo versari convenit, vel saltem non longe a perigæo abesse. Ex his locis apparentibus inveniantur, per operationes trigonometricas, loca tria vera cometæ in assumpto illo plano trajectoriæ. Deinde per loca illa inventa, circa centrum solis ceu umbilicum, per operationes arithmeticas, ope prop. XXI. lib. I. institutas, describatur sectio conica: & ejus areæ, radiis a sole ad loca inventa ductis terminatæ, sunto D & E; nempe D area inter observationem primam & secundam, & E area inter secundam ac tertiam. Sitque T tempus totum, quo area tota D+E velocitate cometæ per prop. XVI. lib. I. inventa describi debet.

Oper. 2. Augeatur longitudo nodorum plani trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur P; & servetur plani illius inclinatio ad planum eclipticæ. Deinde ex prædictis tribus cometæ locis observatis, inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, ut supra: deinde etiam orbis per loca illa transiens, & ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint d & e, nec non tempus totum t, quo area tota $d+e$ describi debeat.

Oper. 3. Servetur longitudo nodorum in operatione prima, & augeatur inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur Q. Deinde ex observatis prædictis tribus cometæ locis apparentibus inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, orbisque per loca illa transiens, ut & ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint δ & ε, & tempus totum τ, quo area tota $\delta+\varepsilon$ describi debeat.

Jam

Jam sit C ad 1 ut A ad B, & G ad 1 ut D ad E, & g ad 1 ut d ad e, & γ ad 1 ut δ ad ϵ; sitque S tempus verum inter observationem primam ac tertiam; & signis + & — probe observatis quærantur numeri m & n, ea lege, ut sit $2G - 2C = mG - mg + nG - n\gamma$, & $2T - 2S$ æquale $mT - mt + nT - n\tau$. Et si in operatione prima I designet inclinationem plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, & K longitudinem nodi alterutrius, erit $I + nQ$ vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, & $K + mP$ vera longitudo nodi. Ac denique si in operatione prima, secunda ac tertia, quantitates R, r & ϱ designent latera recta trajectoriæ, & quantitates $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ ejusdem latera transversa respective: erit $R + mr - mR + n\varrho - nR$ verum latus rectum, & $\frac{1}{L + ml - mL + n\lambda - nL}$ verum latus transversum trajectoriæ quam cometa describit. Dato autem latere transverso datur etiam tempus periodicum cometæ. *Q. E. I.*

Cæterum cometarum revolventium tempora periodica, & orbium latera transversa, haud satis accurate determinabuntur, nisi per collationem cometarum inter se, qui diversis temporibus apparent. Si plures cometæ, post æqualia temporum intervalla, eundem orbem descripsisse reperiantur, concludendum erit hos omnes esse unum & eundem cometam, in eodem orbe revolventem. Et tum demum ex revolutionum temporibus dabuntur orbium latera transversa, & ex his lateribus determinabuntur orbes elliptici.

In hunc finem computandæ sunt igitur cometarum plurium trajectoriæ, ex hypothesi quod sint parabolicæ. Nam hujusmodi trajectoriæ cum phænomenis semper congruent quamproxime. Id liquet, non tantum ex trajectoria parabolica cometæ anni 1680, quam cum observationibus supra contuli, sed etiam ex ea cometæ illius insignis, qui annis 1664 & 1665 apparuit, & ab *Hevelio* observatus fuit. Is ex observationibus suis longitudines & latitudines hujus cometæ computavit, sed minus accurate. Ex iisdem observationibus *Halleius* noster loca cometæ hujus denuo computavit, & tum demum ex locis sic inventis trajectoriam cometæ determinavit. Invenit autem ejus nodum ascendentem in ♊ $21^{gr}. 13'. 55''$, inclinationem orbitæ ad planum eclipticæ $21^{gr}. 18'. 40''$, distantiam perihelii

LIBER TERTIUS.

De Mundi Systemate

lii a nodo in orbita 49gr. 27′. 30″. Perihelium in ♌ 8gr. 40′. 30″ cum latitudine auſtrina heliocentrica 16gr. 1′. 45″. Cometam in perihelio *Novem.* 24d. 11h. 52′. p. m. tempore æquato *Londini*, vel 13h. 8′ *Gedani*, ſtylo veteri, & latus rectum parabolæ 410286, exiſtente mediocri terræ a ſole diſtantia 100000. Quam probe loca cometæ in hoc orbe computata congruunt cum obſervationibus, patebit ex tabula ſequente ab *Halleio* ſupputata.

Temp. Appar. *Gedani*, ſt. vet.	Obſervatæ Cometæ diſtantiæ.	gr. ′ ″	Loca obſervata. gr. ′ ″	Loca computata in Orbe gr. ′ ″
Decemb. 3d. 18h. 29½	a Corde Leonis	46 . 24 . 20	Long. ♎ 7 . 1 . 0	♎ 7 . 1 . 29
	a Spica Virginis	22 . 52 . 10	Lat. auſt. 21 . 39 . 0	21 . 38 . 50
4 . 18 . 1½	a Corde Leonis	46 . 2 . 45	Long. ♎ 16 . 15 . 0	♎ 6 . 16 . 5
	a Spica Virginis	23 . 52 . 40	Lat. auſt. 22 . 24 . 0	22 . 24 . 0
7 . 17 . 48	a Corde Leonis	44 . 48 . 0	Long. ♎ 3 . 6 . 0	♎ 3 . 7 . 33
	a Spica Virginis	27 . 56 . 40	Lat. auſt 25 . 22 . 0	25 . 21 . 40
17 . 14 . 43	a Corde Leonis	53 . 15 . 15	Long. ♌ 2 . 56 . 0	♌ 2 . 56 . 0
	ab Hum. Orionis dext.	45 . 43 . 30	Lat. auſt. 49 . 25 . 0	49 . 25 . 0
19 . 9 . 25	a Procyone	35 . 13 . 50	Long. ♊ 28 . 40 . 30	♊ 28 . 43 . 0
	a Lucid. Mandib. Ceti	52 . 56 . 0	Lat. auſt. 45 . 48 . 0	45 . 46 . 0
20 . 9 . 53½	a Procyone	40 . 49 . 0	Long. ♊ 13 . 3 . 0	♊ 3 . 5 . 0
	a Lucid. Mandib. Ceti	40 . 4 . 0	Lat. auſt. 39 . 54 . 0	39 . 53 . 0
21 . 9 . 9½	ab Hum. dext. Orionis	26 . 21 . 25	Long. ♊ 2 . 16 . 0	♊ 2 . 18 . 30
	a Lucid. Mandib. Ceti	29 . 28 . 0	Lat. auſt. 33 . 41 . 0	33 . 39 . 40
22 . 9 . 0	ab Hum. dext. Orionis	29 . 47 . 0	Long. ♉ 24 . 24 . 0	♉ 24 . 27 . 0
	a Lucid. Mandib. Ceti	20 . 29 . 30	Lat. auſt. 27 . 45 . 0	27 . 46 . 0
26 . 7 . 58	a Lucida Arietis	23 . 20 . 0	Long. ♉ 9 . 0 . 0	♉ 9 . 2 . 28
	ab Aldebaran	26 . 44 . 0	Lat. auſt. 12 . 36 . 0	12 . 34 . 13
27 . 6 . 45	a Lucida Arietis	20 . 45 . 0	Long. ♉ 7 . 5 . 40	♉ 7 . 8 . 45
	ab Aldebaran	28 . 10 . 0	Lat. auſt. 10 . 23 . 0	10 . 23 . 13
28 . 7 . 39	a Lucida Arietis	18 . 29 . 0	Long. ♉ 5 . 24 . 45	♉ 5 . 27 . 52
	a Palilicio	29 . 37 . 0	Lat. auſt. 8 . 22 . 50	8 . 23 . 37
31 . 6 . 45	a Cing. Androm.	30 . 48 . 10	Long. ♉ 2 . 7 . 40	♉ 2 . 8 . 20
	a Palilicio	32 . 53 . 30	Lat. auſt. 4 . 13 . 0	4 . 16 . 25
Jan. 1665. 7 . 7 . 37½	a Cing. Androm.	25 . 11 . 0	Long. ♈ 28 . 24 . 47	♈ 28 . 24 . 0
	a Palilicio	37 . 12 . 25	Lat. bor. 0 . 54 . 0	0 . 53 . 0
13 . 7 . 0	a capite Androm.	28 . 7 . 10	Long. ♈ 27 . 6 . 54	♈ 27 . 6 . 39
	a Palilicio	38 . 55 . 20	Lat. bor. 3 . 6 . 50	3 . 7 . 40
24 . 7 . 29	a Cing. Androm.	20 . 32 . 15	Long. ♈ 26 . 29 . 15	♈ 26 . 28 . 50
	a Palilicio	40 . 5 . 0	Lat. bor. 5 . 25 . 50	5 . 26 . 0
Feb. 7 . 8 . 37			Long. ♈ 27 . 4 . 46	♈ 27 . 24 . 55
			Lat. bor. 7 . 3 . 20	7 . 3 . 15
22 . 8 . 46			Long. ♈ 28 . 29 . 46	♈ 28 . 29 . 58
			Lat. bor. 8 . 12 . 36	8 . 10 . 25
Mar. 1 . 8 . 16			Long. ♈ 29 . 18 . 15	♈ 29 . 18 . 20
			Lat. bor. 8 . 36 . 26	8 . 36 . 12
7 . 8 . 37			Long. ♈ 0 . 2 . 48	♉ 0 . 2 . 42
			Lat. bor. 8 . 56 . 30	8 . 56 . 56

Menſe

Menſe *Februario* anni ineuntis 1665, ſtella prima arietis, quam in ſequentibus vocabo γ, erat in ♈ $28^{gr}. 30'. 15''$ cum latitudine boreali $7^{gr}. 8'. 58''$. Secunda arietis erat in ♈ $29^{gr}. 17'. 18''$ cum latitudine boreali $8^{gr}. 28'. 16''$. Et ſtella quædam alia ſeptimæ magnitudinis, quam vocabo *A*, erat in ♈ $28^{gr}. 24'. 45''$ cum latitudine boreali $8^{gr}. 28'. 33''$. Cometa vero *Feb.* $7^{d}. 7'. 30''$ *Pariſiis* (id eſt *Feb.* $7^{d}. 8'. 37''$ *Gedani*) ſt. vet. triangulum conſtituebat cum ſtellis illis γ & *A* rectangulum ad γ. Et diſtantia cometæ a ſtella γ æqualis erat diſtantiæ ſtellarum γ & *A*, id eſt $1^{gr}. 19'. 46''$ in circulo magno, atque ideo ea erat $1^{gr}. 20'. 26''$ in parallelo latitudinis ſtellæ γ. Quare ſi de longitudine ſtellæ γ detrahatur longitudo $1^{gr}. 20'. 26''$, manebit longitudo cometæ ♈ $27^{gr}. 9'. 49''$. *Auzoutius* ex hac ſua obſervatione cometam poſuit in ♈ $27^{gr}. 0'$ circiter. Et ex ſchemate, quo *Hookius* motum ejus delineavit, is jam erat in ♈ $26^{gr}. 59'. 24''$. Ratione mediocri poſui eundem in ♈ $27^{gr}. 4'. 46''$. Ex eadem obſervatione *Auzoutius* latitudinem cometæ jam poſuit 7^{gr}. & $4'$ vel $5'$ boream verſus. Eandem rectius poſuiſſet $7^{gr}. 3'. 29''$, exiſtente ſcilicet differentia latitudinum cometæ & ſtellæ γ æquali differentiæ longitudinum ſtellarum γ & *A*.

Feb. $22^{d}. 7^{h}. 30'$ *Londini*, id eſt *Feb.* $22^{d}. 8^{h}. 46'$ *Gedani*, diſtantia cometæ a ſtella *A*, juxta obſervationem *Hookii* a ſeipſo in ſchemate delineatam, ut & juxta obſervationes *Auzoutii* a *Petito* in ſchemate delineatas, erat pars quinta diſtantiæ inter ſtellam *A* & primam arietis, ſeu $15'. 57''$. Et diſtantia cometæ a linea jungente ſtellam *A* & primam arietis erat pars quarta ejuſdem partis quintæ, id eſt $4'$. Ideoque cometa erat in ♈ $28^{gr}. 29'. 46''$, cum lat. bor. $8^{gr}. 12'. 36''$.

Mart. $1^{d}. 7^{h}. 0'$ *Londini*, id eſt *Mart.* $1^{d}. 8^{h}. 16'$ *Gedani*, cometa obſervatus fuit prope ſecundam arietis, exiſtente diſtantia inter eoſdem ad diſtantiam inter primam & ſecundam arietis, hoc eſt ad $1^{gr}. 33'$, ut 4 ad 45 ſecundum *Hookium*, vel ut 2 ad 23 ſecundum *Gottignies*. Unde diſtantia cometæ a ſecunda arietis erat $8'. 16''$ ſecundum *Hookium*, vel $8'. 5''$ ſecundum *Gottignies*, vel ratione mediocri $8'. 10''$. Cometa vero ſecundum *Gottignies* jam modo prætergreſſus fuerat ſecundam arietis quaſi ſpatio quartæ vel quintæ partis itineris uno die confecti, id eſt $1'. 35''$ circiter (quocum ſatis conſentit *Auzoutius*) vel paulo minorem ſecundum *Hookium*, puta $1'$. Quare ſi ad longitudinem primæ arietis addatur $1'$, & ad

latitudinem ejus 8′. 10″, habebitur longitudo cometæ ♈ 29gr. 18′, & latitudo borealis 8gr. 36′. 26″.

Mart. 7d. 7h. 30′ *Parisiis* (id est *Mart.* 7d. 8h. 37′ *Gedani*) ex observationibus *Auzoutii* distantia cometæ a secunda arietis æqualis erat distantiæ secundæ arietis a stella *A*, id est 52′. 29″. Et differentia longitudinum cometæ & secundæ arietis erat 45′ vel 46′, vel ratione mediocri 45′. 30″. Ideoque cometa erat in ♉ 0gr. 2′. 48″. Ex schemate observationum *Auzoutii*, quod *Petitus* construxit, *Hevelius* deduxit latitudinem cometæ 8gr. 54′. Sed sculptor viam cometæ sub finem motus ejus irregulariter incurvavit, & *Hevelius* in schemate observationum *Auzoutii* a se constructo incurvationem irregularem correxit, & sic latitudinem cometæ fecit esse 8gr. 55′. 30″. Et irregularitatem paulo magis corrigendo, latitudo evadere potest 8gr. 56′, vel 8gr. 57′.

Visus etiam fuit hic cometa *Martii* die 9, & tunc locari debuit in ♉ 0gr. 18′, cum lat. bor. 9gr. 3′½ circiter.

Apparuit hic cometa menses tres, signaque fere sex descripsit, & uno die gradus fere viginti confecit. Cursus ejus a circulo maximo plurimum deflexit, in boream incurvatus; & motus ejus sub finem ex retrogrado factus est directus. Et non obstante cursu tam insolito, theoria a principio ad finem cum observationibus non minus accurate congruit, quam theoriæ planetarum cum eorum observationibus congruere solent, ut inspicienti tabulam patebit. Subducenda tamen sunt minuta duo prima circiter, ubi cometa velocissimus fuit; id quod fiet auferendo duodecim minuta secunda ab angulo inter nodum ascendentem & perihelium, seu constituendo angulum illum 49gr. 27′. 18″. Cometæ utriusque (& hujus & superioris) parallaxis annua insignis fuit, & inde demonstratur motus annuus terræ in orbe magno.

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ, qui apparuit anno 1683. Hic fuit retrogradus in orbe, cujus planum cum plano eclipticæ angulum fere rectum continebat. Hujus nodus ascendens (computante *Halleio*) erat in ♍ 23gr. 23′; inclinatio orbitæ ad eclipticam 83gr. 11′; perihelium in ♊ 25gr. 29′. 30″; distantia perihelia a sole 56020, existente radio orbis magni 100000, & tempore perihelii *Julii* 2d. 3h. 50′. Loca autem cometæ in hoc orbe ab *Halleio* computata, & cum locis a *Flamstedio* observatis collata, exhibentur in tabula sequente.

Temp.

1683 Temp. Æquat.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obs.	Lat. Bor. Observ.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Jul. 13.12.55	♌ 1. 2.30	♋ 13. 5.42	29.28.13	♋ 13. 6.42	29.28.20	+ 1. 0	+ 0. 7
15.11.15	2.5 .12	11.37.48	29.34. 0	11.39 43	29.34.50	+ 1.55	+ 0.50
17.10.20	4.45.45	10. 7. 6	29.33 30	10. 8.40	29.34. 0	+ 1.34	+ 0.30
23.13.40	10.38 21	5.10.27	28.51.42	5.11.30	28.50.28	+ 1. 3	− 1.14
25.14. 5	12.35.28	3.27.53	24.24.47	3.27. 0	28.23.40	− 0.53	− 1. 7
31. 9.42	18. 9 22	♊ 27.55. 3	26.22.52	♊ 27.54.24	26.22.25	− 0.39	− 0.27
31.14.55	18.21.53	27.41. 7	26.16.57	27.41. 8	26.14.50	+ 0. 1	− 2. 7
Aug. 2.14.56	20.17.16	25.29.32	25.16.19	25.28.46	25.17.28	− 0.46	+ 1. 9
4.10.49	22. 2.50	23.18.20	24.10.49	23.16.55	24.12.19	− 1.25	+ 1.30
6.10. 9	23.56.45	20.42.23	22.47. 5	20.40.32	22.49. 5	− 1.51	+ 2. 0
9.10.26	26.50.52	16. 7.57	20. 6.37	16. 5.55	20. 6.10	− 2. 2	− 0.27
15.14. 1	♍ 2.47.13	3.30.48	11.37.33	3.26.18	11.32. 1	− 4.30	− 5.32
16.15.10	3.48. 2	0.43. 7	9.34.16	0.41.55	9.34.13	− 1.12	− 0. 3
18.15.44	5.45.33	♉ 24.52.53	5.11.15 Austr.	♉ 24.49. 5	5. 9.11 Austr.	− 3.48	− 2. 4
22.14.44	9.35.49	11. 7.14	5.16.58	11. 7.12	5.16.58	− 0. 2	− 0. 3
23.15.52	10.36.48	7. 2.18	8.17. 9	7. 1.17	8.16.41	− 1. 1	− 0.28
26.16. 2	13.31.10	♈ 24.45.31	16.38. 0	♈ 24.44. 0	16.38.20	− 1.31	+ 0.20

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ retrogradi, qui apparuit anno 1682. Hujus nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 21gr. 16′. 30″. Inclinatio orbitæ ad planum eclipticæ 17gr. 56′. 0″. Perihelium in ♒ 2gr. 52′. 50″. Diſtantia perihelia a ſole 58328, exiſtente radio orbis magni 100000. Et tempus æquatum perihelii *Sept.* 4d. 7h. 39′. Loca vero ex obſervationibus *Flamſtedii* computata, & cum locis per theoriam computatis collata, exhibentur in tabula ſequente.

1682 Temp. Appar.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obs.	Lat. Bor. Observ.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Aug. 19.16.38	♍ 7. 0. 7	♌ 18.14.28	25.50. 7	♌ 18.14 40	25.49.55	− 0.12	+ 0.12
20.15.38	7.55.52	24.46.23	26.14.42	24.46.22	26.12.52	+ 0. 1	+ 1.50
21. 8.21	8.36.14	29.37.15	26.20. 3	29.38. 2	26.17.37	− 0.47	+ 2.26
22. 8. 8	9.33.55	♍ 6.29.53	26. 8.42	♍ 6.30. 3	26. 7.12	− 0.10	+ 1.30
29. 8.20	16.22.40	♎ 12.37.54	18.37.47	♎ 12.37.49	18.34. 5	+ 0. 5	+ 3.42
30. 7.45	17.19.41	15.36. 1	17.26.43	15.35.18	17.27.17	+ 0.43	− 0.34
Sept. 1. 7.33	19.16. 9	20.30.53	15.13. 0	20.27. 4	15. 9.49	+ 3.49	+ 3.11
4. 7.22	22.11.28	25.42. 0	12.23.48	25.40.58	12.22. 0	+ 1. 2	+ 1.48
5. 7.32	23.10.29	27. 0.46	11.33. 8	26.59.24	11.33.51	+ 1.22	− 0.43
8. 7.16	26. 5.58	29.58.44	9.26.46	29 58.45	9.26.43	− 0. 1	+ 0. 3
9. 7.26	27. 5. 9	♏ 0.44.10	8.49.10	♏ 0.44. 4	8.48.25	+ 0. 6	+ 0.45

Confirmatur etiam theoria per motum retrogradum cometæ, qui apparuit anno 1723. Hujus nodus aſcendens (computante D. *Bradleo,* aſtronomiæ apud *Oxonienſes* profeſſore *Saviliano*) erat in

♈ 14gr. 16′. Inclinatio orbitæ ad planum eclipticæ 49gr. 59′. Perihelium in ♉ 12gr. 15′. 20″. Diſtantia perihelia a ſole 998651, exiſtente radio orbis magni 1000000, & tempore æquato perihelii *Septem.* 16d. 16h. 10′. Loca vero cometæ in hoc orbe a *Bradleo* computata, & cum locis a ſeipſo & patruo ſuo D. *Poundio*, & a D. *Halleio* obſervatis collata exhibentur in tabula ſequente.

	1723 Temp. Æquat.	Comet. Long. Obſervat.	Lat. Bor. Obſervat.	Comet. Long. Comput.	Lat. Bor. Comput.	Differ. Long.	Differ. Latit.
	d. h. ′	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″
Octob.	9 . 8 . 5	♒ 7 . 22 . 15	5 . 2 . 0	♒ 7 . 21 . 26	5 . 2 . 47	+ 49	− 47
	10 . 6 . 21	6 . 41 . 12	7 . 44 . 13	6 . 41 . 42	7 . 43 . 18	− 50	+ 55
	12 . 7 . 22	5 . 39 . 58	11 . 55 . 0	5 . 40 . 19	11 . 54 . 55	− 21	+ 5
	14 . 8 . 57	4 . 59 . 49	14 . 43 . 50	5 . 0 . 37	14 . 44 . 1	− 48	− 11
	15 . 6 . 35	4 . 47 . 41	15 . 40 . 51	4 . 47 . 45	15 . 40 . 55	− 4	− 4
	21 . 6 . 22	4 . 2 . 32	19 . 41 . 49	4 . 2 . 21	19 . 42 . 3	+ 11	− 14
	22 . 6 . 24	3 . 59 . 2	20 . 8 . 12	3 . 59 . 10	20 . 8 . 17	− 8	− 5
	24 . 8 . 2	3 . 55 . 29	20 . 55 . 18	3 . 55 . 11	20 . 55 . 9	+ 18	+ 9
	29 . 8 . 56	3 . 56 . 17	22 . 20 . 27	3 . 56 . 42	22 . 20 . 10	− 25	+ 17
	30 . 6 . 20	3 . 58 . 9	22 . 32 . 28	3 . 58 . 17	22 . 32 . 12	− 8	+ 16
Nov.	5 . 5 . 53	4 . 16 . 30	23 . 38 . 33	4 . 16 . 23	23 . 38 . 7	+ 7	+ 26
	8 . 7 . 6	4 . 29 . 36	24 . 4 . 30	4 . 29 . 54	24 . 4 . 40	− 18	− 10
	14 . 6 . 20	5 . 2 . 16	24 . 48 . 46	5 . 2 . 51	24 . 48 . 16	− 35	+ 30
	20 . 7 . 45	5 . 42 . 20	25 . 24 . 45	5 . 43 . 13	25 . 25 . 17	− 53	− 32
Dec.	7 . 6 . 45	8 . 4 . 13	26 . 54 . 18	8 . 3 . 55	26 . 53 . 42	+ 18	+ 36

His exemplis abunde ſatis manifeſtum eſt, quod motus cometarum per theoriam a nobis expoſitam non minus accurate exhibentur, quam ſolent motus planetarum per eorum theorias. Et propterea orbes cometarum per hanc theoriam enumerari poſſunt, & tempus periodicum cometæ in quolibet orbe revolventis tandem ſciri, & tum demum orbium ellipticorum latera tranſverſa & apheliorum altitudines innoteſcent.

Cometa retrogradus, qui apparuit anno 1607, deſcripſit orbem, cujus nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 20gr. 21′; inclinatio plani orbis ad planum eclipticæ erat 17gr. 2′; perihelium erat in ♒ 2gr. 16′; & diſtantia perihelia a ſole erat 58680, exiſtente radio orbis magni 100000. Et cometa erat in perihelio *Octob.* 16d. 3h. 50′. Congruit hic orbis quamproxime cum orbe cometæ, qui apparuit anno 1682. Si cometæ hi duo fuerint unus & idem, revolvetur hic cometa ſpatio annorum 75, & axis major orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni, ut $\sqrt{c}: 75 \times 75$ ad 1, ſeu 1778 ad 100 circiter. Et diſtantia aphelia cometæ hujus a ſole, erit ad diſtantiam

tiam mediocrem terræ a sole, ut 35 ad 1 circiter. Quibus cognitis, haud difficile fuerit orbem ellipticum cometæ hujus determinare. Atque hæc ita se habebunt si cometa, spatio annorum septuaginta quinque, in hoc orbe posthac redierit. Cometæ reliqui majori tempore revolvi videntur & altius ascendere.

Cæterum cometæ, ob magnum eorum numerum, & magnam apheliorum a sole distantiam, & longam moram in apheliis, per gravitates in se mutuo nonnihil turbari debent, & eorum eccentricitates & revolutionum tempora nunc augeri aliquantulum, nunc diminui. Proinde non est expectandum ut cometa idem in eodem orbe, & iisdem temporibus periodicis accurate redeat. Sufficit si mutationes non majores obvenerint, quam quæ a causis prædictis oriantur.

Et hinc ratio redditur, cur cometæ non comprehendantur zodiaco more planetarum, sed inde migrent & motibus variis in omnes cœlorum regiones ferantur. Scilicet eo fine, ut in apheliis suis, ubi tardissime moventur, quam longissime distent ab invicem, & se mutuo quam minime trahant. Qua de causa cometæ, qui altius descendunt, ideoque tardissime moventur in apheliis, debent altius ascendere.

Cometa, qui anno 1680 apparuit, minus distabat a sole in perihelio suo quam parte sexta diametri solis; & propter summam velocitatem in vicinia illa, & densitatem aliquam atmosphæræ solis, resistentiam nonnullam sentire debuit, & aliquantulum retardari, & propius ad solem accedere: & singulis revolutionibus accedendo ad solem, incidet is tandem in corpus solis. Sed & in aphelio ubi tardissime movetur, aliquando per attractionem aliorum cometarum retardari potest, & subinde in solem incidere. Sic etiam stellæ fixæ, quæ paulatim expirant in lucem & vapores, cometis in ipsas incidentibus refici possunt, & novo alimento accensæ pro stellis novis haberi. Hujus generis sunt stellæ fixæ, quæ subito apparent, & sub initio quam maxime splendent, & subinde paulatim evanescunt. Talis fuit stella in cathedra Cassiopeiæ quam *Cornelius Gemma* octavo *Novembris* 1572, lustrando illam cœli partem nocte serena minime vidit; at nocte proxima (*Novem.* 9.) vidit fixis omnibus splendidiorem, & luce sua vix cedentem veneri. Hanc *Tycho Brahæus* vidit undecimo ejusdem mensis ubi maxime splenduit; & ex eo tempore paulatim

paulatim decrescentem & spatio mensium sexdecim evanescentem observavit. Mense *Novembri*, ubi primum apparuit, venerem luce sua æquabat. Mense *Decembri* nonnihil diminuta jovem æquare videbatur. Anno 1573, mense *Januario* minor erat jove & major Sirio, cui in fine *Februarii* & *Martii* initio evasit æqualis. Mense *Aprili* & *Maio* stellis secundæ magnitudinis, *Junio*, *Julio* & *Augusto* stellis tertiæ magnitudinis, *Septembri*, *Octobri* & *Novembri* stellis quartæ, *Decembri* & anni 1574, mense *Januario* stellis quintæ, & mense *Februario* stellis sextæ magnitudinis æqualis videbatur, & mense *Martio* ex oculis evanuit. Color illi ab initio clarus, albicans ac splendidus, postea flavus, & anni 1573 mense *Martio* rutilans instar martis aut stellæ aldebaran; *Maio* autem albitudinem sublividam induxit, qualem in saturno cernimus, quem colorem usque in finem servavit, semper tamen obscurior facta. Talis etiam fuit stella in dextro pede serpentarii, quam *Kepleri* discipuli anno 1604, die 30 *Septembris* st. vet. apparere cœpisse observarunt, & luce sua stellam jovis superasse, cum nocte præcedente minime apparuisset. Ab eo vero tempore paulatim decrevit, & spatio mensium quindecim vel sexdecim ex oculis evanuit. Tali etiam stella nova supra modum splendente *Hipparchus* ad fixas observandas & in catalogum referendas excitatus fuisse dicitur. Sed fixæ, quæ per vices apparent & evanescunt, quæque paulatim crescunt, & luce sua fixas tertiæ magnitudinis vix unquam superant, videntur esse generis alterius, & revolvendo partem lucidam & partem obscuram per vices ostendere. Vapores autem, qui ex sole & stellis fixis & caudis cometarum oriuntur, incidere possunt per gravitatem suam in atmosphæras planetarum & ibi condensari & converti in aquam & spiritus humidos, & subinde per lentum calorem in sales, & sulphura, & tincturas, & limum, & lutum, & argillam, & arenam, & lapides, & coralla, & substantias alias terrestres paulatim migrare.

SCHOLIUM GENERALE.

Hypothesis vorticum multis premitur difficultatibus. Ut planeta unusquisque radio ad solem ducto areas describat tempori proportionales, tempora periodica partium vorticis deberent esse in duplicata ratione distantiarum a sole. Ut periodica planetarum tempora sint in proportione sesquiplicata distantiarum a sole, tempora peri-

periodica partium vorticis deberent esse in sesquiplicata distantiarum proportione. Ut vortices minores circum saturnum, jovem & alios planetas gyrati conserventur & tranquille natent in vortice solis, tempora periodica partium vorticis solaris deberent esse æqualia. Revolutiones solis & planetarum circum axes suos, quæ cum motibus vorticum congruere deberent, ab omnibus hisce proportionibus discrepant. Motus cometarum sunt summe regulares, & easdem leges cum planetarum motibus observant, & per vortices explicari nequeunt. Feruntur cometæ motibus valde eccentricis in omnes cœlorum partes, quod fieri non potest, nisi vortices tollantur.

Projectilia, in aëre nostro, solam aëris resistentiam sentiunt. Sublato aëre, ut fit in vacuo *Boyliano*, resistentia cessat, siquidem pluma tenuis & aurum solidum æquali cum velocitate in hoc vacuo cadunt. Et par est ratio spatiorum cœlestium, quæ sunt supra atmosphæram terræ. Corpora omnia in istis spatiis liberrime moveri debent; & propterea planetæ & cometæ in orbibus specie & positione datis secundum leges supra expositas perpetuo revolvi. Perseverabunt quidem in orbibus suis per leges gravitatis, sed regularem orbium situm primitus acquirere per leges hasce minime potuerunt.

Planetæ sex principales revolvuntur circum solem in circulis soli concentricis, eadem motus directione, in eodem plano quamproxime. Lunæ decem revolvuntur circum terram, jovem & saturnum in circulis concentricis, eadem motus directione, in planis orbium planetarum quamproxime. Et hi omnes motus regulares originem non habent ex causis mechanicis; siquidem cometæ in orbibus valde eccentricis, & in omnes cœlorum partes libere feruntur. Quo motus genere cometæ per orbes planetarum celerrime & facillime transeunt, & in apheliis suis ubi tardiores sunt & diutius morantur, quam longissime distant ab invicem, ut se mutuo quam minime trahant. Elegantissima hæcce solis, planetarum & cometarum compages non nisi consilio & dominio entis intelligentis & potentis oriri potuit. Et si stellæ fixæ sint centra similium systematum, hæc omnia simili consilio constructa suberunt *Unius* dominio: præsertim cum lux fixarum sit ejusdem naturæ ac lux solis, & systemata omnia lucem in omnia invicem immittant. Et ne fixarum systemata per gravitatem suam in se mutuo cadant, hic eadem immensam ab invicem distantiam posuerit.

Hic

Hic omnia regit non ut anima mundi, sed ut universorum dominus. Et propter dominium suum, dominus deus [a] Παντοκράτωρ dici solet. Nam deus est vox relativa & ad servos refertur: & deitas est dominatio dei, non in corpus proprium, uti sentiunt quibus deus est anima mundi, sed in servos. Deus summus est ens æternum, infinitum, absolute perfectum: sed ens utcunque perfectum sine dominio non est dominus deus. Dicimus enim deus meus, deus vester, deus *Israelis*, deus deorum, & dominus dominorum: sed non dicimus æternus meus, æternus vester, æternus *Israelis*, æternus deorum; non dicimus infinitus meus, vel perfectus meus. Hæ appellationes relationem non habent ad servos. Vox deus passim [b] significat dominum: sed omnis dominus non est deus. Dominatio entis spiritualis deum constituit, vera verum, summa summum, ficta fictum. Et ex dominatione vera sequitur deum verum esse vivum, intelligentem & potentem; ex reliquis perfectionibus summum esse, vel summe perfectum. Æternus est & infinitus, omnipotens & omnisciens, id est, durat ab æterno in æternum, & adest ab infinito in infinitum: omnia regit; & omnia cognoscit, quæ fiunt aut fieri possunt. Non est æternitas & infinitas, sed æternus & infinitus; non est duratio & spatium, sed durat & adest. Durat semper, & adest ubique, & existendo semper & ubique, durationem & spatium constituit. Cum unaquæque spatii particula sit *semper*, & unumquodque durationis indivisibile momentum *ubique*, certe rerum omnium fabricator ac dominus non erit *nunquam*, *nusquam*. Omnis anima sentiens diversis temporibus, & in diversis sensuum, & motuum organis eadem est persona indivisibilis. Partes dantur successivæ in duratione, coexistentes in spatio, neutræ in persona hominis seu principio ejus cogitante; & multo minus in substantia cogitante dei. Omnis homo, quatenus res sentiens, est unus & idem homo durante vita sua in omnibus & singulis sensuum organis. Deus est unus & idem deus semper & ubique. Omnipræsens est non per *virtutem* solam, sed etiam per *substantiam*: nam virtus sine substantia subsistere non potest.

[a] Id est Imperator universalis.

[b] *Pocockus* noster vocem *dei* deducit a voce *Arabica du*, (& in casu obliquo *di*,) quæ dominum significat. Et hoc sensu principes vocantur dii, *Psalm.* lxxxiv. 6. & *Joan.* x. 45. Et *Moses* dicitur *deus* fratris *Aaron*, & *deus* regis *Pharaoh* (*Exod.* iv. 16. & vii 1.) Et eodem sensu animæ principum mortuorum olim a gentibus vocabantur dii, sed falso propter defectum dominii.

test. In ipso [c] continentur & moventur universa, sed sine mutua passione. Deus nihil patitur ex corporum motibus: illa nullam sentiunt resistentiam ex omnipræsentia dei. Deum summum necessario existere in confesso est: Et eadem necessitate *semper* est & *ubique*. Unde etiam totus est sui similis, totus oculus, totus auris, totus cerebrum, totus brachium, totus vis sentiendi, intelligendi, & agendi, sed more minime humano, more minime corporeo, more nobis prorsus incognito. Ut cæcus non habet ideam colorum, sic nos ideam non habemus modorum, quibus deus sapientissimus sentit & intelligit omnia. Corpore omni & figura corporea prorsus destituitur, ideoque videri non potest, nec audiri, nec tangi, nec sub specie rei alicujus corporei coli debet. Ideas habemus attributorum ejus, sed quid sit rei alicujus substantia minime cognoscimus. Videmus tantum corporum figuras & colores, audimus tantum sonos, tangimus tantum superficies externas, olfacimus odores solos, & gustamus sapores: intimas substantias nullo sensu, nulla actione reflexa cognoscimus; & multo minus ideam habemus substantiæ dei. Hunc cognoscimus solummodo per proprietates ejus & attributa, & per sapientissimas & optimas rerum structuras & causas finales, & admiramur ob perfectiones; veneramur autem & colimus ob dominium. Colimus enim ut servi, & deus sine dominio, providentia, & causis finalibus nihil aliud est quam fatum & natura. A cæca necessitate metaphysica, quæ utique eadem est semper & ubique, nulla oritur rerum variatio. Tota rerum conditarum pro locis ac temporibus diversitas, ab ideis & voluntate entis necessario existentis solummodo oriri potuit. Dicitur autem deus per allegoriam videre, audire, loqui, ridere, amare, odio habere, cupere, dare, accipere, gaudere, irasci, pugnare, fabricare, condere, construere. Nam sermo omnis de deo a rebus humanis per similitudinem aliquam desumitur, non perfectam quidem, sed aliqualem tamen. Et hæc de deo, de quo utique ex phænomenis disserere, ad philosophiam naturalem pertinet.

[c] Ita sentiebant veteres, ut *Pythagoras* apud *Ciceronem*, de Natura deorum, *lib.* 1. *Thales*, *Anaxagoras*, *Virgilius* Georgic. *lib* iv. *v.* 220, & Æneid. *lib.* 6. *v.* 721. *Philo* Allegor. *lib.* 1. sub initio. *Aratus* in Phænom. sub initio. Ita etiam scriptores sacri ut *Paulus* in Act. xvii. 27, 28. *Johannes* in Evang. xiv. 10. *Moses* in Deut. iv. 39. & x. 14. *David* Psal. cxxxix. 7, 8, 9. *Solomon* 1 Reg. viii. 27. *Job* xxii. 12, 13, 14. *Jeremias* xxiii. 23, 24. Fingebant autem idololatræ solem, lunam, & astra, animas hominum & alias mundi partes esse partes dei summi & ideo colendas sed falso.

 Hactenus

De Mundi Systemate

Hactenus phænomena cælorum & maris nostri per vim gravitatis exposui, sed causam gravitatis nondum assignavi Oritur utique hæc vis a causa aliqua, quæ penetrat ad usque centra solis & planetarum, sine virtutis diminutione; quæque agit non pro quantitate *superficierum* particularum, in quas agit (ut solent causæ mechanicæ) sed pro quantitate materiæ *solidæ*; & cujus actio in immensas distantias undique extenditur, decrescendo semper in duplicata ratione distantiarum. Gravitas in solem componitur ex gravitatibus in singulas solis particulas, & recedendo a sole decrescit accurate in duplicata ratione distantiarum ad usque orbem saturni, ut ex quiete apheliorum planetarum manifestum est, & ad usque ultima cometarum aphelia, si modo aphelia illa quiescant. Rationem vero harum gravitatis proprietatum ex phænomenis nondum potui deducere, & hypotheses non fingo. Quicquid enim ex phænomenis non deducitur, *hypothesis* vocanda est; & hypotheses seu metaphysicæ, seu physicæ, seu qualitatum occultarum, seu mechanicæ, in *philosophia experimentali* locum non habent. In hac philosophia propositiones deducuntur ex phænomenis, & redduntur generales per inductionem. Sic impenetrabilitas, mobilitas, & impetus corporum & leges motuum & gravitatis innotuerunt. Et satis est quod gravitas revera existat, & agat secundum leges a nobis expositas, & ad corporum cælestium & maris nostri motus omnes sufficiat.

Adjicere jam liceret nonnulla de spiritu quodam subtilissimo corpora crassa pervadente, & in iisdem latente; cujus vi & actionibus particulæ corporum ad minimas distantias se mutuo attrahunt, & contiguæ factæ cohærent; & corpora electrica agunt ad distantias majores, tam repellendo quam attrahendo corpuscula vicina; & lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, & corpora calefacit; & sensatio omnis excitatur, & membra animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus scilicet hujus spiritus per solida nervorum capillamenta ab externis sensuum organis ad cerebrum & a cerebro in musculos propagatis. Sed hæc paucis exponi non possunt; neque adest sufficiens copia experimentorum, quibus leges actionum hujus spiritus accurate determinari & monstrari debent.

FINIS.

INDEX

INDEX RERUM
ALPHABETICUS.

N. B. *Citationes factæ sunt ad normam sequentis exempli.* III, 10: 484, 16: 514, 6 *designant libri tertii propositionem decimam: paginæ* 484[tæ] *lineam* 16[am]: *paginæ* 514[æ] *lineam* 6[am].

 trajectoria

L.

M.

N.

O.

P.

velocitas

FINIS.

CATALOGUS Librorum proſtantium apud GUIL. & JOH. INNYS.

1. OPTICKS, or a Treatiſe of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light. The third Edition corrected. By Sir *Iſaac Newton*, Kt. 8vo. 1721.

2. Optice, ſive de Reflectionibus, Refractionibus, Inflectionibus & Coloribus Lucis. Libri tres. Authore Iſaaco Newton, Equite Aurato. Latinè reddidit Samuel Clarke, S. T. P. Editio ſecunda, auctior. 8vo. 1719.

3. Analyſis per Quantitatum Series, Fluxiones, ac Differentias cum Enumeratione Linearum tertii Ordinis. 4o. 1711.

4. Arithmetica Univerſalis, ſive de Compoſitione & Reſolutione Arithmetica Liber. Edit. ſecunda. 8vo. 1722.

5. The ſame in Engliſh by Mr. *Raphſon*. 8vo.

6. The Philoſophical Works of the Honourable *Robert Boyle*, Eſq; abridg'd, methodiz'd, and diſpos'd under the general Heads of Phyſics, Statics, Pneumatics, Natural Hiſtory, Chymiſtry and Medicine. The whole illuſtrated with Notes, containing the Improvements made in the ſeveral Parts of natural and experimental Knowledge ſince his Time. In three Volumes. By *Peter Shaw*, M. D. 4o.

7. Geometria Organica, ſive Deſcriptio Linearum curvarum univerſalis. Auctore Colino Mac-Laurin Matheſeos in Collegio novo Abredonenſi Profeſſore, & Reg. Soc. Socio. 4o. 1720.

8. Philoſophical Tranſactions, giving ſome Account of the preſent Undertakings, Studies and Labours of the Ingenious in many conſiderable Parts of the World, from 1665 to 1725. In 32 Volumes. Continued and publiſhed by Dr. *James Jurin*, Secretary to the Royal Society. *N. B.* There are 389 Numbers, moſt of which may be had ſeparate.

9. The ſame abridged by Mr. *Lowthorp*, and Mr. *Mott*. In 5 Vol. 4o.

10. Epiſtola ad amicum de Coteſii Inventis Curvarum ratione, quæ cum Circulo & Hyperbola comparationem admittunt, cui additur appendix. 4o. 1722.

11. An Analytick Treatiſe of Conic Sections, and their Uſe, for reſolving of Equations in determinate and indeterminate Problems, being the Poſthumous Work of the Marquiſs *de l'Hoſpital*, Honorary Fellow of the Academy Royal of Sciences. 4o.

12. Hiſtoria Cœleſtis Britannica, tribus Voluminibus contenta, obſervante Johanne Flamſtedio, A. R. in Obſervatorio Regio Grenovicenſi, 1725.

13. Mathematical Elements of Natural Philoſophy, confirm'd by Experiments, or an Introduction to Sir *Iſaac Newton*'s Philoſophy. Written in Latin by *William James s'Graveſand*, Doctor of Laws and Philoſophy, Profeſſor of Mathematicks and Aſtronomy at *Leyden*, and F. R. S. of *London*. Tranſlated into Engliſh by *J. T. Deſaguliers*, L. L. D. F. R. S. and Chaplain to his Grace the Duke of *Chandos*. In 2 Vol. 8o. 1726.

14. An Eſſay on Perſpective, written by *William James s' Graveſand*, Doctor of Laws, *&c.* 8vo. 1724.

15. Phyſico-Theology, or a Demonſtration of the Being and Attributes of God, from his Works of the Creation, with large Notes and many curious Obſervations. By *William Derham*, Rector of *Upminſter* in *Eſſex*, Canon of *Windſor*, F. R. S. The Sixth Edition. 8vo. 1723.

16. Aſtro-Theology, or a Demonſtration of the Being and Attributes of God, from a Survey of the Heavens. Illuſtrated with Copper Plates. The Fifth Edition. By the ſame Author. 8vo. 1726.

17. Methodus Incrementorum directa & inverſa. Auctore Brook Taylor, L. L. D. & Regiæ Societatis Secretario. 4o. 1717.

18. The

18. The Religious Philosopher, or the right Use of contemplating the Works of the Creator I. in the wonderful Structure of animal Bodies, and in particular, Man. II. In the no less wonderful and wise Formation of the Elements, and their various Effects upon animal and vegetable Bodies. And III. in the most amazing Structure of the Heavens, with all their Furniture. *Designed for the Conviction of Atheists and Infidels.* In Two Volumes. 4°. Throughout which all the late Discoveries in Anatomy, Philosophy, and Astronomy, together with the various Experiments made use of to illustrate the same, are most copiously handled by that Learned Mathematician Dr. *Nieuwentyt.* Translated from the *Low Dutch.* To which is prefix'd a Letter to the Translator, by the Rev. *J. T. Desaguliers,* L. L. D. F. R. S. The third Edition, adorned with Cuts. 1724.

19. Philosophical Experiments and Observations of the late eminent Dr. *Robert Hooke,* F.R.S. and Geom. Prof. Gresh. and other eminent Virtuoso's in his Time. With Copper Plates. Published by *William Derham,* F. R. S. 8vo. 1726.

20. The Posthumous Works of Dr. *Robert Hooke*; in which 1. the present Deficiency in Natural Philosophy is discours'd of, with the Methods of rendring it more easy and beneficial. 2. Of the Nature, Motions, and Effects of Light, particularly that of the Sun and Comets. 3. An Hypothetical Explication of Memory; how the Organs made use of by the Mind in its Operation may be mechanically understood. 4. An Hypothesis and Explication of the Cause of Gravity or Gravitation, Magnetism, &c. 5. Discourses of Earthquakes, their Causes and Effects, and Histories of several: To which are annexed Physical Explications of several of the Fables in *Ovid's Metamorphosis,* very different from other Mythologick Interpreters. 6. Lectures for improving Navigation and Astronomy, with the Descriptions of several new and useful Instruments, illustrated with Sculptures. To these Discourses is prefix'd the Author's Life. By *Richard Waller,* R. S. Secr. Folio.

21. A Treatise of Architecture, with Remarks and Observations by that excellent Master thereof *Sebastian le Clerc,* Knight of the Empire, Designer and Engraver to the Cabinet of the late *French* King, and Member of the Academy of Arts and Sciences; necessary for young People who would apply to that noble Art. Engraven in 181 Copper Plates by *John Sturt.* Translated by Mr. *Chambers.* In 2 Vol. 8°. 1725.

22. Philosophical Letters between the late Learned Mr. *Ray,* and several of his ingenious Correspondents, Natives and Foreigners. To which are added those of *Francis Willoughby,* Esq; the whole consisting of many curious Discoveries and Improvements in the History of Quadrupeds, Birds, Fishes, Insects, Plants, Fossils, Fountains, &c. Published by *W. Derham,* M. A. and F. R. S. 1718.

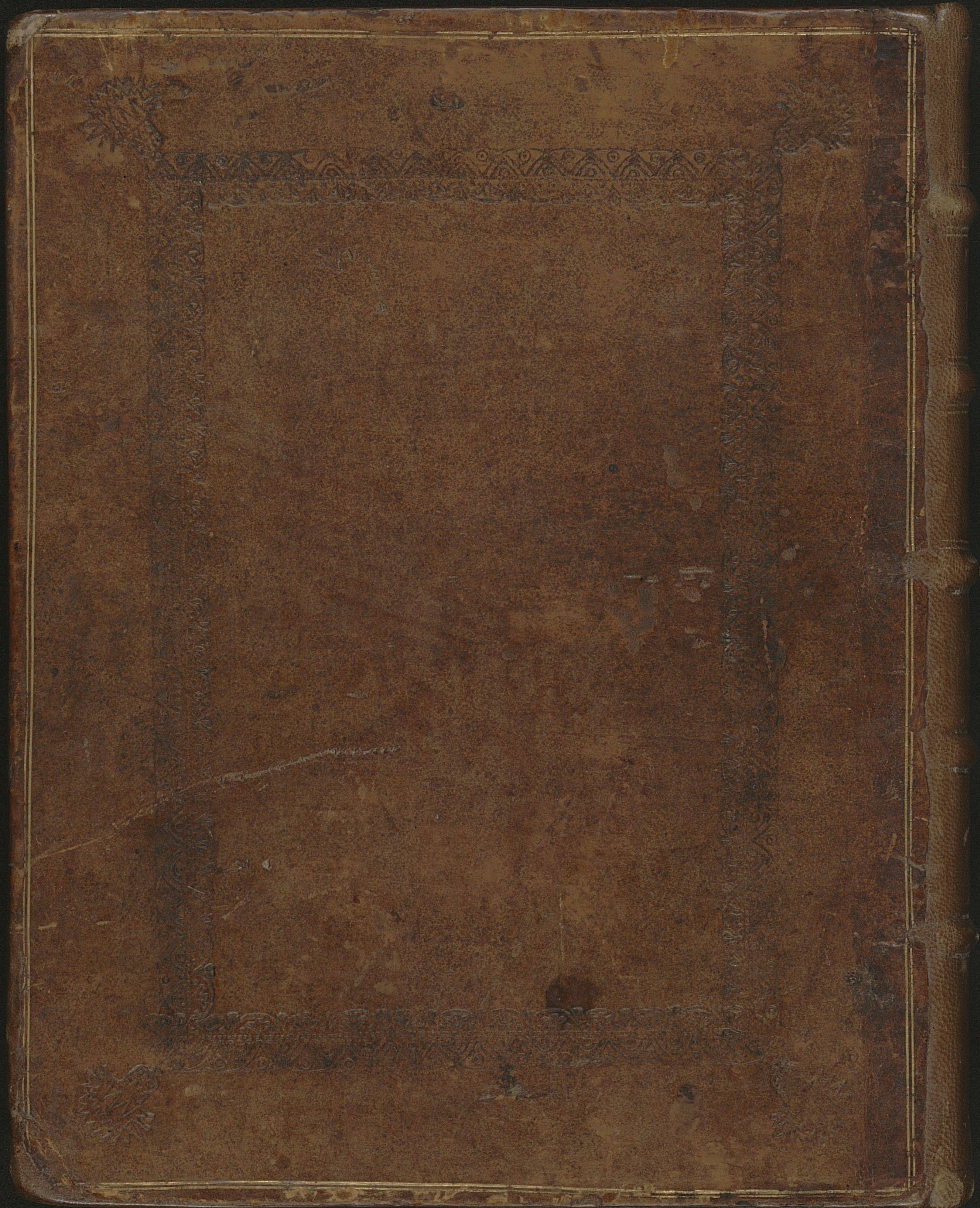
23. The Wisdom of God manifested in the Works of the Creation. In two Parts. To which are added Answers to some Objections. By *John Ray,* late Fellow of the Royal Society. The Eighth Edition. 8°. 1722.

24. Three Physico-Theological Discourses, concerning I. The primitive Chaos, and Creation of the World. II. The general Deluge, its Causes and Effects. III. The Dissolution of the World, and future Conflagration; wherein are largely discussed the Production and Use of Mountains; the Original of Fountains, of formed Stones, and Sea Fishes, Bones and Shells found in the Earth; the Effects of particular Floods and Inundations of the Sea; the Eruptions of Vulcano's; the Nature and Causes of Earthquakes; also an Historical Account of the two late remarkable ones in *Jamaica* and *England*: With practical Inferences, illustrated with Copper Plates. By *John Ray,* late Fellow of the Royal Society. The Fourth Edition. 8°. 1721.

25. New Memoirs of Literature, containing an Account of new Books printed both at home and abroad; with Dissertations upon several Subjects, Miscellaneous Observations, &c. For *February,* 1726. being the Fourteenth Number. To be continued Monthly. 8°.

26. A Treatise of Five Orders of Columns in Architecture, *viz. Tuscan, Doric, Ionic, Corinthian* and *Composite,* wherein the Proportions and Characters of the Members of their several Pedestals, Columns and Entablatures, are distinctly consider'd, with Respect to the Practice of the Antients and Moderns. Also a most natural, easy and practical Method laid down for determining the most minute Part in all the Orders without a Fraction. To which is annexed a Discourse concerning Pilasters, and of several Abuses introduced into Architecture. Engraven on Six Folio Plates of the several Orders, adorned with twenty four Borders, as many initial Letters, and a like Number of Tail-Pieces, by *John Sturt.* Written in French by *Claude Perrault,* of the Royal Academy of *Paris,* Author of the celebrated *Comment on* Vitruvius. Made English by *John James* of *Greenwich.* 1722.

27. Rules and Examples of Perspective, proper for Painters and Architects, with 150 Plates. By *Andrea Pozzo.* Englished by *John James* of *Greenwich.* Fol.



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

ISAAC
NEWTON



inches

centimeters





	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 (A)	12	13	14	15
L*	39.12	65.43	49.87	44.26	55.56	70.82	63.51	39.92	52.24	97.06	92.02	87.34	82.14	72.06	62.15
a*	13.24	18.11	-4.34	-13.80	9.82	-33.43	34.26	11.81	48.55	-0.40	-0.60	-0.75	-1.06	-1.19	-1.07
b*	15.07	18.72	-22.29	22.85	-24.49	-0.35	59.60	-46.07	16.51	1.13	0.23	0.21	0.43	0.28	0.19
Density										0.04	0.09	0.15	0.22	0.36	0.51

	16 (M)	17	18 (B)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
L*	49.25	38.62	28.86	16.19	8.29	3.44	31.41	72.46	72.95	29.37	54.91	43.96	82.74	52.79	50.87
a*	-0.16	-0.18	0.54	-0.05	-0.81	-0.23	20.98	-24.45	16.83	13.06	-38.91	52.00	3.45	50.88	-27.17
b*	0.01	-0.04	0.60	0.73	0.19	0.49	-19.43	55.93	68.80	-49.49	30.77	30.01	81.29	-12.72	-29.46
Density	0.75	0.98	1.24	1.67	2.04	2.42									

D50 Illuminant, 2 degree observer

Density →

Golden Thread

Colors by Munsell Color Services Lab

Don Williams